応用数学第一

第一回

梶本裕之

やること

フーリエ変換という，工学者にとっての常識・一般教養を身につけます．

梶本が担当する学部３年のインタラクティブシステム論では，フーリエ変換を含んだ幾つかの研究用のツールを，「ツールとして使える」ことを目標に，プログラミングレポート課題を重視した講義を行います（宣伝）．

対して本講義は，工学者の共通教養として「きちんと数式展開できる」を重視し，数式展開，演習問題を重視した講義を行います．

日程

講義番号	講義日	講義内容
1	10/1	周期関数、フーリエ級数の定義
2	10/8	フーリエ級数の計算例
3	10/15	ベクトルと関数、直交関数系・複素フーリエ級数
-	10/22	体育祭
4	10/29	周期関数のたたみこみ、パーセバルの等式
5	11/5	非周期関数、フーリエ変換の定義・計算例
6	11/12	フーリエ変換の性質
-	11/19	中間確認問題（自習）
7	11/26	デルタ関数とフーリエ変換、たたみこみのフーリエ変換、パーセバルの等式
8	12/3	離散時間信号と離散時間フーリエ変換（教科書外）
9	12/10	離散フーリエ変換（教科書外）
10	12/17	離散フーリエ変換の性質（教科書外）
11	1/7	サンプリング定理
12	1/14	ラプラス変換の定義と性質
13	1/21	線形常微分方程式のラプラス変換による解法
-	1/28	期末テスト準備（自習）
-	2/4	期末確認テスト（全範囲。現在は大学を予定）

評価方法

2020年度は例年とは状況が違うので、今の所レポート・期末試験の結果を、次のように総合評価する予定です。

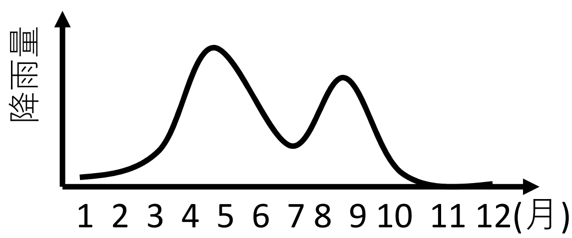
(レポート × 50％)＋(期末試験 × 50％)

ただし状況の変化によっては中間試験を行ったり、期末試験がレポートに変わる可能性があります。

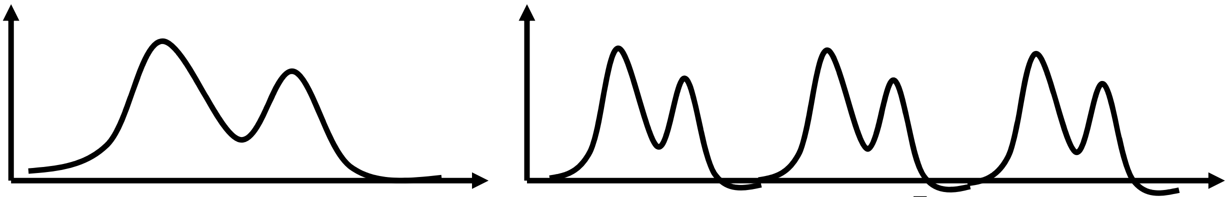
周期関数とフーリエ級数展開

データを取ると「関数」になる

- 洪水の記録，天体現象の記録，etc…
- データを蓄積していくことは比較的容易．古代人でもできるし，やっていた．
- ここで得られたデータは，例えば時間tの関数f(t)を与える．



関数を「分析」したい



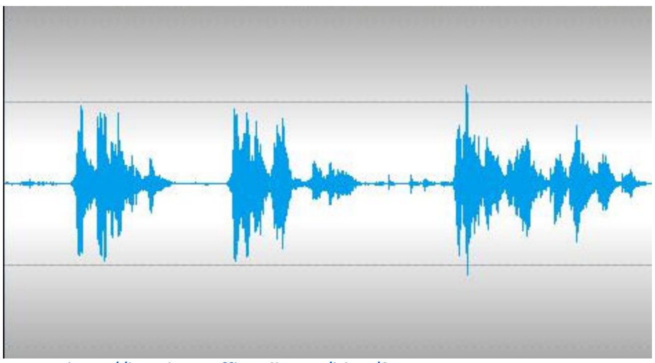
得られた関数から，何らかの性質を発見したい．「分析」したい．
分析：要素に分けること．では要素とは？

