日程

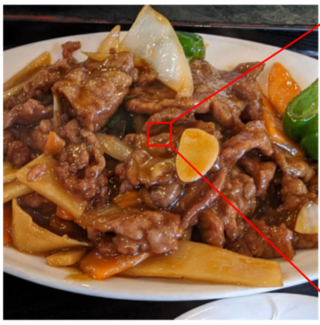
講義番号	講義日	講義内容
1	10/1	周期関数、フーリエ級数の定義
2	10/8	フーリエ級数の計算例
3	10/15	複素フーリエ級数、直交関数系
-	10/22	体育祭
4	10/29	周期関数のたたみこみ、パーセバルの等式
5	11/5	非周期関数、フーリエ変換の定義・計算例
6	11/12	フーリエ変換の性質
7	11/19	デルタ関数とフーリエ変換、たたみこみのフーリエ変換、パーセバルの等式
-	11/26	中間確認問題（自習）
8	12/3	離散時間信号と離散時間フーリエ変換（教科書外）
9	12/10	離散フーリエ変換（教科書外）
10	12/17	離散フーリエ変換の性質（教科書外）
11	1/7	サンプリング定理
12	1/14	ラプラス変換の定義と性質
13	1/21	線形常微分方程式のラプラス変換による解法
-	1/28	期末テスト準備（自習）
-	2/4	期末確認テスト（全範囲。現在は大学を予定）

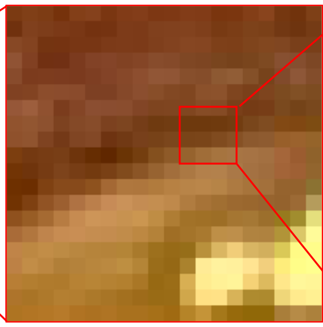
今日の目標

サンプリング定理を（大まかに）理解する

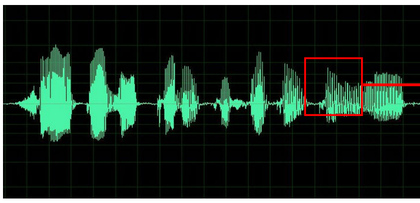
今日は総集編的にいろいろな復習が出てきます.

（復習）（ほとんど）すべての信号は離散的なデータとして扱われる





10	12	16	35	53	44
34	68	43	43	57	45
57	66	12	21	22	66
55	54	15	45	45	64
67	54	32	77	83	22
66	67	21	97	75	34



23,65,67,43,22,90,32,21,55,43

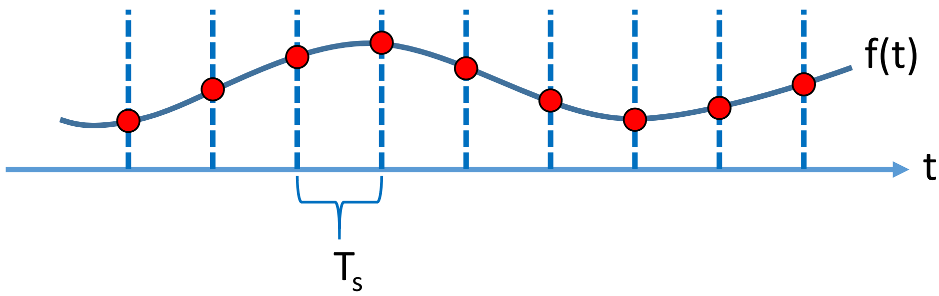
ディジタルコンピューティングの圧倒的進化による.

離散的：２つの意味.

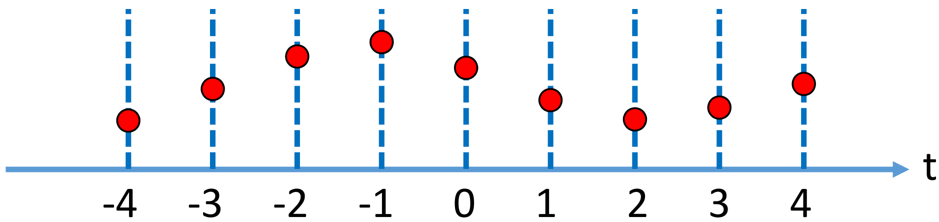
- 時間的，空間的な「サンプリング」が離散的
- データのビット数が決まっている（ex. 8bit:-128～127）

これから扱うのは特に**サンプリングが離散的な信号**.

