



応用数学第一

第十二回

梶本裕之



日程

講義番号	講義日	講義内容
1	10/1	周期関数、フーリエ級数の定義
2	10/8	フーリエ級数の計算例
3	10/15	複素フーリエ級数、直交関数系
-	10/22	体育祭
4	10/29	周期関数のたたみこみ、パーセバルの等式
5	11/5	非周期関数、フーリエ変換の定義・計算例
6	11/12	フーリエ変換の性質
7	11/19	デルタ関数とフーリエ変換、たたみこみのフーリエ変換、パーセバルの等式
-	11/26	中間確認問題（自習）
8	12/3	離散時間信号と離散時間フーリエ変換（教科書外）
9	12/10	離散フーリエ変換（教科書外）
10	12/17	離散フーリエ変換の性質（教科書外）
11	1/7	サンプリング定理
12	1/14	ラプラス変換の定義と性質
13	1/21	線形常微分方程式のラプラス変換による解法
-	1/28	期末テスト準備（自習）
-	2/4	期末確認テスト（全範囲。現在は大学を予定）



今日の目標

ラプラス変換を定義する
ラプラス変換の性質を知る



(復習) フーリエ変換

ある関数 $f(x)$ に対して,

- ω (周波数) の関数に変換する操作 :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-j\omega x) dx$$

これを**フーリエ変換**という.
 ω の連続関数を返す

- 元の関数に戻す操作 :

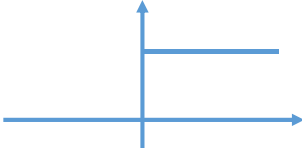
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega x) d\omega$$

これを**逆フーリエ変換**という
(フーリエ逆変換とも)



フーリエ変換で扱えない関数

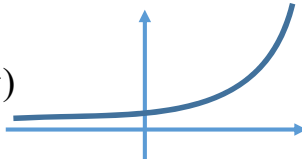
- 入力 $f(t)$ がフーリエ変換出来ない状況が **普通に** 存在する

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t \end{cases}$$


$$\int_{t=-\infty}^{\infty} F(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_{t=0}^{\infty} 1 \exp(-j\omega t) dt$$

$$= \left[\frac{\exp(-j\omega t)}{-j\omega} \right]_0^{\infty}$$


$$= \frac{1 - \exp(-j\omega\infty)}{j\omega} \quad ? \quad ?$$

$$f(t) = \exp(at)$$


$$\int_{t=-\infty}^{\infty} F(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_{t=0}^{\infty} \exp(at) \exp(-j\omega t) dt$$

$$= \dots$$

無限遠で収束しない関数は、積分をうまく処理できない（絶対可積分の条件）
 一部は**デルタ関数**の導入で処理できる（ $f(t)=1$ など）が、
 $\exp(at)$ のように急速に大きくなるような関数はやはり無理。
 しかし **$\exp(at)$ は微分方程式の解で頻出する大切な関数。**

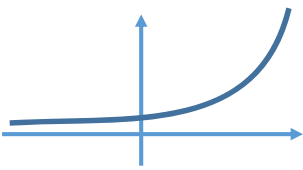


拡張しよう

動機：収束しない関数（例： $\exp(at)$ ）も変換したい

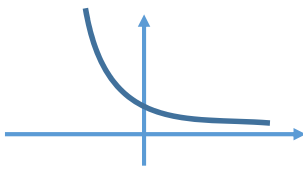
アイデア：

1. $\exp(-ct)$ という、急速に小さくなる関数を掛けて「抑える」
2. $t > 0$ のみで考えて、 $t < 0$ で非常に大きくなる問題を避ける



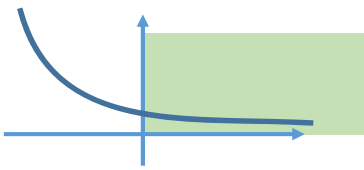
$f(t) = \exp(at)$

×



$\exp(-ct)$

=



$\exp((a-c)t)$
ただし $a < c$

$a < c$ なら、 $\exp((a-c)t)$ は $t > 0$ では収束し、普通にフーリエ変換できる。

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-ct) \exp(-j\omega t) dt$$



複素変数sの導入

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-ct) \exp(-j\omega t) dt$$

=

=

$c+j\omega$ を一つの複素変数sとみなす

$$F(s) =$$



$\exp(-st)$

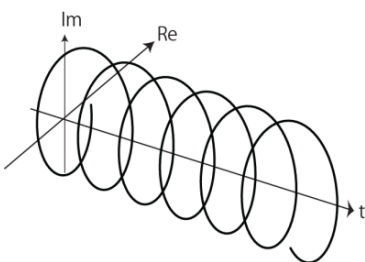
$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