- 世の中の多くの現象は，繰り返し（周期）現象である．
  - ✓ １年周期の降雨量，月の満ち欠け，海の波，鐘の音

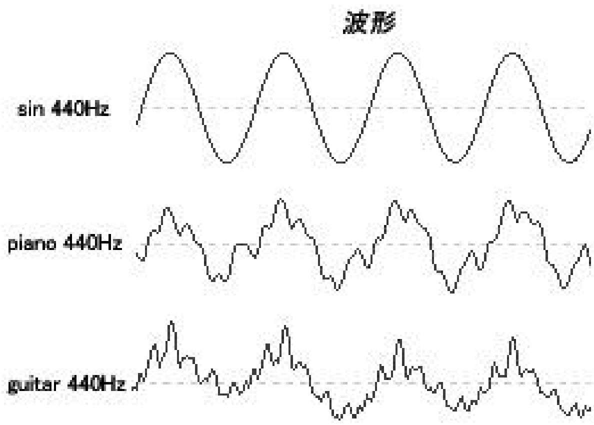
繰り返し現象を分析，すなわち要素に分けられれば色々わかるのでは？



多くの現象は繰り返し現象である



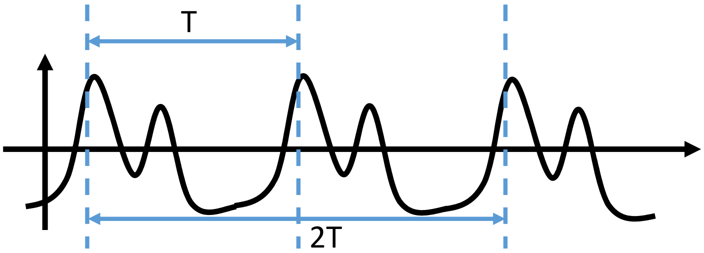
http://kotoba.wafflecell.com/blog/?p=80



http://www.geocities.jp/flawtips0/Pic/wav1.html

- 例えば音波形は，大域的にはもちろん繰り返しではない．
- しかし「音色」のレベルを見る微視的視点では，明らかに繰り返している．しかも違う音色は違う波形で繰り返している．逆に繰り返し波形の「分析」が出来れば，音色の正体が「わかる」．