（復習）サンプリング

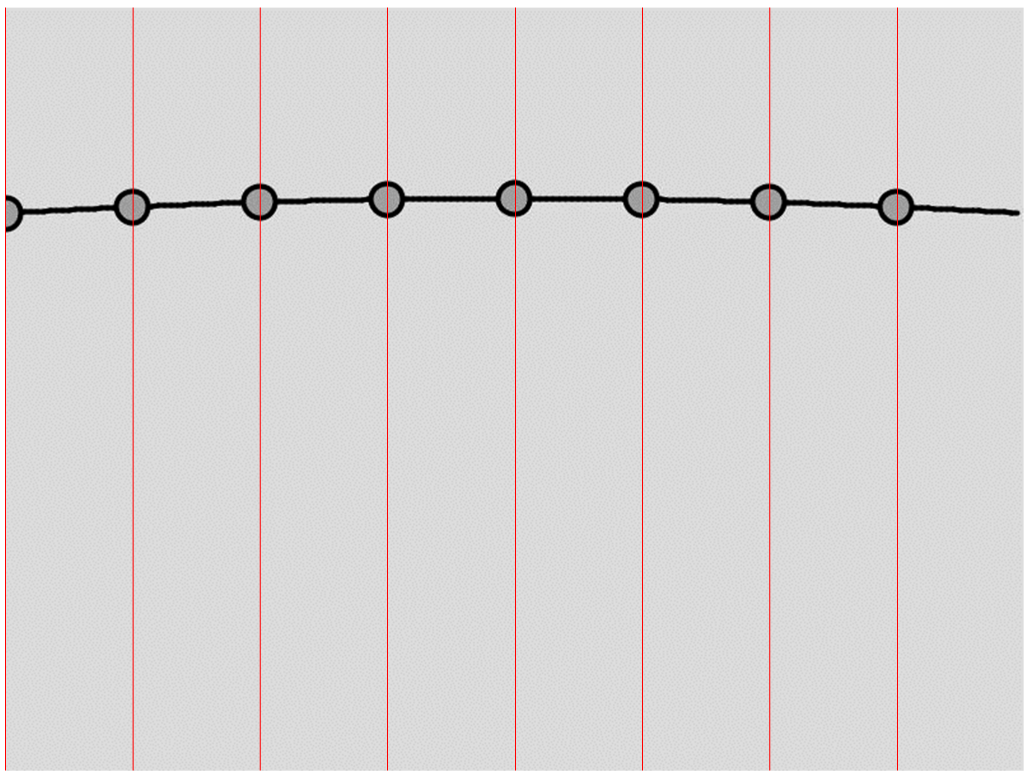


１次元データとしては時間信号が多いので今後tと表記.
一定周期T_s（サンプリング周期）で関数の値を取り出す.



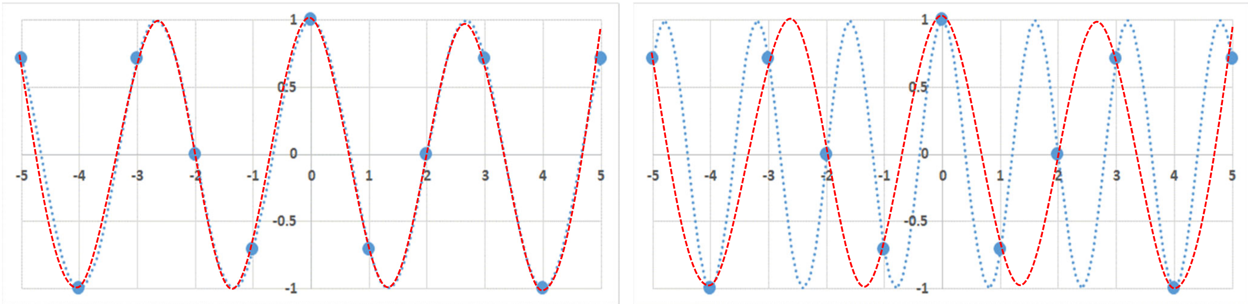
$f(-2T_s)$, $f(-1T_s)$, $f(0T_s)$, $f(1T_s)$, $f(2T_s)$, を取り出す.
時間を整数に正規化し，$f(-4)$, $f(-3)$, ..., $f(3)$, $f(4)$ と表記

（復習）動画



元の波形が正弦波の場合，サンプリングされたデータも正弦波となる
ただし元の波形の周波数が高い場合，サンプリングデータの周波数は元の周波数と一致しない.