実質的には2変数の関数

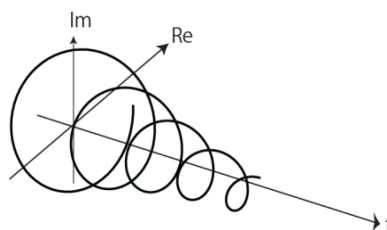
$$\begin{aligned} \exp(-st) &= \exp(-(c+j\omega)t) \\ &= \underline{\exp(-ct)} \times \underline{\exp(-j\omega t)} \end{aligned}$$

増大or減衰成分 回転成分

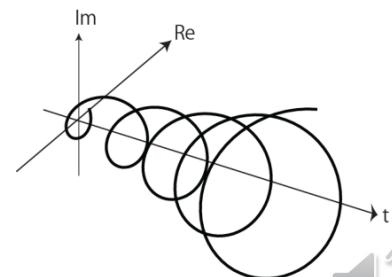
● $c=0$



● $c > 0$



● $c < 0$



cについては、変換が収束する範囲に設定されるものとする



フーリエ変換の拡張としてのラプラス変換

フーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$$


ラプラス変換

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

- 純虚数 $j\omega \Rightarrow$ 複素数 s に拡張
- 積分範囲は無限の過去を扱わず0から。つまり初期値 $f(0)$ があるものとする



ラプラス変換の例：ステップ関数

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t \end{cases}$$


フーリエ変換ではデルタ関数を入れられない限り扱えなかった関数

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

=

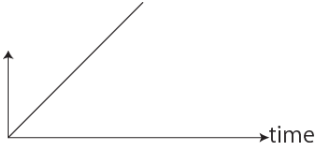
=

=

ただし積分が収束する s の範囲は、 $\text{Re}(s) > 0$



ラプラス変換の例：ランプ関数

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t \end{cases}$$


フーリエ変換ではデルタ関数を入れられない限り扱えなかった関数

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

=

=

=

=

ただし積分が収束するsの範囲は, $\text{Re}(s) > 0$



ラプラス変換の例：sin

$$f(t) = \sin(\omega t)$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

=

=

=

=

=

=

ただし積分が収束するsの範囲は, $\text{Re}(s) > 0$



ラプラス変換の例：cos

$$f(t) = \cos(\omega t)$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

=

=

=

=

=

=

ただし積分が収束するsの範囲は, $\text{Re}(s) > 0$



ラプラス変換の例：exp関数

$$f(t) = \exp(at)$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

=

=

=

ただし積分が収束するsの範囲は, $\text{Re}(s-a) > 0$



ラプラス変換の例：微分

$f(t)$ のラプラス変換が分かっているとき、 $\dot{f}(t)$ のラプラス変換は？

$$L(\dot{f}(t)) = \int_0^{\infty} \dot{f}(t) \exp(-st) dt$$

=

=

=

ラプラス変換の積分範囲は0からではなく、0+から
(微分不可能点を避ける)

(ルール) ラプラス変換では、微分はsをかけてf(0)を引く



ラプラス変換の例：積分

$f(t)$ のラプラス変換が分かっているとき、 $\int_{t=0}^t f(t) dt$ のラプラス変換は？

$$L\left(\int_{t=0}^t f(t) dt\right) = \int_0^{\infty} \left(\int_{t=0}^t f(t) dt\right) \exp(-st) dt$$

=

=

=

(ルール) ラプラス変換では、積分は1/sをかけることに相当



sin と cos のラプラス変換を見比べる(1/2)

$$\sin(\omega t) \longrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\cos(\omega t) \longrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

(ルール) ラプラス変換では、微分はsをかけてf(0)を引く

$$\frac{d}{dt} \sin(\omega t) = \omega \cos(\omega t)$$

ルールより、 $\cos(\omega t)$ のラプラス変換を求めるには、 $\sin(\omega t)$ のラプラス変換にsをかけ、 ω で割ればよい($\sin(0)=0$ より)

... 確かにそうになっている



sin と cos のラプラス変換を見比べる(2/2)

$$\sin(\omega t) \longrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\cos(\omega t) \longrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