用語の定義



関数f(x)のすべてのxに対して，

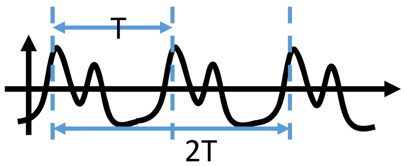
が成立するとき，Tをf(x)の**周期**と呼ぶ．

周期は無限個ある．Tが周期なら2T, 3T,…も周期となる．
最も小さい周期を**基本周期**と呼ぶ．

例１：sin(x)の周期は？

これはT=2kπ(kは整数）なら成立．よって周期　　　基本周期

周期関数・非周期関数



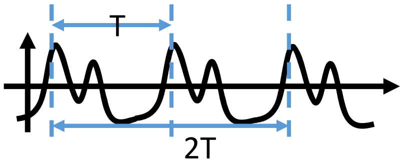
例２：sin(√7 x)の周期は？

これは　　　　　なら成立．よって周期　　　　基本周期

例3：2cos(2x)+3sin(3x)の周期は？

これは　　　　　　　　となるようなm,nがあれば成立．
両辺を割ると，　　　　　　ということは，　　　　　で成立するから，
基本周期は　　　　周期は

周期関数・非周期関数



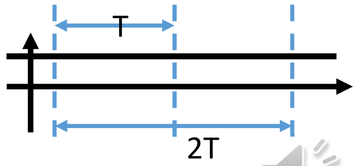
例4：exp(x)は周期関数か？　→　単調増加だから明らかに違う

例5：cos(2x)+ sin(√7 x)は周期関数か？

これは　　　　　　　　　　　となるようなm,nがあれば成立.
両辺を割ると

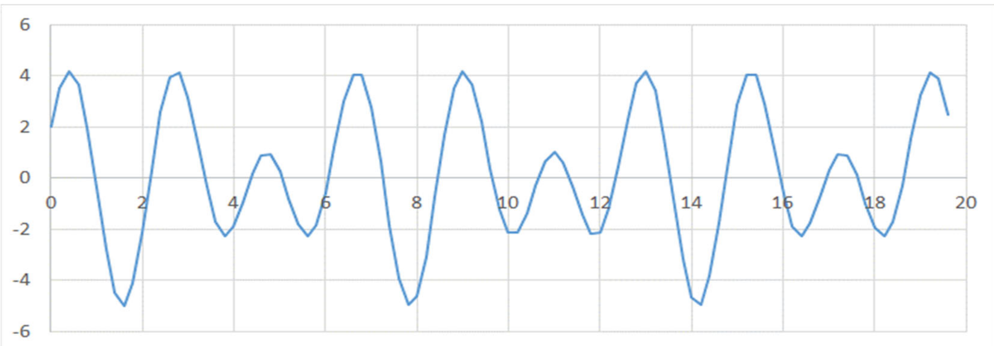
これは左辺は無理数で右辺は有理数なので矛盾．よって周期関数ではない.

例6: f(x)=c (一定値）は周期関数か？
これはあらゆる周期が可能な特殊な周期関数
（∵どんな場合もf(x)=f(x+T)が成立する）

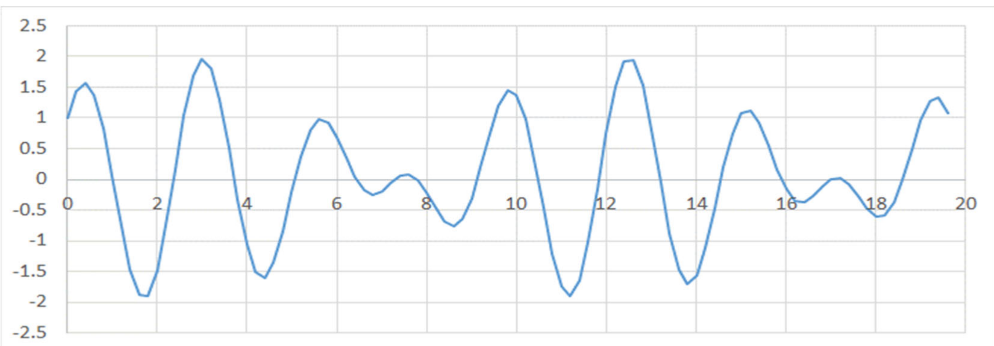


検証（Excel)

2cos(2x)+3sin(3x)



cos(2x)+ sin(√7 x)



