日程

講義番号	講義日	講義内容	pdf	video	レポート締め切り
1	10/7	周期関数、フーリエ級数の定義	[pdf](2020年版)	video	10/14
2	10/14	フーリエ級数の計算例	[pdf](2020年版)	video	10/21
-	10/21	体育祭			
3	10/28	複素フーリエ級数、直交関数系	[pdf](2020年版)	video	11/4
4	11/4	周期関数のたたみこみ、パーセバルの等式	[pdf](2020年版)	video	11/11
5	11/11	非周期関数、フーリエ変換の定義・計算例	[pdf](2020年版)	video	11/18
6	11/18	フーリエ変換の性質	[pdf]	video	11/25
7	11/25	デルタ関数とフーリエ変換、たたみこみのフーリエ変換、パーセバルの等式	[pdf](2020年版)	video	12/2
-		中間確認テスト用問題集	[pdf](2020年版)		
-	12/2	中間確認テスト（前半。現在は大学を予定）			
8	12/9	離散時間信号と離散時間フーリエ変換（教科書外）	[pdf](2020年版)	video	12/16
9	12/16	離散フーリエ変換（教科書外）	[pdf](2020年版)	video	12/23
10	12/23	離散フーリエ変換の性質（教科書外）	[pdf](2020年版)	video	1/6
11	1/6	サンプリング定理	[pdf](2020年版)	video	1/13
12	1/13	ラプラス変換の定義と性質	[pdf](2020年版)	video	1/20
13	1/20	線形常微分方程式のラプラス変換による解法	[pdf](2020年版)	video	1/27
-		期末テスト用問題集	[pdf](2020年版)		
-	1/27	期末確認テスト（後半。現在は大学を予定）			

今日の目標

ラプラス変換を定義する

ラプラス変換の性質を知る

（復習）フーリエ変換

ある関数 $f(x)$ に対して,

- ω（周波数）の関数に変換する操作：

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j\omega x)dx$$

これを**フーリエ変換**という.
ωの連続関数を返す

- 元の関数に戻す操作：

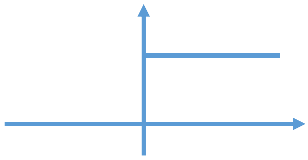
$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega x)d\omega$$

これを**逆フーリエ変換**という
（フーリエ逆変換とも）

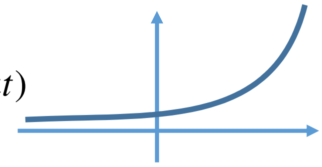
フーリエ変換で扱えない関数

●入力f(t)がフーリエ変換出来ない状況が**普通に**存在する

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & 0\le t\end{cases}$$



$$f(t)=\exp(at)$$



$$\int_{t=-\infty}^{\infty} F(t)\exp(-j\omega t)dt=\int_{t=0}^{\infty} 1\exp(-j\omega t)dt$$
$$=\left[\frac{\exp(-j\omega t)}{-j\omega}\right]_0^{\infty}$$
$$=\frac{1-\exp(-j\omega\infty)}{j\omega}$$

？？

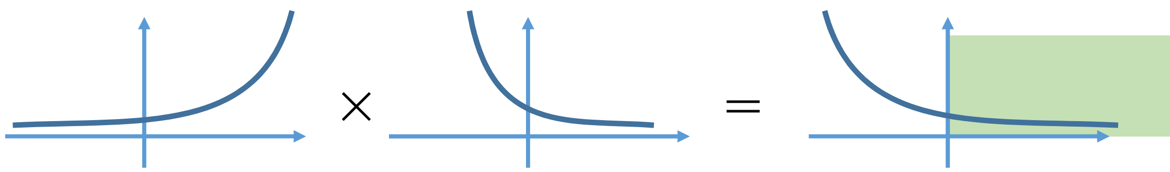
$$\int_{t=-\infty}^{\infty} F(t)\exp(-j\omega t)dt=\int_{t=0}^{\infty} \exp(at)\exp(-j\omega t)dt$$
$$=\cdots$$

無限遠で収束しない関数は，積分をうまく処理できない（絶対可積分の条件）
一部は**デルタ関数**の導入で処理できる（f(t)=1など）が，
exp(at)のように急速に大きくなるような関数はやはり無理.
しかし**exp(at)は微分方程式の解で頻出する大切な関数**.