(ルール) ラプラス変換では、微分はsをかけてf(0)を引く

$$\frac{d}{dt} \cos(\omega t) = -\omega \sin(\omega t)$$

ルールより、 $\sin(\omega t)$ のラプラス変換を求めるには、 $\cos(\omega t)$ のラプラス変換にsをかけ、f(0)を引き、 $-\omega$ で割れば良い

... 確かにそうになっている



ラプラス変換の例：時間遅れ

$f(t)$ のラプラス変換が分かっているとき、 $f(t - \tau)$ のラプラス変換は？

ただし $\tau \geq 0$ (時間遅れ) とし、 $t < \tau$ の範囲では $f(t) = 0$ とする。

$$L(f(t - \tau)) = \int_0^{\infty} f(t - \tau) \exp(-st) dt$$

=

$t' = t - \tau$

=

$t < \tau$ の範囲で $f(t) = 0$ より
 $t' = t - \tau < 0$ の範囲で $f(t') = 0$

=

教科書によっては $u(t - \tau)f(t - \tau)$ (u はステップ関数)

(ルール)

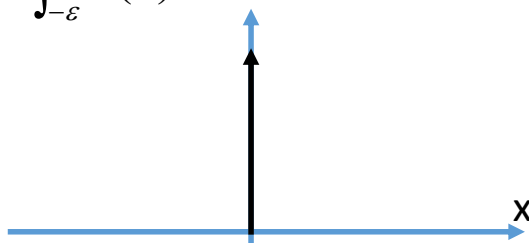
ラプラス変換では、 τ の時間遅れは $\exp(-s\tau)$ をかけることに相当
 ただし $t < \tau$ の範囲で $f(t) = 0$ という前提。

ラプラス変換の例：デルタ関数

(復習) 元々のデルタ関数の定義：全面積が $x=0$ に集中した仮想的な関数

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad \text{全面積が 1}$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) dx = 1 \quad \varepsilon : \text{任意正数. つまりどれだけ } \varepsilon \text{ を小さくしても 1}$$



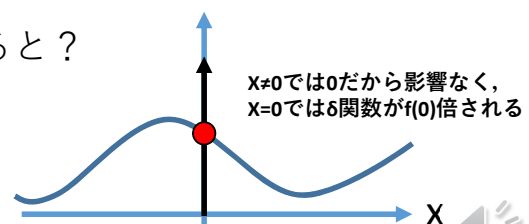
原点で ∞ という意味で、矢印で表記。



幅が無限に狭く、高さが無限に高くなった矩形波という理解が可能

デルタ関数と、一般の関数 $f(x)$ の積を積分すると？

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx =$$



$x \neq 0$ では 0 だから影響なく、
 $x = 0$ では δ 関数が $f(0)$ 倍される

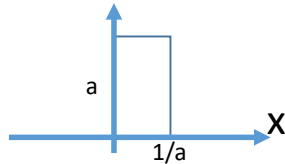
つまりデルタ関数は、積分操作によって $f(0)$ の値を「取り出す」関数である

ラプラス変換の例：デルタ関数

ラプラス変換では関数の定義域が違うので、少し変化させる。

$$\int_0^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad \text{全面積が1}$$

$$\int_0^{\varepsilon} \delta(x) dx = 1 \quad \varepsilon: \text{任意正数. つまりどれだけ}\varepsilon\text{を小さくしても1}$$



理解のためのモデル関数. $a \rightarrow \infty$

デルタ関数と、一般の関数 $f(x)$ の積の積分： $\int_0^{\infty} \delta(x) f(x) dx =$

やはりデルタ関数は、積分操作によって $f(0)$ の値を「取り出す」

デルタ関数のラプラス変換： $\int_0^{\infty} \delta(t) \exp(-st) dt =$ =

やはりデルタ関数のラプラス変換は1



ラプラス変換表

$$1 \rightarrow \frac{1}{s}$$

$$\exp(at) \rightarrow \frac{1}{s-a}$$

$$t \rightarrow \frac{1}{s^2}$$

$$t \exp(at) \rightarrow \left(\frac{1}{s-a}\right)^2$$

$$t^n \rightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$f'(t) \rightarrow sF(s) - f(0)$$

$$\sin(\omega t) \rightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\int_{t=0}^t f(t) dt \rightarrow \frac{1}{s} F(s)$$