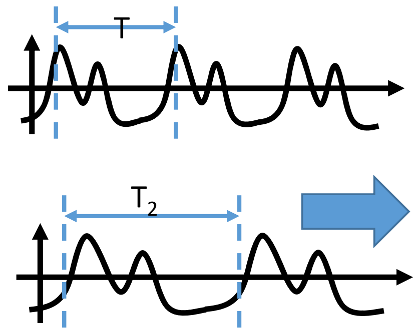
周期関数の縮尺

周期関数の縮尺は容易に変更できる．

周期Tの関数f(x)に対して，新たな関数g(x)を

$$g(x) = f(\frac{T}{T_2}x)$$

とすると，g(x)の周期は，T_2になる

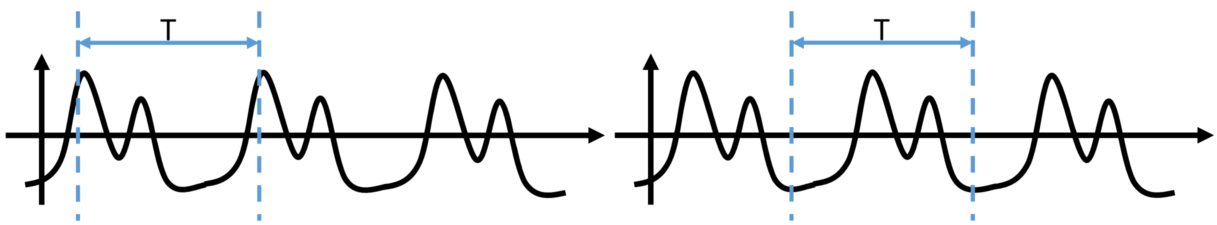


∵

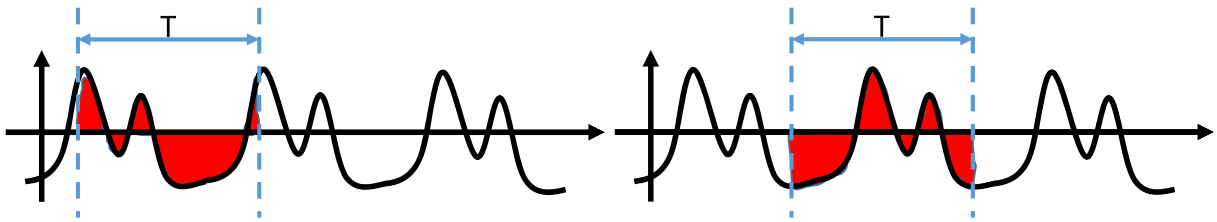
よって例えば，$T_2 = 2\pi$と置くことで，任意の周期関数は周期2πの周期関数にできる．