拡張しよう

動機：収束しない関数（例：exp(at)）も変換したい

アイデア：
1. exp(-ct)という，急速に小さくなる関数を掛けて「抑える」
2. t>0のみで考えて，t<0で非常に大きくなる問題を避ける



$f(t)=\exp(at)$ × $\exp(-ct)$ = $\exp((a-c)t)$

ただしa<c

a<cなら，exp((a-c)t)はt>0では収束し，普通にフーリエ変換できる.

$$F(\omega)=\int_0^{\infty} f(t)\exp(-ct)\exp(-j\omega t)dt$$

複素変数sの導入

$$F(\omega)=\int_0^\infty f(t)\exp(-ct)\exp(-j\omega t)dt$$

$$=$$

$$=$$

c+jωを一つの複素変数sとみなす

$$F(s)=$$

exp(-st)

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)\exp(-st)dt$$

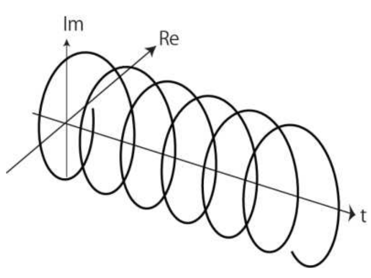
実質的には２変数の関数

exp(-st) = exp(-(c+jω)t)

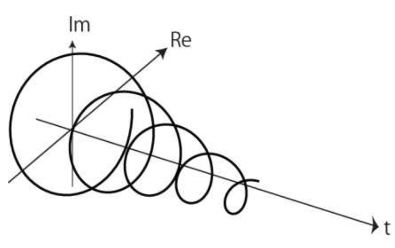
= exp(-ct)×exp(-jωt)

増大or減衰成分　回転成分

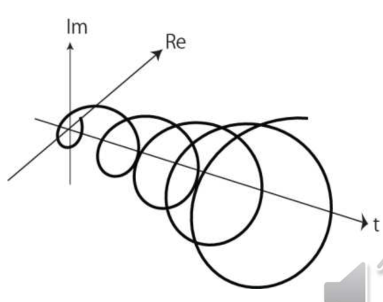
●c=0



●c＞0



●c＜0



cについては，変換が収束する範囲に設定されるものとする

フーリエ変換の拡張としてのラプラス変換

フーリエ変換

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

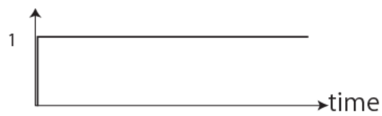
ラプラス変換

$$L(f(t))=F(s)=\int_{0}^{\infty} f(t)\exp(-st)dt$$

- 純虚数jω⇒複素数sに拡張
- 積分範囲は無限の過去を扱わず0から．つまり初期値f(0)があるものとする

ラプラス変換の例：ステップ関数

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & 0\le t\end{cases}$$



フーリエ変換ではデルタ関数を入れない限り扱えなかった関数

$$F(s)=\int_{0}^{\infty} f(t)\exp(-st)dt$$

$$=$$

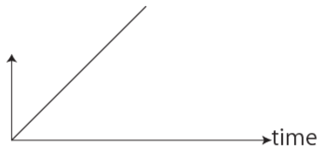
$$=$$

$$=$$

ただし積分が収束するsの範囲は，Re(s)>0

ラプラス変換の例：ランプ関数

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \le t \end{cases}$$



フーリエ変換ではデルタ関数を入れない限り扱えなかった関数

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\exp(-st)dt$$

$=$

$=$

$=$

$=$

ただし積分が収束するsの範囲は，Re(s)>0

ラプラス変換の例：sin

$$f(t) = \sin(\omega t)$$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$=$