$$\cos(\omega t) \rightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

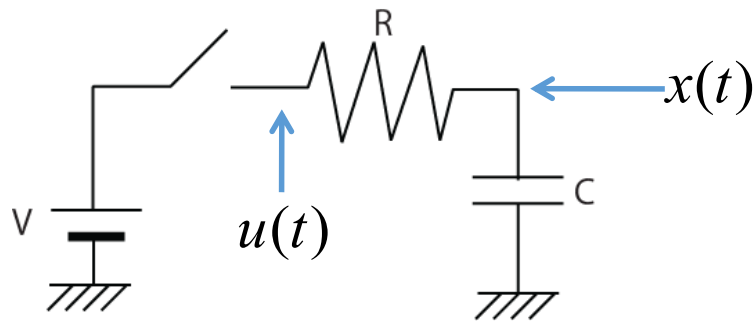
$$f(t - \tau) \rightarrow \exp(-s\tau) F(s)$$

$$\delta(t) \rightarrow 1$$

通常逆ラプラス変換は、表を見て逆引きで行う



ラプラス／逆ラプラス変換実例

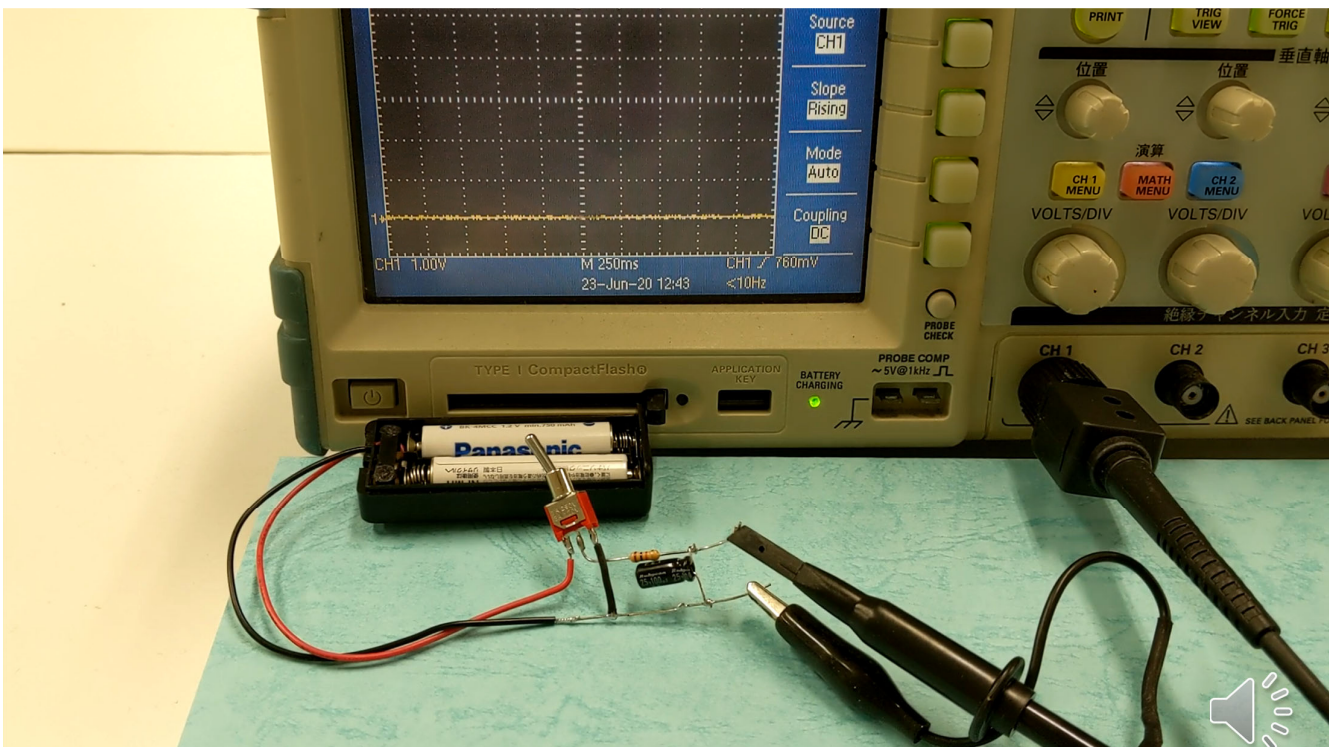
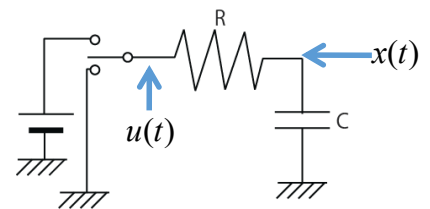


- 入力：抵抗Rの左側の電圧 $u(t)$.
- 出力：コンデンサの電圧 $x(t)$.