周期関数の位置取り

周期関数は，どこから区切りはじめても，周期関数になる



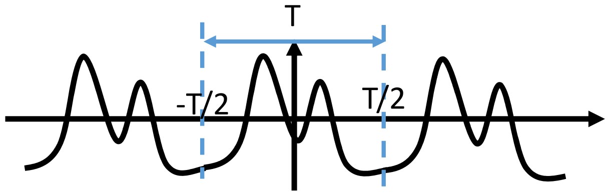
周期関数は，どこから一周期分積分しても，積分値は変わらない



数式で表すなら

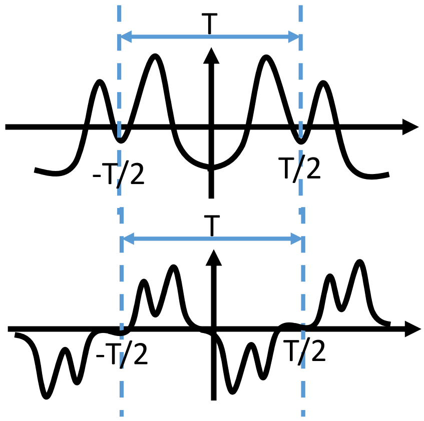
今後の周期関数

Xの範囲を，-T/2からT/2として扱う．

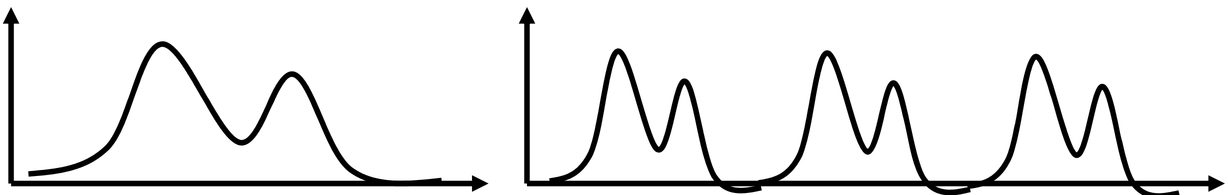


これまでの議論で，このように範囲を定めても一般性を失わない．

また，偶関数（y軸線対称な関数）と奇関数（原点対称）の周期関数に対しては次の式が成り立つ．



（再）関数を「分析」したい



得られた関数から，何らかの性質を発見したい．「分析」したい．
分析：要素に分けること．では要素とは？

- 世の中の多くの現象は，繰り返し（周期）現象である．
  - ✓ １年周期の降雨量，月の満ち欠け，海の波，鐘の音

繰り返し現象を分析，すなわち要素に分けられれば色々わかるのでは？**→周期関数を「要素」に分ける**

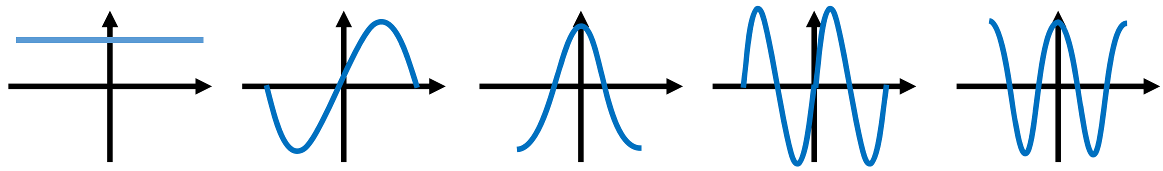


周期関数を要素に分ける

周期関数をより基本的な関数の合成で表す．基本的な関数＝要素という考え方．
その基本的な関数も，周期Tをもつ関数でなければならない（そうでなければxが大きくなったときに「ずれて」しまう）

周期Tを持つ基本的な関数として，ごく自然な発想は，

$$1 \qquad \sin(\frac{2\pi}{T}x) \qquad \cos(\frac{2\pi}{T}x) \qquad \sin(\frac{4\pi}{T}x) \qquad \cos(\frac{4\pi}{T}x) \qquad \cdots$$



という，正弦波を採用すること．定数も特殊な正弦波．一般化すると，

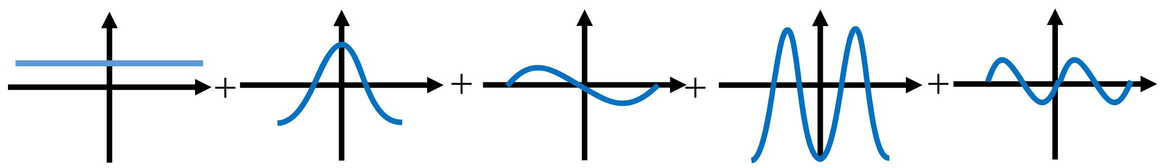
これらは基本周期はT/nだが，周期Tでもある．

周期関数を要素で表せると仮定する

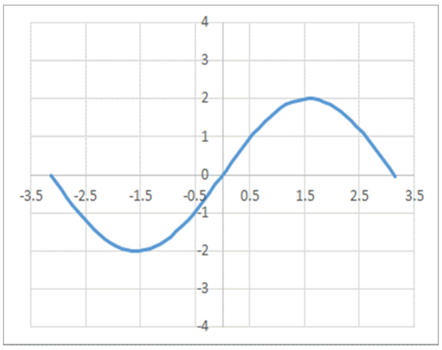
周期関数を，周期Tの正弦波の合成で表せると仮定する．

完全にイコールにならないが漸近していくことを表す

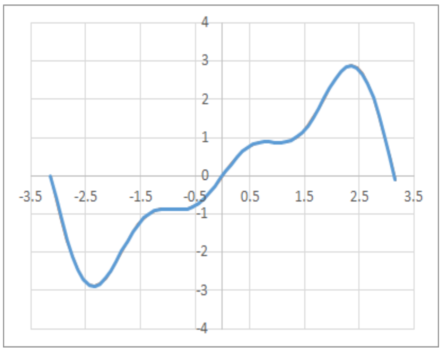
$$\frac{a_0}{2} \qquad a_1\cos(\frac{2\pi}{T}x) \qquad b_1\sin(\frac{2\pi}{T}x) \qquad a_2\cos(\frac{4\pi}{T}x) \qquad b_2\sin(\frac{4\pi}{T}x) \qquad \cdots$$