$=$

$=$

$=$

$=$

$=$

ただし積分が収束するsの範囲は，Re(s)>0

ラプラス変換の例：cos

$$f(t) = \cos(\omega t)$$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

$=$

$=$

$=$

$=$

$=$

$=$

ただし積分が収束するsの範囲は，Re(s)>0

ラプラス変換の例：exp関数

$$f(t) = \exp(at)$$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) \exp(-st) dt$$

$=$

$=$

$=$

ただし積分が収束するsの範囲は，Re(s-a)>0

ラプラス変換の例：微分

$f(t)$ のラプラス変換が分かっているとき，$\dot{f}(t)$ のラプラス変換は？

$$L(\dot{f}(t)) = \int_0^\infty \dot{f}(t)\exp(-st)dt$$

$=$

$=$

$=$

ラプラス変換の積分範囲は0からではなく，0+から
（微分不可能点を避ける）

（ルール）ラプラス変換では，微分はsをかけてf(0)を引く

ラプラス変換の例：積分

$f(t)$ のラプラス変換が分かっているとき，$\int_{t=0}^{t} f(t)dt$ のラプラス変換は？

$$L\left(\int_{t=0}^{t} f(t)dt\right) = \int_0^\infty \left(\int_{t=0}^{t} f(t)dt\right)\exp(-st)dt$$

$=$

$=$

$=$

（ルール）ラプラス変換では，積分は1/sをかけることに相当

sinとcosのラプラス変換を見比べる(1/2)

$$\sin(\omega t) \rightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\cos(\omega t) \rightarrow \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

（ルール）ラプラス変換では，微分はsをかけてf(0)を引く

$$\frac{d}{dt}\sin(\omega t) = \omega\cos(\omega t)$$

ルールより，cos(ωt)のラプラス変換を求めるには，
sin(ωt)のラプラス変換にsをかけ，ωで割ればよい(sin(0)=0より)

．．．確かにそうなっている

sinとcosのラプラス変換を見比べる(2/2)

$$\sin(\omega t) \rightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\cos(\omega t) \rightarrow \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