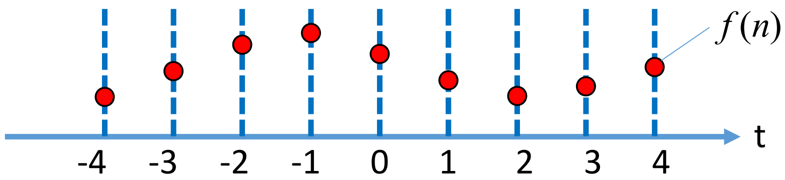
今日の疑問：サンプリングはどれだけ細かければ十分か



もとに戻せそう！　　　　あきらかに戻せない！

直感的に**元信号に含まれる周波数とサンプリング間隔で決まる？**
これを数式で明らかにする

（復習）サンプリングデータに対するフーリエ変換（DTFT）

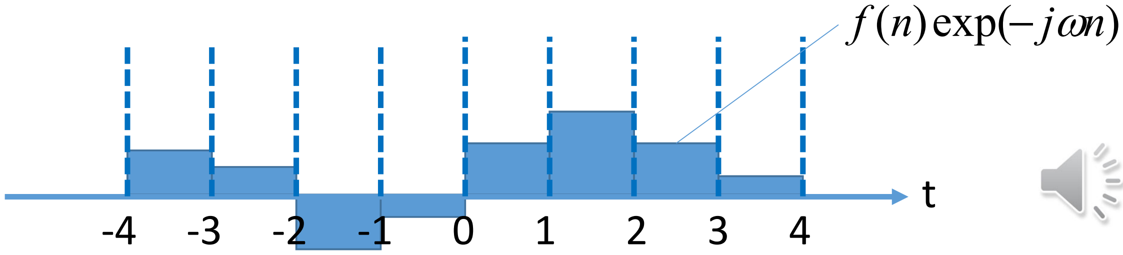


通常のフーリエ変換 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j\omega x)dx$

f(x)は離散的な場所でしか値を持たないとする．積分できないので近似的に，$f(x)\exp(-j\omega x)$ がn<x<n+1の間一定値として，

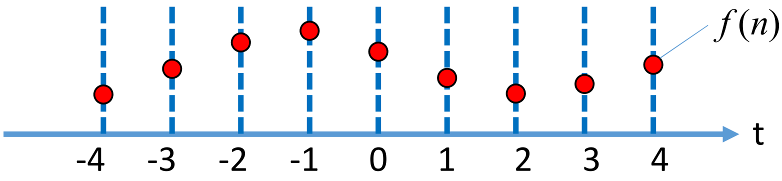
$$F(\omega)\approx\cdots+f(-2)\exp(-j\omega(-2))+f(-1)\exp(-j\omega(-1))$$
$$+f(0)\exp(-j\omega(0))+f(1)\exp(-j\omega(1))+f(2)\exp(-j\omega(2))+\cdots$$

$=$



（復習）離散時間フーリエ変換(DTFT)

離散信号f(n)に対して,



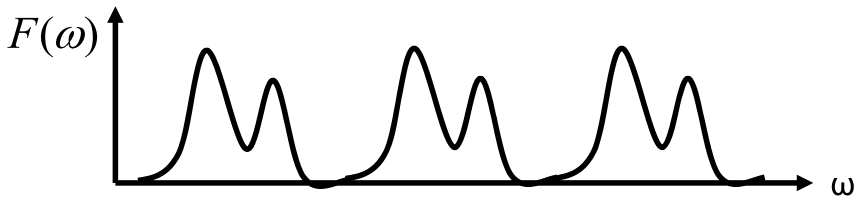
$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n)$$

を離散時間フーリエ変換(Discrete-Time Fourier Transform, DTFT)とよぶ.
（サンプリング間隔を1と設定）

連続性： $F(\omega)$ はωの連続な関数である.

周期性： $F(\omega)$ はωの周期的な関数であり，その基本周期は2πである.

$\because F(\omega+2\pi)=$ ＝



離散時間フーリエ変換を観察する

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n)$$

＝

∵デルタ関数による積分は値を取り出すことに相当

＝

これは，二つの関数 $f_O(t)$ と $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n)$ の積をフーリエ変換した，とみなせる
（oは元の関数という意味）

この計算はどうやれば良いか？→二つの関数の積のフーリエ変換は？

（復習）フーリエ変換同士のたたみ込み積分

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\tau)G(\omega-\tau)d\tau$$ を逆フーリエ変換する．

$h(t)=$

$=$

$=$

$=$

$=$

$$\therefore\frac{1}{2\pi}h(t)=f(x)g(x)$$

（復習）フーリエ変換同士のたたみ込み積分

元関数f,g,hが乗算の関係のとき，フーリエ変換F,G,Hは「たたみ込み積分」の関係

$$\frac{1}{2\pi}h(t)=f(x)g(x)$$

のとき，

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\tau)G(\omega-\tau)d\tau$$

さきほどの式を見直すと，

$$F(\omega)=\int_{t=-\infty}^{\infty}f_o(t)\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n)\right\}\exp(-j\omega t)dt$$

上式の $f(x)$　上式の $g(x)$

この式の右辺は，$f(x)g(x)=\dfrac{1}{2\pi}h(t)$ をフーリエ変換したものだから，

上式の $\dfrac{1}{2\pi}H(\omega)$ に相当するはず！

離散時間フーリエ変換を見直す

$$F(\omega)=\int_{t=-\infty}^{\infty} \underbrace{\underbrace{f_o(t)}_{\text{右式の}f(x)}\underbrace{\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n)\right\}}_{\text{右式の}g(x)}}_{\text{右式の}\frac{1}{2\pi}h(t)}\exp(-j\omega t)dt$$