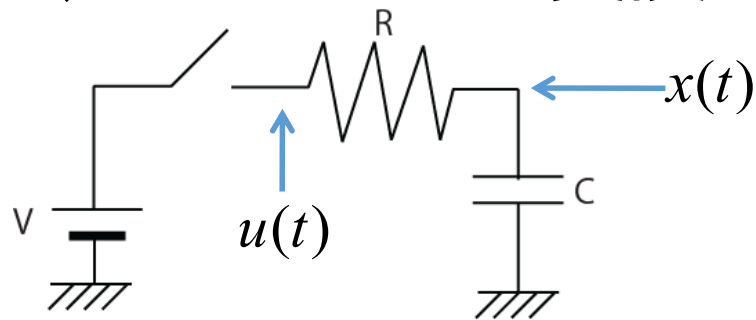
(問題) スイッチを入れた後の $x(t)$ の変化を調べよ



ローパスフィルタ実験 (3年インタラクティブシステム論より)



ラプラス／逆ラプラス変換実例



●電流*I*を考えて,

$$u =$$

$$x =$$

$$I =$$

$$u =$$

● *x* のラプラス変換を *X*,

● *u* のラプラス変換を *U* とすると,

$$U =$$

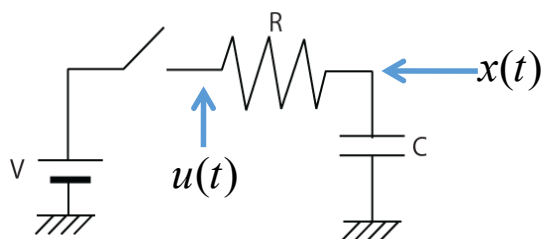
(∴ (ルール) 微分⇒*s*をかける)

$$=$$

$$X =$$



ラプラス／逆ラプラス変換実例



$$X =$$

$$=$$

$$=$$

$$X = \frac{1}{sRC + 1} U$$

部分分数展開

$$a = RC$$

$$b = -RC$$

t=0でスイッチを入れるから

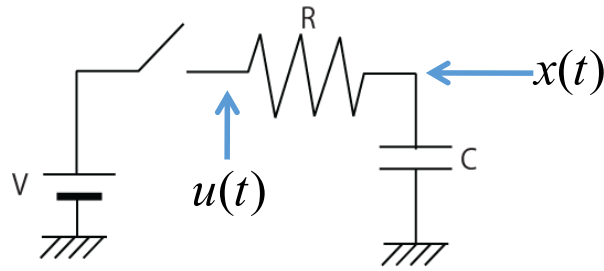
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V & 0 \leq t \end{cases}$$

$$X =$$

$$U(s) =$$



ラプラス／逆ラプラス変換実例



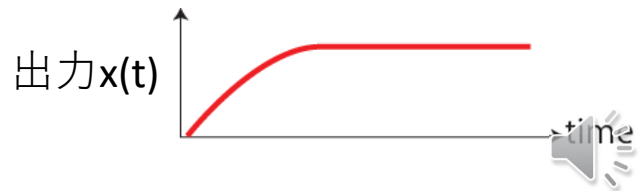
$$X = V \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right)$$



ラプラス変換表を見て逆変換する

$$x(t) =$$

定常成分 過渡成分



今日のまとめ

- ラプラス変換を導入した.
- ラプラス変換の次のような性質を知った.
 - 微分に対するラプラス変換
 - 積分に対するラプラス変換
 - 時間遅れ関数に対するラプラス変換
 - デルタ関数に対するラプラス変換
- ラプラス変換の実例としてRC回路の電圧の変化を見た

次回はラプラス変換と微分方程式



今日のレポート

1. $t \exp(at)$ のラプラス変換に関する公式を導け。
2. 積分のラプラス変換に関する公式を用いて、 \sin 関数のラプラス変換から、 \cos 関数のラプラス変換を導け。

レポートは紙に書いたものを写真にとり、下記からアップロードする。
Googleアカウントによりアップロードするので、大学が提供しているアカウントを使用すること。画像ファイルは5MB以下に抑えること。

<https://forms.gle/tovLwBV1eaiuoAVA>

提出締め切り：講義日から一週間以内