（ルール）ラプラス変換では，微分はsをかけてf(0)を引く

$$\frac{d}{dt}\cos(\omega t) = -\omega\sin(\omega t)$$

ルールより，sin(ωt)のラプラス変換を求めるには，
cos(ωt)のラプラス変換にsをかけ，f(0)を引き、-ωで割けば良い

．．．確かにそうなっている

ラプラス変換の例：時間遅れ

$f(t)$ のラプラス変換が分かっているとき，$f(t-\tau)$ のラプラス変換は？

ただしτ≧0（時間遅れ）とし、t<τの範囲ではf(t)=0とする。

$$L(f(t-\tau)) = \int_0^{\infty} f(t-\tau)\exp(-st)dt$$

$=$ 　　　　　　　　　　　　　　　t’=t-τ

$=$ 　　　　　　　　　　　　　　　t<τの範囲でf(t)=0より
t’=t-τ<0の範囲でf(t’)=0

$=$

教科書によってはu(t-τ)f(t-τ) (uはステップ関数）

（ルール）

ラプラス変換では，τの時間遅れはexp(-s τ)をかけることに相当

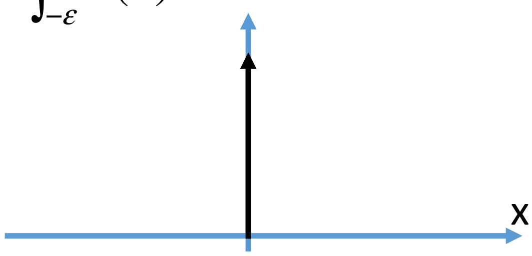
ただしt<τの範囲でf(t)=0という前提。

ラプラス変換の例：デルタ関数

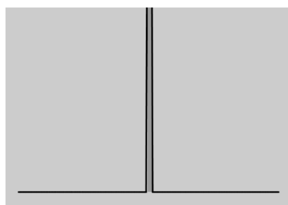
（復習）元々のデルタ関数の定義：全面積がx=0に集中した仮想的な関数

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$ 全面積が１

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)dx = 1$$ ε：任意正数．つまりどれだけεを小さくしても１



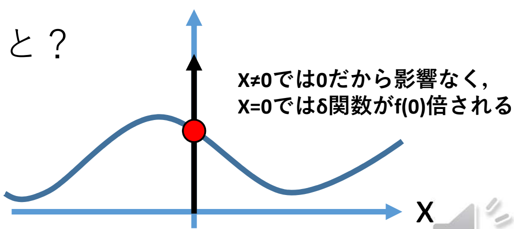
原点で∞という意味で，矢印で表記.



幅が無限に狭く，高さが無限に高くなった矩形波という理解が可能

デルタ関数と，一般の関数f(x)の積を積分すると？

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = \qquad\qquad =$$



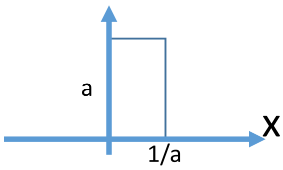
つまり**デルタ関数は，積分操作によってf(0)の値を「取り出す」関数**である

ラプラス変換の例：デルタ関数

ラプラス変換では関数の定義域が違うので，少し変化させる．

$$\int_0^{\infty} \delta(x)dx = 1$$ 全面積が１

$$\int_0^{\varepsilon} \delta(x)dx = 1$$ ε：任意正数．つまりどれだけεを小さくしても１



理解のためのモデル関数．a→∞

デルタ関数と，一般の関数f(x)の積の積分： $\int_0^{\infty} \delta(x) f(x)dx =$

やはりデルタ関数は，積分操作によってf(0)の値を「取り出す」

デルタ関数のラプラス変換： $\int_0^{\infty} \delta(t)\exp(-st)dt = \qquad =$

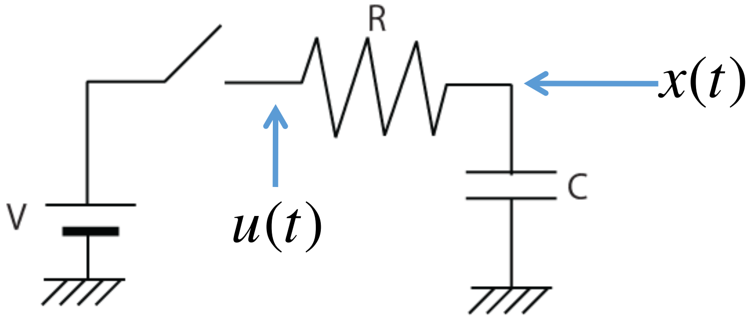
やはりデルタ関数のラプラス変換は１

ラプラス変換表

1	⇨	$\frac{1}{s}$	$\exp(at)$	⇨	$\frac{1}{s-a}$
t	⇨	$\frac{1}{s^2}$	$t\exp(at)$	⇨	$\left(\frac{1}{s-a}\right)^2$
t^n	⇨	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\dot{f}(t)$	⇨	$sF(s)-f(0)$
$\sin(\omega t)$	⇨	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\int_{t=0}^{t} f(t)dt$	⇨	$\frac{1}{s}F(s)$
$\cos(\omega t)$	⇨	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$f(t-\tau)$	⇨	$\exp(-s\tau)F(s)$
			$\delta(t)$	⇨	1