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{1}{2\pi}h(t)=f(x)g(x)\\ \text{のとき,}\\ H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\tau)G(\omega-\tau)d\tau\end{gathered}}$$

$f_o(x)$ のフーリエ変換を $F_o(\omega)$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n)$ のフーリエ変換を $G(\omega)$ とすれば,

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}H(\omega)=$$

DTFT

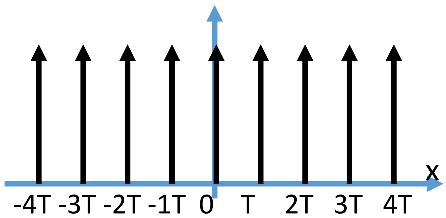
元関数のフーリエ変換

くし形関数のフーリエ変換

つまり，DTFTは，元関数のフーリエ変換結果Foに対して，
くし形関数のフーリエ変換を畳み込み積分したものになる

（復習）くし形関数のフーリエ変換

$$\delta_T(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nT)$$



くし形(comb)関数とよぶ．デジタル信号処理に重要．

このフーリエ変換も，くし形関数になる（証明はすでにやったので省略）

$$\delta_T(x)\xrightarrow{Fourier}\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2n\pi}{T})$$

サンプリング間隔が１のときは,

離散時間フーリエ変換とフーリエ変換の関係

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_o(\tau)G(\omega-\tau)d\tau \qquad G(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2n\pi)$$

DTFT結果　元関数のフーリエ　くし形関数のフーリエ

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_o(\tau)G(\omega-\tau)d\tau$$

$=$

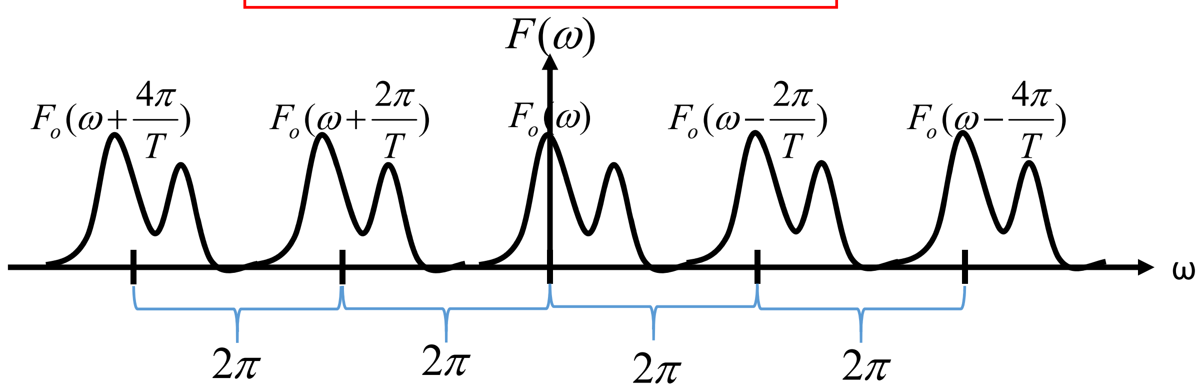
$=$

$=$　　∵デルタ関数の性質

つまり，**離散時間フーリエ変換は，元関数のフーリエ変換を重ね合わせたものになる．**

離散時間フーリエ変換とフーリエ変換の関係

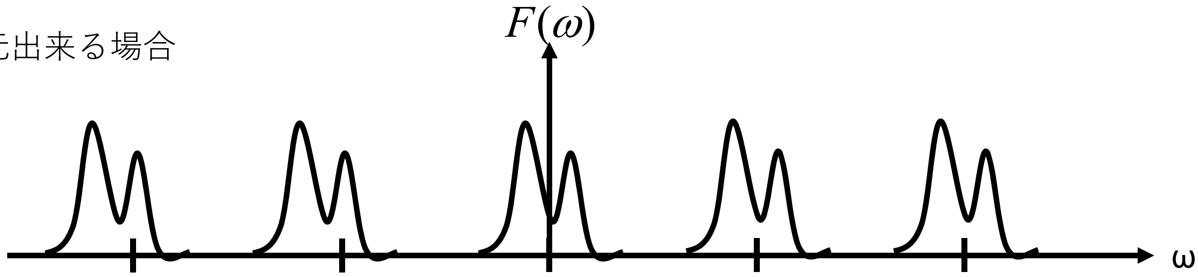
$$\boxed{F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_o(\omega-2\pi n)}$$



