

応用数学第一

第十回

梶本裕之



日程

講義番号	講義日	講義内容	pdf	video	レポート締め切り
1	10/7	周期関数、フーリエ級数の定義	[pdf](2020年版)	video	10/14
2	10/14	フーリエ級数の計算例	[pdf](2020年版)	video	10/21
-	10/21	体育祭			
3	10/28	複素フーリエ級数、直交関数系	[pdf](2020年版)	video	11/4
4	11/4	周期関数のたたみこみ、パーセバルの等式	[pdf](2020年版)	video	11/11
5	11/11	非周期関数、フーリエ変換の定義・計算例	[pdf](2020年版)	video	11/18
6	11/18	フーリエ変換の性質	[pdf]	video	11/25
7	11/25	デルタ関数とフーリエ変換、たたみこみのフーリエ変換、パーセバルの等式	[pdf](2020年版)	video	12/2
-		中間確認テスト用問題集	[pdf](2020年版)		
-	12/2	中間確認テスト（前半。現在は大学を予定）			
8	12/9	離散時間信号と離散時間フーリエ変換（教科書外）	[pdf](2020年版)	video	12/16
9	12/16	離散フーリエ変換（教科書外）	[pdf](2020年版)	video	12/23
10	12/23	離散フーリエ変換の性質（教科書外）	[pdf](2020年版)	video	1/6
11	1/6	サンプリング定理	[pdf](2020年版)	video	1/13
12	1/13	ラプラス変換の定義と性質	[pdf](2020年版)	video	1/20
13	1/20	線形常微分方程式のラプラス変換による解法	[pdf](2020年版)	video	1/27
-		期末テスト用問題集	[pdf](2020年版)		
-	1/27	期末確認テスト（後半。現在は大学を予定）			



今日の目標

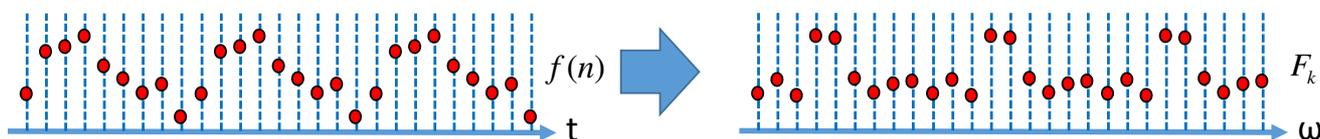
離散フーリエ変換の性質を知る



前回：離散フーリエ変換

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp(-j \frac{2\pi}{N} kn) \quad f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k \cdot \exp(j \frac{2\pi}{N} kn)$$

元の離散信号を周期的な信号とみなすことで
離散的かつ周期的な周波数信号に変換できる。



$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^{0 \cdot 0} & W_4^{0 \cdot 1} & W_4^{0 \cdot 2} & W_4^{0 \cdot 3} \\ W_4^{1 \cdot 0} & W_4^{1 \cdot 1} & W_4^{1 \cdot 2} & W_4^{1 \cdot 3} \\ W_4^{2 \cdot 0} & W_4^{2 \cdot 1} & W_4^{2 \cdot 2} & W_4^{2 \cdot 3} \\ W_4^{3 \cdot 0} & W_4^{3 \cdot 1} & W_4^{3 \cdot 2} & W_4^{3 \cdot 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} W_4^{-0 \cdot 0} & W_4^{-0 \cdot 1} & W_4^{-0 \cdot 2} & W_4^{-0 \cdot 3} \\ W_4^{-1 \cdot 0} & W_4^{-1 \cdot 1} & W_4^{-1 \cdot 2} & W_4^{-1 \cdot 3} \\ W_4^{-2 \cdot 0} & W_4^{-2 \cdot 1} & W_4^{-2 \cdot 2} & W_4^{-2 \cdot 3} \\ W_4^{-3 \cdot 0} & W_4^{-3 \cdot 1} & W_4^{-3 \cdot 2} & W_4^{-3 \cdot 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