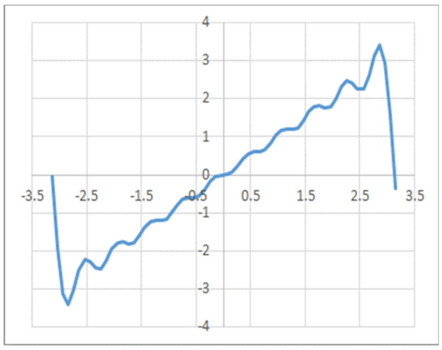
例（詳細は次回）



$$2\sin(\frac{2\pi}{T}x)$$



$$2\sin(\frac{2\pi}{T}x)-\sin(\frac{4\pi}{T}x)+\frac{2}{3}\sin(\frac{6\pi}{T}x)$$



$$2\sin(\frac{2\pi}{T}x)-\sin(\frac{4\pi}{T}x)+\frac{2}{3}\sin(\frac{6\pi}{T}x)$$
$$-\frac{1}{2}\sin(\frac{8\pi}{T}x)+\frac{2}{5}\sin(\frac{10\pi}{T}x)$$

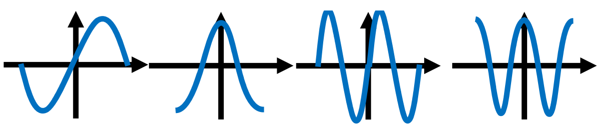
この例では，係数をうまく選んでやることで鋸波を再現出来るようになる

係数a_n, b_nをどう求めるか

$$f(x)\approx\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(\frac{2n\pi}{T}x)+b_n\sin(\frac{2n\pi}{T}x)\right)$$

まずa_0を求めるために，両辺を-T/2～T/2の範囲で積分する.

Σと積分の順序を入れ替えられるとすると（この仮定は今後もおく）



∵一周期分の正弦波の積分値は0

よって

係数a_n, b_nをどう求めるか

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\frac{2n\pi}{T}x) + b_n \sin(\frac{2n\pi}{T}x) \right)$$

次にa_kを求めるために，両辺にcos(2kπx/T)をかけてから-T/2～T/2の範囲で積分する．

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(\frac{2k\pi}{T}x)dx \approx \frac{a_0}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\frac{2k\pi}{T}x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\cos(\frac{2n\pi}{T}x)\cos(\frac{2k\pi}{T}x) \right] dx + b_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\sin(\frac{2n\pi}{T}x)\cos(\frac{2k\pi}{T}x) \right] dx \right)$$

右辺第1項　$\frac{a_0}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\frac{2k\pi}{T}x)dx$→積分すると明らかに0

第2，第3項：積和公式を利用

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\{\sin(x+y) + \sin(x-y)\}$$
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\{\cos(x-y) - \cos(x+y)\}$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\{\cos(x+y) + \cos(x-y)\}$$

第3項は

→積分すると明らかに0

係数a_n, b_nをどう求めるか

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(\frac{2k\pi}{T}x)dx \approx \frac{a_0}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\frac{2k\pi}{T}x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\cos(\frac{2n\pi}{T}x)\cos(\frac{2k\pi}{T}x) \right] dx + b_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\sin(\frac{2n\pi}{T}x)\cos(\frac{2k\pi}{T}x) \right] dx \right)$$

第2項は

$$a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\cos(\frac{2n\pi}{T}x)\cos(\frac{2k\pi}{T}x) \right] dx =$$

→積分すると

n≠kの項：すべてcosのため，やはり積分すると0

n=kの項

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\{\sin(x+y) + \sin(x-y)\}$$
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\{\cos(x-y) - \cos(x+y)\}$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\{\cos(x+y) + \cos(x-y)\}$$