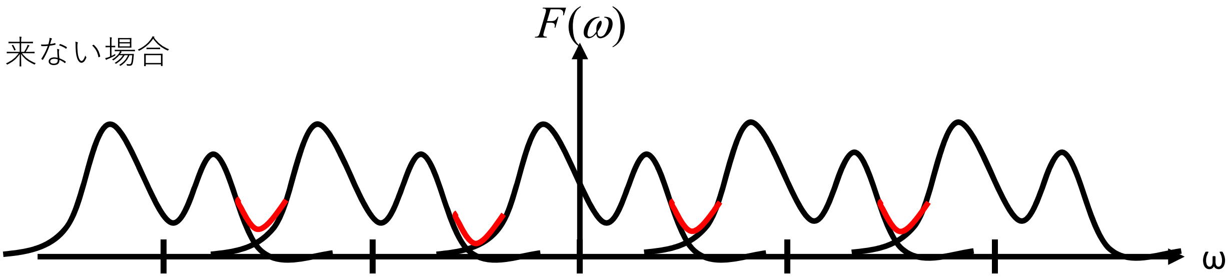
つまり，元関数のフーリエ変換を角周波数2π ずつずらして重ね合わせたものになる．
（ただしサンプリング間隔を１とした）

復元可能性

・復元出来る場合



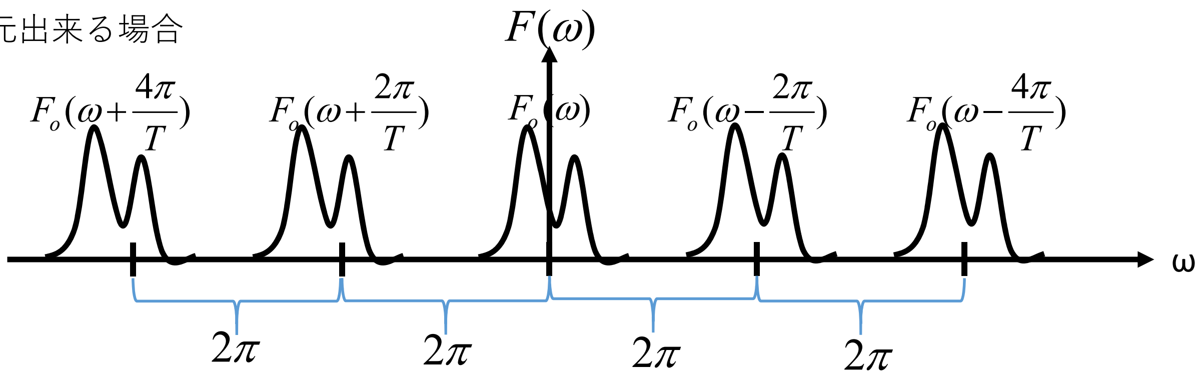
・出来ない場合



- もとの関数の周波数成分が，角周波数 2π ずつずらした重ね合わせによって「重なり合わない」なら，元関数の情報は維持されているから復元できる．
- 逆に，重なり合ってしまうなら，復元できない

復元可能性

・復元出来る場合



元関数の周波数成分が，角周波数 2π ずつずらした重ね合わせで「重なり合わない」＝
元関数の周波数成分が，$-\pi \sim \pi$　の範囲の成分しか持たない

これまでの議論では，サンプリング間隔＝１と置いてきた．つまりサンプリング角周波数は2πだった．

つまり，

元信号に含まれる周波数成分が，サンプリング周波数の半分未満であれば，
サンプリングされた数値列から元信号が復元が可能である

サンプリング定理

サンプリング定理

関数 $f_o(t)$ が帯域制限信号であるとする．すなわち $F_o(\omega)=0 \quad (|\omega|>\omega_1)$

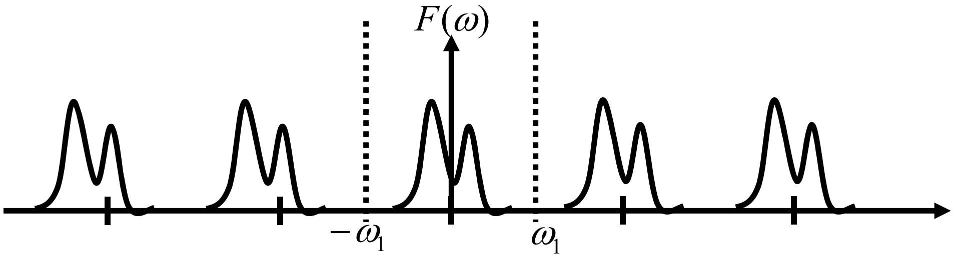
ここで，サンプリング間隔 $T<\dfrac{\pi}{\omega_1}$ ならば，サンプリング値 $f(nT)$