この離散フーリエ変換は、結局**正方行列によるデータ変換**であり、
逆離散フーリエ変換は**逆行列**となる。



(復習) 元が4個のデータの場合

$$F_k = f(0)W_4^{k \cdot 0} + f(1)W_4^{k \cdot 1} + f(2)W_4^{k \cdot 2} + f(3)W_4^{k \cdot 3}$$

$$\text{ただし } W_N = \exp(-j \frac{2\pi}{N})$$

$$W_4^0 = 1$$

$$W_4^1 = \exp(-j \frac{2\pi}{4}) =$$

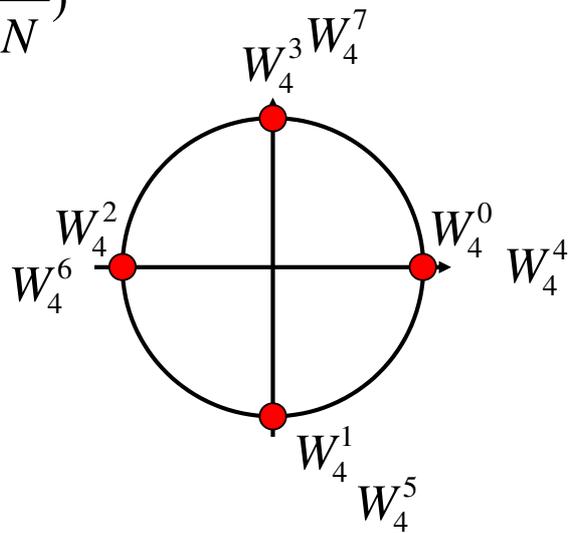
$$W_4^2 = \exp(-j \frac{4\pi}{4}) =$$

$$W_4^3 = \exp(-j \frac{6\pi}{4}) =$$

$$W_4^4 = \exp(-j \frac{8\pi}{4}) =$$

⋮

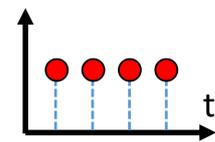
W_N^0 から W_N^N で複素単位円を一周する.



(復習) 元が4個のデータの場合

元データが $\mathbf{f} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ だと

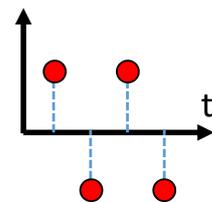
$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$



つまり F_0 だけが成分を持つ。
直流成分だけであることを意味している。

元データが $\mathbf{f} = [1 \ -1 \ 1 \ -1]^T$ だと

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$



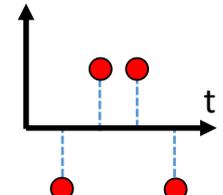
つまり F_2 だけが成分を持つ。
ある高い周波数成分だけであることを意味している。



(復習) 元が4個のデータの場合

元データが $\mathbf{f} = [-1 \ 1 \ 1 \ -1]^T$ だと

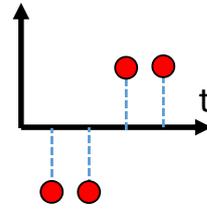
$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$



F_1 と F_3 が同じ大きさを持っている (あとで振り返る)

元データが $\mathbf{f} = [-1 \ -1 \ 1 \ 1]^T$ だと

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$



F_1 と F_3 が同じ大きさを持っている (あとで振り返る)



DFTの性質 (1) 周期性 (復習)

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp(-j \frac{2\pi}{N} kn)$$

$$F_{k+N} =$$

=

=

=



DFTの性質 (2) 対称性 (元データ実数時)