通常逆ラプラス変換は，表を見て逆引きで行う

ラプラス／逆ラプラス変換実例

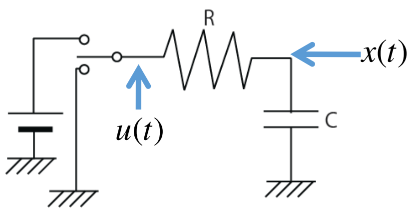


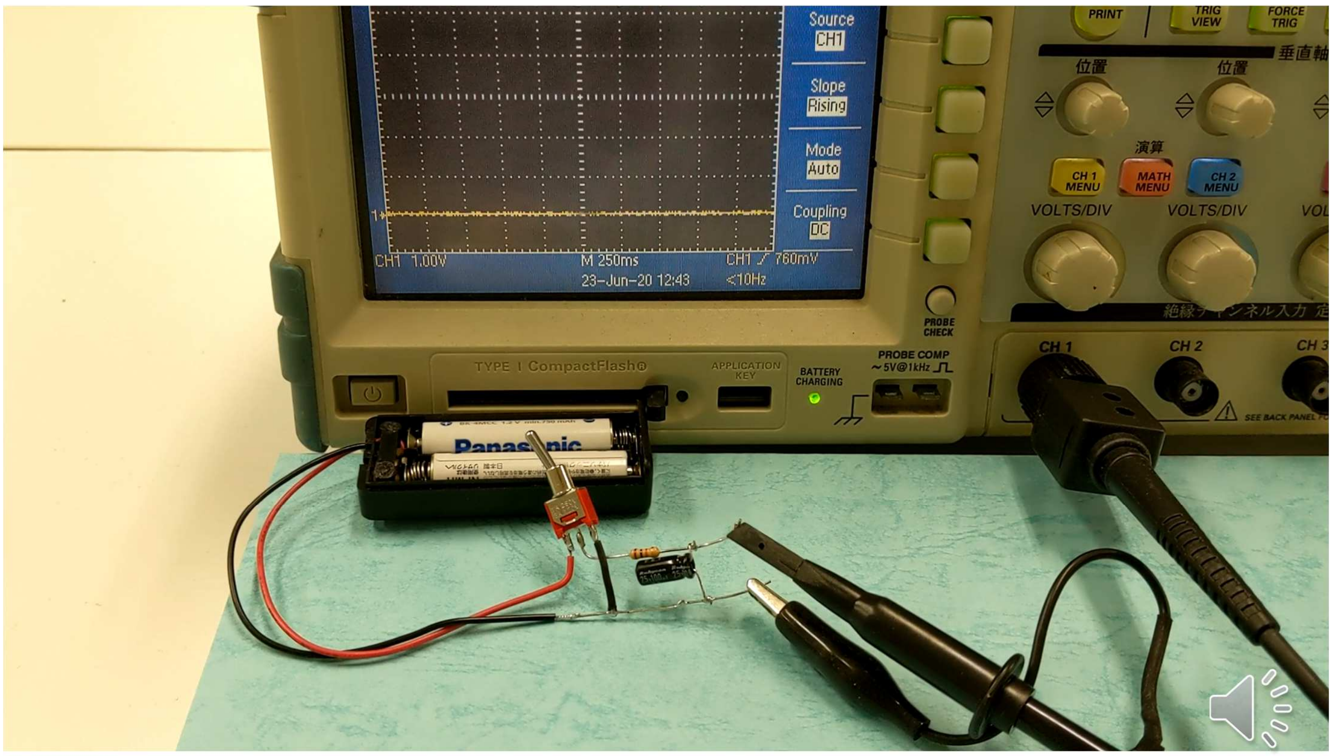
●入力：抵抗Rの左側の電圧 u(t).

●出力：コンデンサの電圧x(t).