によって，元の関数$f_o(t)$ を完全に決定することが出来る．

サンプリング間隔の条件 $T<\dfrac{\pi}{\omega_1}$ を**ナイキスト条件**と呼ぶ．

この時の限界の周波数 $\dfrac{\omega_1}{2\pi}$ を**ナイキスト周波数**と呼ぶ．

このサンプリング定理は現代情報社会の根幹を支えるもの．



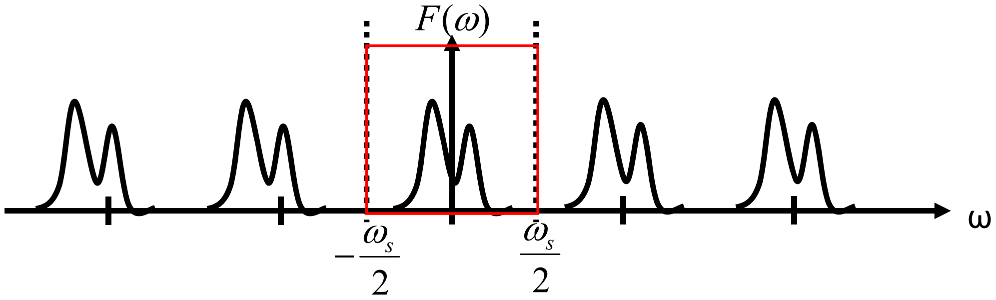
サンプリング定理の例

- 人間の可聴域は20kHzまで
  →音楽CDのサンプリング周波数は44.1kHz
- 人間の音声は7kHzくらいまで．明瞭に内容がわかるのは4kHzくらいまで
  →電話のサンプリング周波数は8kHz

あらかじめ原信号にローパスフィルタを掛け，帯域を制限しておくことが必須

復元の方法

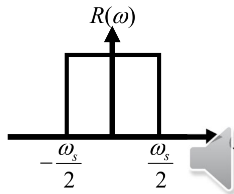
$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_o(\omega-2\pi n)$$



サンプリング定理の意味するところ：この繰り返し周波数信号 $F(\omega)$ の**一つだけを切り出せば**，それがもとの $F_o(\omega)$ であり，逆フーリエ変換でもとの信号に戻るはず．

$$F_o(\omega)=F(\omega)\cdot R(\omega)\quad R(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\dfrac{\omega_s}{2}\\ 0 & |\omega|>\dfrac{\omega_s}{2}\end{cases}$$

：単発矩形波



ω_s はサンプリング角周波数で $T=\dfrac{2\pi}{\omega_s}$

（復習）たたみ込み積分のフーリエ変換

$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(x-\tau)d\tau$ をフーリエ変換する．

$H(\omega)=$

$=$

$=$

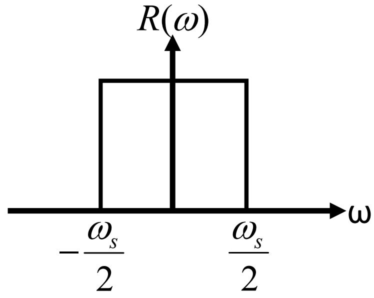
$=$

$=$

よって，　$H(\omega)=F(\omega)G(\omega)$ となり，たたみ込み積分のフーリエ変換は元の関数のフーリエ変換同士の掛け算になる．

単発矩形波の逆フーリエ変換

$$R(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\dfrac{\omega_s}{2}\\ 0 & |\omega|>\dfrac{\omega_s}{2}\end{cases}$$

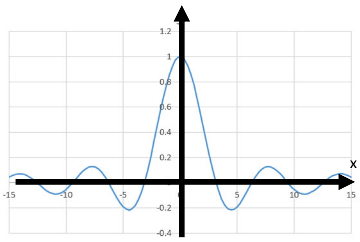


$$r(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R(\omega)\exp(j\omega x)d\omega$$

$=$ $\qquad\qquad =$

$=$

$=$ $\qquad\qquad =$ $\qquad\qquad \because T=\dfrac{2\pi}{\omega_s}$



フーリエ変換の場合と同様Sinc関数となる． x=0の場合の扱いは省略

復元の方法

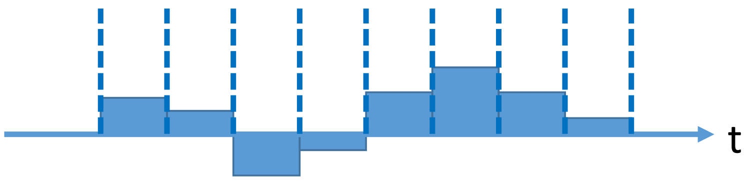
$$F_o(\omega)=F(\omega)\cdot R(\omega) \qquad R(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\dfrac{\omega_s}{2}\\ 0 & |\omega|>\dfrac{\omega_s}{2}\end{cases}$$