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp(-j \frac{2\pi}{N} kn)$$

元データ $f(n)$ が実数列である時,

$$\overline{F_{-k}} =$$

=

先の周期性 $F_{k+N} = F_k$ とあわせると

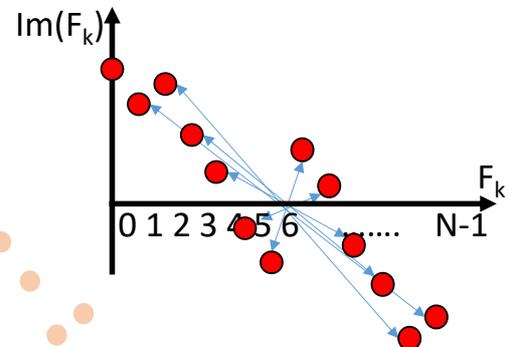
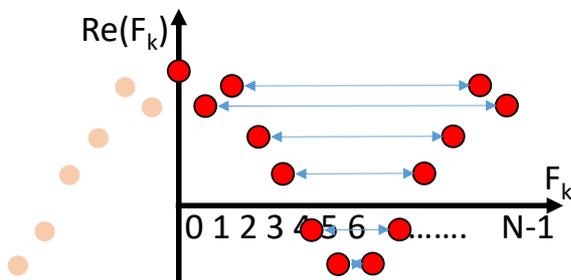
$$\overline{F_{N-k}} = F_k \quad \text{あるいは,} \quad \left\{ \right.$$



DFTの性質 (2) 対称性 (元データ実数時) 続

元データ $f(n)$ が実数列である時,

$$\begin{cases} \text{Re}(F_{N-k}) = \text{Re}(F_k) & \text{左右対称となる. あるいは偶関数} \\ \text{Im}(F_{N-k}) = -\text{Im}(F_k) & \text{左右反対称となる. あるいは奇関数} \end{cases}$$



$N=4$ の時の結果を見直すと...

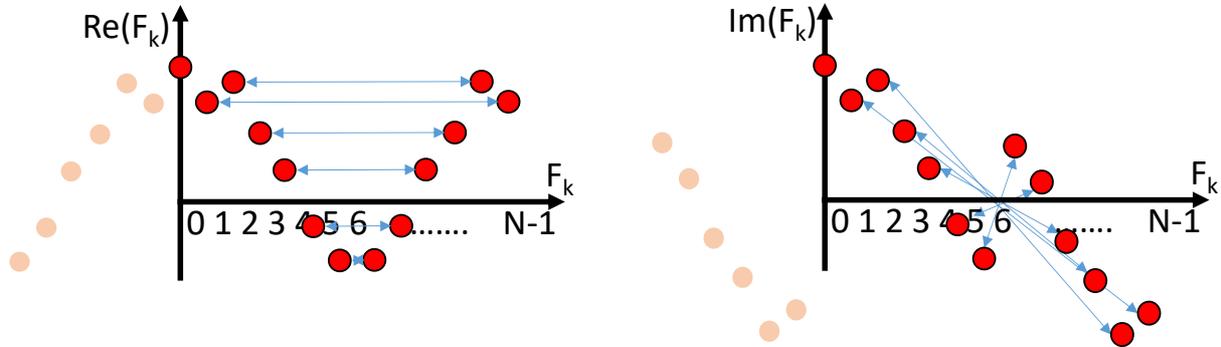
$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2-2j \\ 0 \\ -2+2j \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2+2j \\ 0 \\ -2-2j \end{bmatrix}$$



自由度に関する整合性

$$\begin{cases} \text{Re}(F_{N-k}) = \text{Re}(F_k) \\ \text{Im}(F_{N-k}) = -\text{Im}(F_k) \end{cases} \Rightarrow \text{N個のうちN/2個しか独立ではないことを意味する}$$



- 元のデータ $f(n)$: N個の独立なデータ. 実数なので自由度N
 - DFTの結果 F_k : 実数部, 虚数部共にN/2個の独立なデータ.
- つまりDFTによって自由度に変化がないことを意味している. 

DFTの性質 (3) 時間シフト

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp(-j \frac{2\pi}{N} kn)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(n - n_0) \exp(-j \frac{2\pi}{N} kn)$$