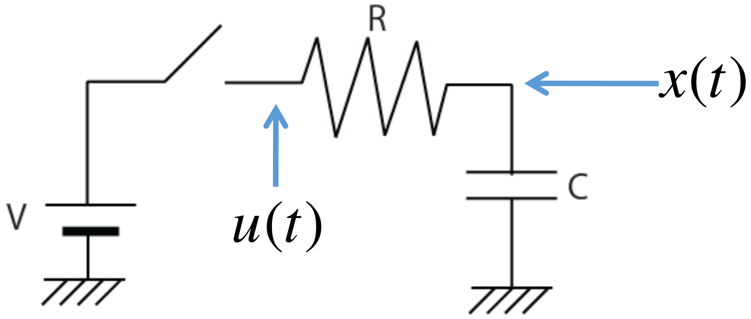
（問題）スイッチを入れた後のx(t)の変化を調べよ

ローパスフィルタ実験
（3年インタラクティブシステム論より）





ラプラス／逆ラプラス変換実例



●電流Iを考えて,

$u =$

$x =$

$I =$

$u =$

● x のラプラス変換をX,
●uのラプラス変換をUとすると,

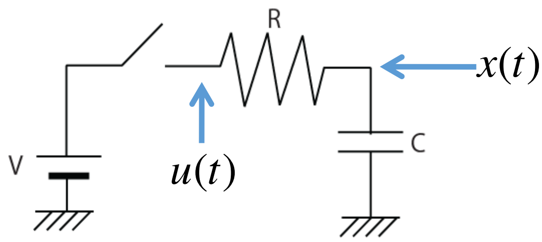
$U =$

（∴（ルール）微分⇒sをかける）

$=$

$X =$

ラプラス／逆ラプラス変換実例



$$X = \frac{1}{sRC+1}U$$

t=0でスイッチを入れるから

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ V & 0 \le t \end{cases}$$

$U(s) =$

$X =$

$=$

$=$

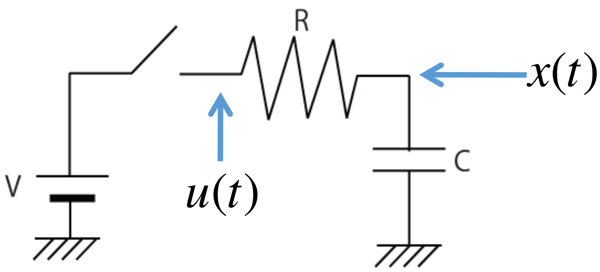
部分分数展開

$a = RC$

$b = -RC$

$X =$

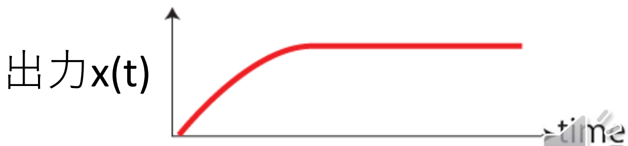
ラプラス／逆ラプラス変換実例



$$X = V\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}\right)$$

ラプラス変換表を見て逆変換する

$x(t) =$



定常成分　　過渡成分

今日のまとめ

- ラプラス変換を導入した.
- ラプラス変換の次のような性質を知った.
  - 微分に対するラプラス変換
  - 積分に対するラプラス変換
  - 時間遅れ関数に対するラプラス変換
  - デルタ関数に対するラプラス変換
- ラプラス変換の実例としてRC回路の電圧の変化を見た

次回はラプラス変換と微分方程式

今日のレポート

1. $t\exp(at)$ のラプラス変換に関する公式を導け。
2. 積分のラプラス変換に関する公式を用いて、sin関数のラプラス変換から、cos関数のラプラス変換を導け。

レポートは紙に書いたものを写真にとり、下記からアップロードする。
Googleアカウントによりアップロードするので、大学が提供しているアカウントを使用すること。画像ファイルは5MB以下に抑えること。

https://forms.gle/YWvwdqxwYT1WsiDD9

提出締め切り：講義日から一週間以内