両辺を逆フーリエ変換する→たたみ込み！

$$f_o(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)r(t-\tau)d\tau=$$

f(x)は離散的な場所でしか値を持たない．近似的に，nT<x<(n+1)Tの間一定として，

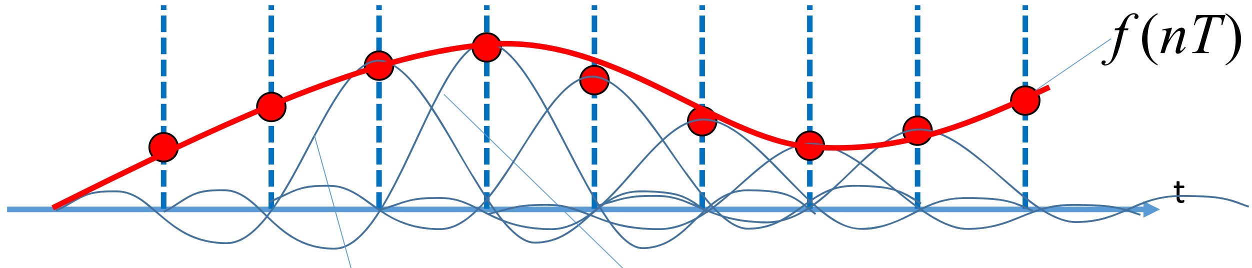
$=$ $\qquad\qquad\qquad =$



復元の意味：sinc関数の重ね合わせ

$$\boxed{f_o(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\frac{\sin(\pi(\frac{t}{T}-n))}{\pi(\frac{t}{T}-n)}}$$

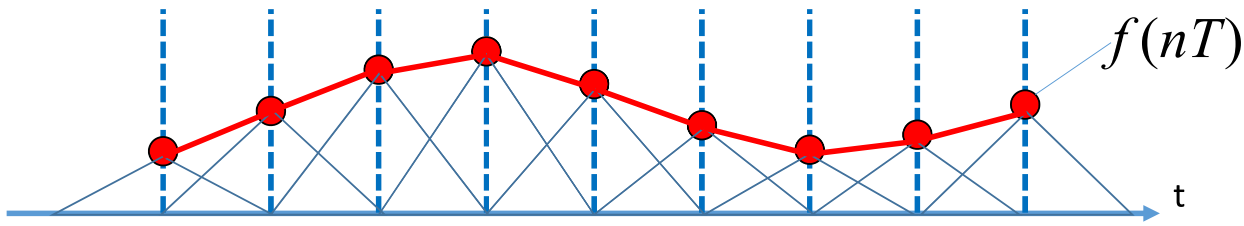
復元の公式



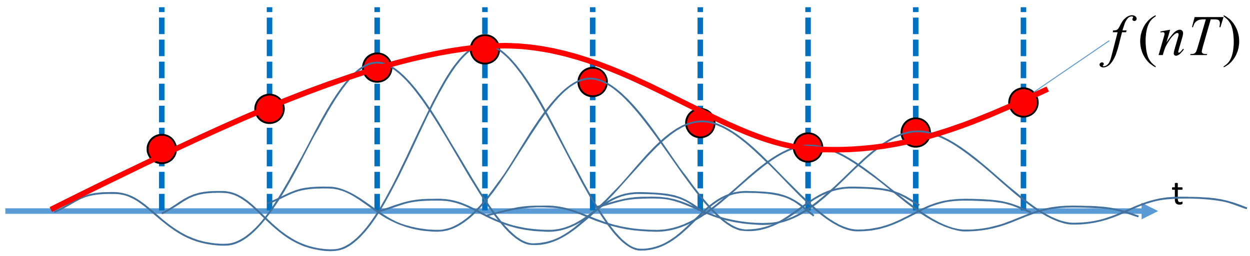
$$f(0)\frac{\sin(\pi(\frac{t}{T}))}{\pi(\frac{t}{T})} \qquad f(1T)\frac{\sin(\pi(\frac{t}{T}-1))}{\pi(\frac{t}{T}-1)}$$