=

=

=

=

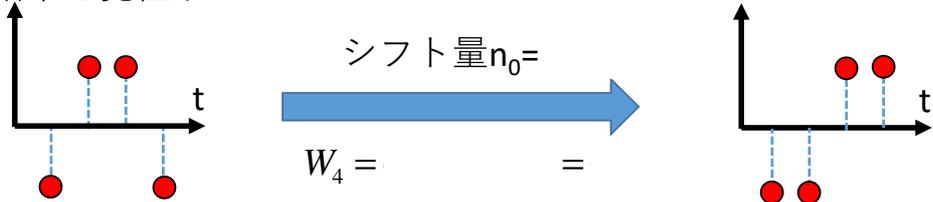
ただし $W_N = \exp(-j \frac{2\pi}{N})$

時間的にずれた信号 → DFTは $\exp(-j \frac{2\pi}{N} kn_0)$ の乗算 

DFTの性質 (3) 時間シフト (例)

$$f(n-n_0) \rightarrow F_k \exp(-j \frac{2\pi}{N} kn_0) = W_N^{kn_0} F_k \quad \text{ただし } W_N = \exp(-j \frac{2\pi}{N})$$

N=4の時の結果を見直すと...



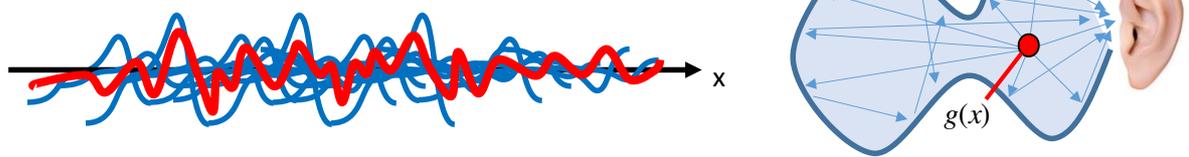
$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2-2j \\ 0 \\ -2+2j \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2+2j \\ 0 \\ -2-2j \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} W_4^{0 \cdot 1} \\ W_4^{1 \cdot 1} \\ W_4^{2 \cdot 1} \\ W_4^{3 \cdot 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \\ -1 \\ j \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -j \\ -1 \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2+2j \\ 0 \\ -2-2j \end{bmatrix}$$

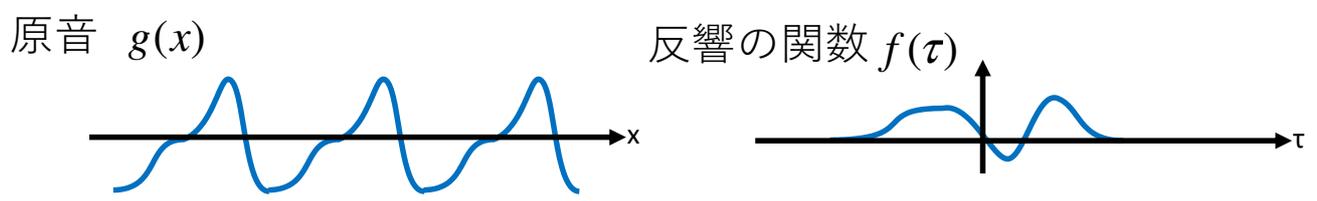
たしかに成立している



(復習) 原音と響きの定式化



「遅れ時間τに対して振幅がどれだけか」の反響の関数があるなら、



τだけ遅れた反響音成分は $f(\tau)g(x-\tau)$
遅れτに対応した反響の強さ τだけ遅れた原信号

これらがすべてのτで発生し、加算されるから、最終的な信号は

$$\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau$$

これを関数f(x)とg(x)のたたみ込み積分とよぶ



DFTの性質（４）たたみ込み

$$\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau \rightarrow$$

$$H_k =$$

=

=

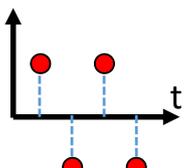
=

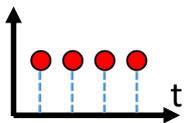
$$n'=n-i$$

よって時間領域の畳込みは、周波数領域では単なる積となる
 これまで繰り返し出てきた性質のDFT版



DFTの性質（４）たたみ込み（例）

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$


$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$


$$h(n) = \sum_{i=0}^{N-1} f(i)g(n-i)$$

$f(n) = [1 \ -1 \ 1 \ -1]$ と $g(n) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$ のたたみ込みは

$$h(0) = \quad = \quad = \quad =$$

$$h(1) = \quad = \quad = \quad =$$

$$h(2) = \quad = \quad = \quad =$$

$$h(3) = \quad = \quad = \quad =$$



DFTの性質 (4) たたみ込み (例: つづき)

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$f(n) = [1 \ -1 \ 1 \ -1]$ と $g(n) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$ のたたみ込みは $h(n) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$
 よってその離散フーリエ変換は当然, $H_k = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$

一方で, $H_k = F_k G_k$ から $H_k = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

よって, 確かに $f(n)$ と $g(n)$ のたたみ込みの結果をDFTして得られた結果と, F_k と G_k を直接掛け算して得られた結果は一致している.