結局これだけ生き残るから，

よって

係数a_n, b_nをどう求めるか

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\frac{2n\pi}{T}x) + b_n \sin(\frac{2n\pi}{T}x) \right)$$

次にb_kを求めるために，両辺にsin(2kπx/T)をかけてから-T/2～T/2の範囲で積分する．

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(\frac{2k\pi}{T}x)dx \approx \frac{a_0}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(\frac{2k\pi}{T}x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\cos(\frac{2n\pi}{T}x)\sin(\frac{2k\pi}{T}x) \right] dx + b_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\sin(\frac{2n\pi}{T}x)\sin(\frac{2k\pi}{T}x) \right] dx \right)$$

右辺第1項　$\frac{a_0}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(\frac{2k\pi}{T}x)dx$→積分すると明らかに0

第2，第3項：積和公式を利用

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\{\sin(x+y) + \sin(x-y)\}$$
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\{\cos(x-y) - \cos(x+y)\}$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\{\cos(x+y) + \cos(x-y)\}$$

第2項は

→積分すると明らかに0

係数a_n, b_nをどう求めるか

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(\frac{2k\pi}{T}x)dx \approx \frac{a_0}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(\frac{2k\pi}{T}x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\cos(\frac{2n\pi}{T}x)\sin(\frac{2k\pi}{T}x) \right] dx + b_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\sin(\frac{2n\pi}{T}x)\sin(\frac{2k\pi}{T}x) \right] dx \right)$$

第3項は

→積分すると
　n≠kの項：すべてcosのため，やはり積分すると0
　n=kの項：

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\{\sin(x+y) + \sin(x-y)\}$$
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\{\cos(x-y) - \cos(x+y)\}$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\{\cos(x+y) + \cos(x-y)\}$$

結局これだけ生き残るから，

よって

正弦波による分解まとめ

周期Tの波形 f(x)は次のように分解できる

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(\frac{2n\pi}{T}x) + b_n \sin(\frac{2n\pi}{T}x)\right)$$

ただし

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$$

これは次式に含まれるので
普通省略

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

これをフーリエ級数展開と呼ぶ

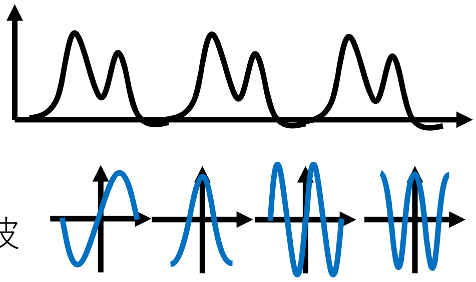
正弦波による分解まとめ：周期２πの場合

周期2πの波形 f(x)は次のように分解できる

ただし

周期関数の性質から，周期を変えることは容易
→周期2πの場合はきれいに書けるので特別扱い

今日のまとめ



1. 動機「関数」の性質を「分析」したい
2. 多くの現象は「周期的」である
3. 周期関数であれば，同じ周期関数である正弦波の「合成」によって表せるのではないか
4. 表せると仮定した表式をたてた
5. その未知係数を積分計算によって求めた
6. 動機は解決されたか：ある関数が，複数の「周波数」の波の合成であることがわかったという意味で「分析」できた.

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(\frac{2n\pi}{T}x) + b_n \sin(\frac{2n\pi}{T}x)\right)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

次回は具体的な波形に対するフーリエ級数展開

今日のレポート

1. 周期関数はどこから一周期分積分しても積分値が変わらないことを示せ
2. フーリエ級数展開の係数a_nを求める手順を示せ（ほぼ授業の清書）

レポートは紙に書いたものを写真にとり、下記からアップロードする。
Googleアカウントによりアップロードするので、大学が提供しているアカウントを使用すること。画像ファイルは5MB以下に抑えること。

https://forms.gle/tovLwBV1eauiuoAVA

提出締め切り：講義日から一週間以内