Sinc関数をサンプリング間隔ずつずらしながら，サンプリング点で重ね合わせていくことで元の関数が復元できる

単発三角波の重ね合わせとの比較で理解する

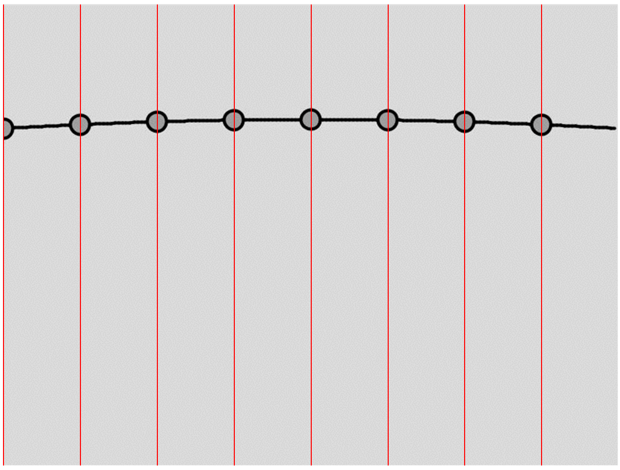


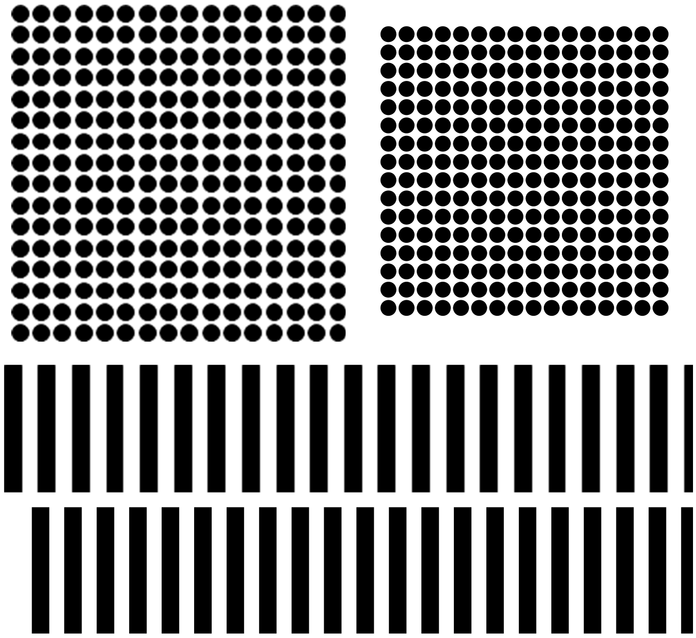
- **各サンプリング点でf(nT)の高さを持ち，隣のサンプリング点で０になる**ような**単発三角波**を重ね合わせれば，連続につなげることが出来る（線形補間）



- Sinc関数による重ね合わせも，「**各サンプリング点でf(nT)の高さを持ち，隣のサンプリング点で０になる**」という性質をもっており，連続かつなめらかにつながる．

エリアシング現象

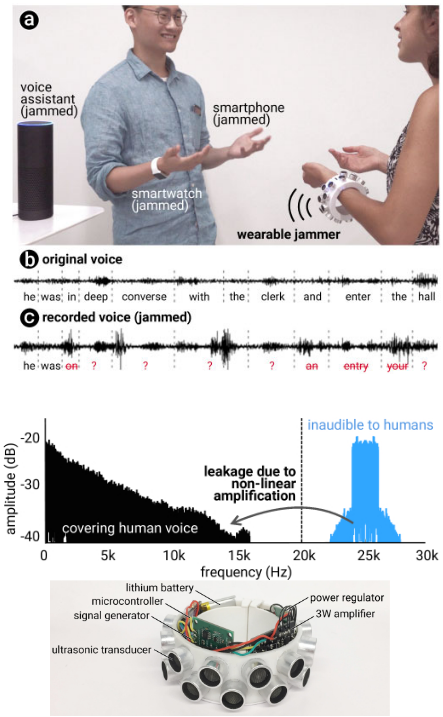




元の波形の周波数が高い場合，サンプリングデータの周波数は元の周波数と一致しない.
これを**エリアリング現象**と呼ぶ

少し空間周波数の異なる縞同士を重ねると，本来とは異なる周波数が出現する
縞の隙間から離散的に観察するので，サンプリングと同義であり，エリアシング現象が生じている。

大学院講義（インタラクティブシステム特論）より
(CHI2020) Wearable Microphone Jamming
Yuxin Chen;Huiying Li;Shan-Yuan Teng;Steven Nagels;Zhijing Li;Pedro Lopes;Ben Y. Zhao;Haitao Zheng



- https://www.youtube.com/watch?v=qogp8b52uOg
- ギリギリ非可聴の超音波を流す。サンプリングによって周波数が折り返され、可聴域信号として記録される（エリアシング）。これによって音声の記録を妨害する。

今日のまとめ

- サンプリング定理の概要を理解した.

次回からラプラス変換

今日のレポート

モワレ縞は、近い空間周波数の縞を重ね合わせた時、片方の縞によってもう片方が「サンプリング」されることによって生じるエリアシング現象である。
身の回りでこのモワレ縞を発見し、撮影すること。例として下の写真を参照。

Moire pattern (Wikipedia)
https://en.wikipedia.org/wiki/Moir%C3%A9_pattern

レポートは下記からアップロードする。**今回のレポートは梶本がGoogle Class内で共有する場合があるのでプライバシーに配慮すること。**
Googleアカウントによりアップロードするので、大学が提供しているアカウントを使用すること。画像ファイルは5MB以下に抑えること。

https://forms.gle/tovLwBV1eauiuoAVA

提出締め切り：講義日から一週間以内