DFTの性質 (5) パーセバルの等式

$$\sum_{k=0}^{N-1} \overline{F_k} G_k =$$

=

$$\text{ここで } \sum_{k=0}^{N-1} \exp(j \frac{2\pi}{N} k(m-n)) = \begin{cases} N & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{この式は先週の逆DFT} \\ \text{の導出時に導いた} \end{array} \right)$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{N-1} \overline{F_k} G_k =$$

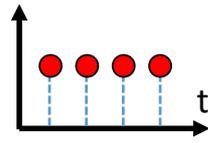
$f(n)=g(n)$ の時,

これはDFTでエネルギーが保存されることを意味する



DFTの性質 (5) パーセバルの等式 (例)

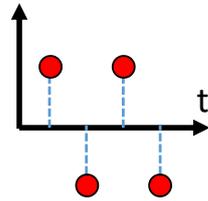
$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\sum_{n=0}^{N-1} |f(n)|^2 =$$

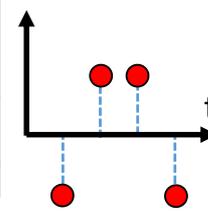
$$\sum_{k=0}^{N-1} |F_k|^2 =$$

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\sum_{k=0}^{N-1} |F_k|^2 =$$

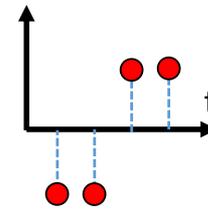
$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2-2j \\ 0 \\ -2+2j \end{bmatrix}$$



$$\sum_{k=0}^{N-1} |F_k|^2 =$$

=

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2+2j \\ 0 \\ -2-2j \end{bmatrix}$$



$$\sum_{k=0}^{N-1} |F_k|^2 =$$

=

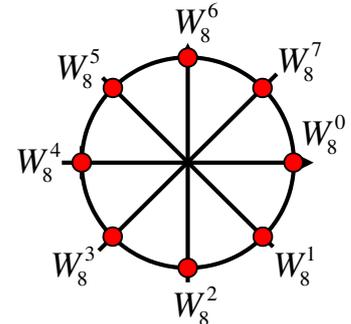


DFTの計算量

元データが8個の場合

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_8^{00} & W_8^{01} & W_8^{02} & W_8^{03} & W_8^{04} & W_8^{05} & W_8^{06} & W_8^{07} \\ W_8^{10} & W_8^{11} & W_8^{12} & W_8^{13} & W_8^{14} & W_8^{15} & W_8^{16} & W_8^{17} \\ W_8^{20} & W_8^{21} & W_8^{22} & W_8^{23} & W_8^{24} & W_8^{25} & W_8^{26} & W_8^{27} \\ W_8^{30} & W_8^{31} & W_8^{32} & W_8^{33} & W_8^{34} & W_8^{35} & W_8^{36} & W_8^{37} \\ W_8^{40} & W_8^{41} & W_8^{42} & W_8^{43} & W_8^{44} & W_8^{45} & W_8^{46} & W_8^{47} \\ W_8^{50} & W_8^{51} & W_8^{52} & W_8^{53} & W_8^{54} & W_8^{55} & W_8^{56} & W_8^{57} \\ W_8^{60} & W_8^{61} & W_8^{62} & W_8^{63} & W_8^{64} & W_8^{65} & W_8^{66} & W_8^{67} \\ W_8^{70} & W_8^{71} & W_8^{72} & W_8^{73} & W_8^{74} & W_8^{75} & W_8^{76} & W_8^{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \\ f(6) \\ f(7) \end{bmatrix}$$

$$W_N = \exp(-j \frac{2\pi}{N})$$



8x8行列と8x1ベクトルの演算なので、8x8=64回の乗算が発生。

40kHzでサンプリングされた1秒のデータ：40000個。

回の乗算

3GHzのCPUが1クロックで1回乗算できるとすると、

1600000000/3000000000 ≒ 0.5秒かかる。

10秒分のデータだと??



DFTの計算量を削減する

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) W_N^{kn} \quad W_N = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N}\right)$$

Nが偶数である場合を考える。k=2m、すなわち偶数番目の項は、

$$F_{2m} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f(n) W_N^{2mn} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} f(n) W_N^{2mn}$$

=

=

∵ W_N の周期性から

これは新たなN/2個の信号 $f(n) + f(n + \frac{N}{2})$ のフーリエ変換である。



DFTの計算量を削減する

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) W_N^{kn} \quad W_N = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N}\right)$$

k=2m+1、すなわち奇数番目の項は、

$$F_{2m+1} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f(n) W_N^{(2m+1)n} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} f(n) W_N^{(2m+1)n}$$

=

=

∵

=

∵ $W_N^{N/2} = -1$ から

これは新たなN/2個の信号 $f(n) - f(n + \frac{N}{2})$ のフーリエ変換である。



DFTの計算量を削減する

$$F_{2m} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(f(n) + f\left(n + \frac{N}{2}\right) \right) W_N^{2mn} \quad \text{N/2個の信号} f(n) + f\left(n + \frac{N}{2}\right) \text{のフーリエ変換}$$

$$F_{2m+1} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(f(n) - f\left(n + \frac{N}{2}\right) \right) W_N^{2mn} \quad \text{N/2個の信号} f(n) - f\left(n + \frac{N}{2}\right) \text{のフーリエ変換}$$

つまり、**N個**の信号のフーリエ変換（乗算が**N²**個必要）を、
2つの、**N/2個**の信号のフーリエ変換（乗算が**N²/2**個必要）に変換できた。

さらに**N/2個**の信号を、**N/4個**ずつに分割できれば。。。
さらにさらに**N/4個**の信号を、**N/8個**ずつに分割できれば。。。

このような**1/2**分割が最後までできるのは、データの個数が**2の階乗**である場合。

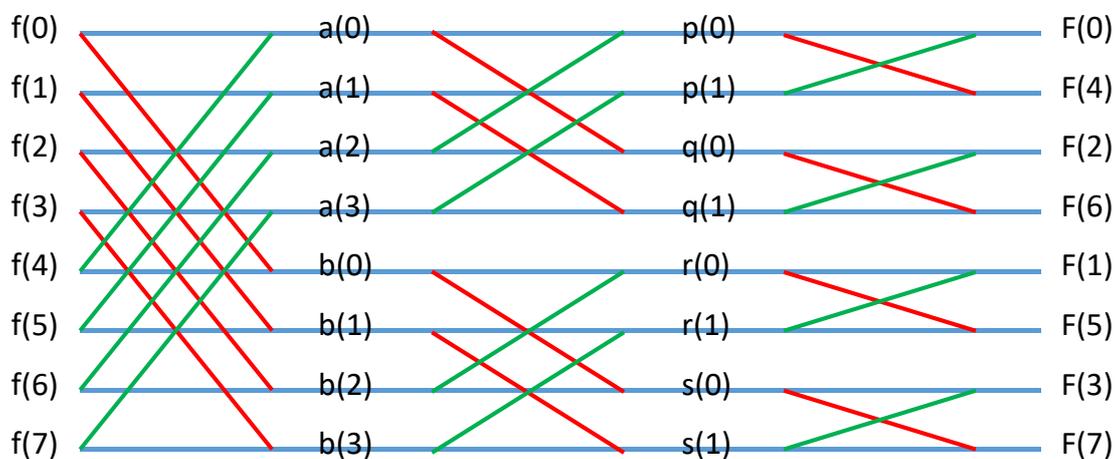
このように、**1/2**分割による計算量の削減を行う手法を
高速フーリエ変換、**FFT(Fast Fourier Transform)**と呼ぶ。



N=8の場合

$$F_{2m} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(f(n) + f\left(n + \frac{N}{2}\right) \right) W_N^{2mn} \quad \text{N/2個の信号} f(n) + f\left(n + \frac{N}{2}\right) \text{のフーリエ変換}$$

$$F_{2m+1} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(f(n) - f\left(n + \frac{N}{2}\right) \right) W_N^{2mn} \quad \text{N/2個の信号} f(n) - f\left(n + \frac{N}{2}\right) \text{のフーリエ変換}$$



これをフーリエ
変換するには



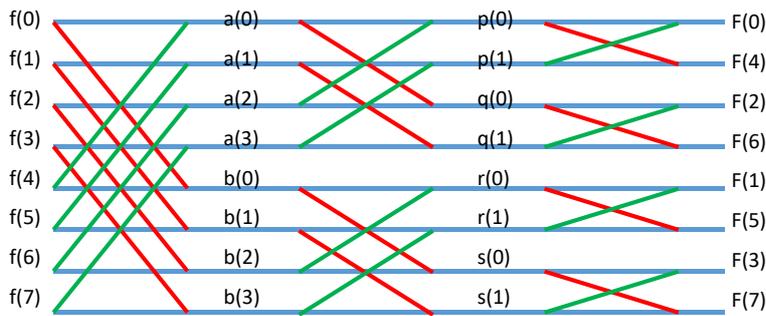
$a(0)=f(0)+f(4), \dots$
 $b(0)=f(0)-f(4), \dots$
をフーリエ変換すれば
よく、そのためには



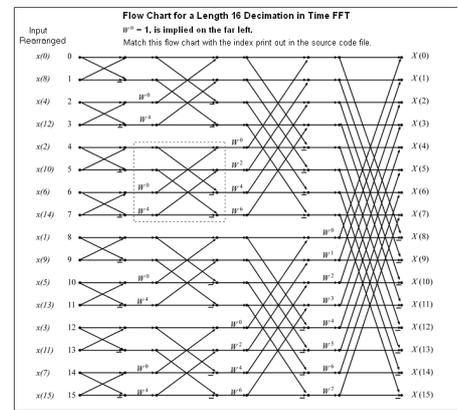
$p(0)=a(0)+a(2), \dots, q(0)=a(0)-a(2), \dots$
 $r(0)=b(0)+b(2), \dots, s(0)=b(0)-b(2), \dots$
をフーリエ変換すればよい。



バタフライ演算とFFT



書き方の流儀は色々



16点の例 Burns, C. Fast Fourier Transforms, Conexions Web site: <http://cnx.org/content/col10550/1.22/>
<http://iowahills.com/Example%20Code/FFTButterfly.html>



バタフライユニット：乗算回数は1回

全体の乗算回数はバタフライユニットの個数となる。

$O(n^2)$ の乗算回数が $O(n \log(n))$ に削減される（加減算も削減）

例えば1024点のデータの場合，約100万回→約5000回に削減(1/200)

例えば65536点のデータの場合，約40億回→約52万回に削減(1/10000)

バタフライ演算をするため，元データの個数は 2^N 個である必要。

現実的には0で埋めて数を揃える。



今日のまとめ

- DFTの性質をみた。これまでのフーリエ○○と同様の性質を確認した。
- DFTの計算量に関して見積もり，バタフライ演算によって劇的に低減されることを確認した（FFT）。

次回は離散フーリエ変換と信号処理



今日のレポート

(畳み込みの性質)

2つのベクトル $[-1, 1, 1, -1]$ と $[-1, -1, 1, 1]$ の畳み込みを求めて離散フーリエ変換を行い、その結果が確かに、それぞれのベクトルの離散フーリエ変換の掛け算になっていることを示せ

レポートは紙に書いたものを写真にとり、下記からアップロードする。
Googleアカウントによりアップロードするので、大学が提供しているアカウントを使用すること。画像ファイルは5MB以下に抑えること。

<https://forms.gle/YWvwdqxwYT1WsiDD9>

提出締め切り：講義日から一週間以内

