



## 日程

講義番号	講義日	講義内容
1	10/1	周期関数、フーリエ級数の定義
2	10/8	フーリエ級数の計算例
3	10/15	複素フーリエ級数、直交関数系
-	10/22	体育祭
4	10/29	周期関数のたたみこみ、パーセバルの等式
5	11/5	非周期関数、フーリエ変換の定義・計算例
6	11/12	フーリエ変換の性質
7	11/19	デルタ関数とフーリエ変換、たたみこみのフーリエ変換、パーセバルの等式
-	11/26	中間確認問題（自習）
8	12/3	離散時間信号と離散時間フーリエ変換（教科書外）
9	12/10	離散フーリエ変換（教科書外）
10	12/17	離散フーリエ変換の性質（教科書外）
11	1/7	サンプリング定理
12	1/14	ラプラス変換の定義と性質
13	1/21	線形常微分方程式のラプラス変換による解法
-	1/28	期末テスト準備（自習）
-	2/4	期末確認テスト（全範囲。現在は大学を予定）

## 前回のまとめ

- ラプラス変換を導入した.
- ラプラス変換の次のような性質を知った.
  - 微分に対するラプラス変換
  - 積分に対するラプラス変換
  - 時間遅れ関数に対するラプラス変換
  - デルタ関数に対するラプラス変換
- ラプラス変換の実例としてRC回路の電圧の変化を見た



## (復習) ラプラス変換と変換表

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

$$1 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{s}$$

$$\exp(at) \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{s-a}$$

$$t \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{s^2}$$

$$t \exp(at) \quad \longrightarrow \quad \left( \frac{1}{s-a} \right)^2$$

$$t^n \quad \longrightarrow \quad \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\dot{f}(t) \quad \longrightarrow \quad sF(s) - f(0)$$

$$\sin(\omega t) \quad \longrightarrow \quad \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\int_{t=0}^t f(t) dt \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{s} F(s)$$

$$\cos(\omega t) \quad \longrightarrow \quad \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$f(t - \tau) \quad \longrightarrow \quad \exp(-s\tau) F(s)$$

$$\delta(t) \quad \longrightarrow \quad 1$$

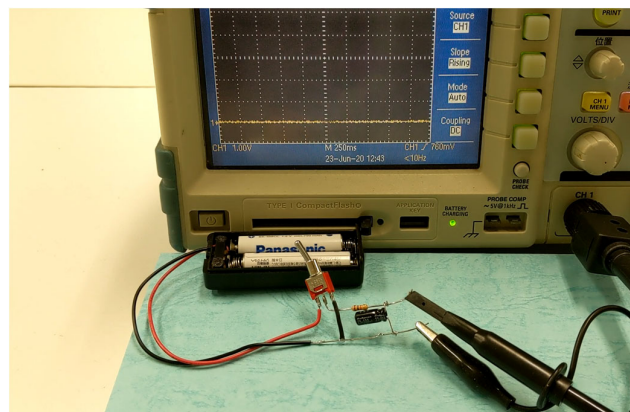
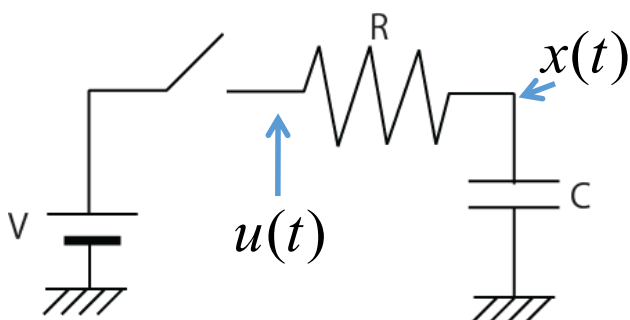


# 今日の目標

ラプラス変換で常微分方程式を解く  
たたみ込みの性質を使う



## (復習) ラプラス/逆ラプラス変換実例

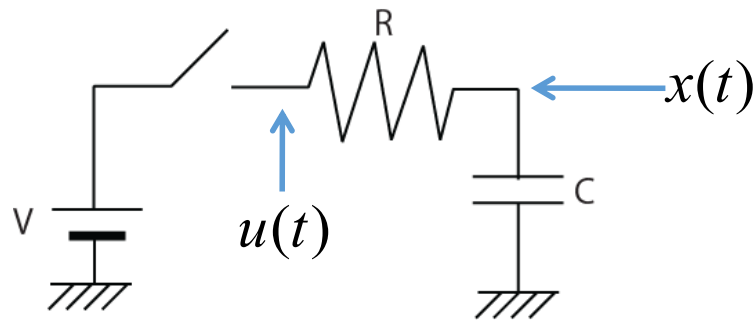


- 入力：抵抗 $R$ の左側の電圧  $u(t)$ . 時刻 $t>0$ で $V$
- 出力：コンデンサの電圧 $x(t)$ .

これも微分方程式をラプラス変換で解いた例といえ



## 微分方程式として見直す



- 電流*I*を考えて,

$$u = RI + \frac{1}{C} \int Idt$$

$$x = \frac{1}{C} \int Idt$$

$$I = C\dot{x}$$

$$u = RC\dot{x} + x$$

Uは時刻*t*>0で*V* (一定値) だから,

$$RC\dot{x} + x = V$$

$$\dot{x} + \frac{1}{RC}x = \frac{V}{RC}$$

これは

$$y' + ay = b$$

という形の微分方程式



## 微分方程式として見直す

$$\dot{x} + \frac{1}{RC}x = \frac{V}{RC}$$

両辺をラプラス変換 (ただし*x*(0)=0)

$$sX + \frac{1}{RC}X = \frac{V}{RC} \frac{1}{s}$$

$$X = \frac{V}{RC} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$X = V \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right)$$

ラプラス変換表から

$$x(t) = V \left( 1 - \exp\left(-\frac{1}{RC}t\right) \right)$$



# ラプラス変換による微分方程式解法例 1

$$y' + 4y = \exp(-t) \quad y(0) = 2$$

両辺をラプラス変換

$$\begin{cases} L(y') = sY - y(0) \\ L(\exp(-t)) = \frac{1}{s+1} \end{cases}$$

より

$$Y =$$

$$Y =$$

$$=$$

$$\therefore Y =$$

$$y =$$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 4a + b = 3 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a = 1/3 \\ b = 5/3 \end{cases}$$

検証

$$y(0) = \frac{1}{3}(\exp(0) + 5 \exp(0)) = 2$$

$$y' + 4y$$

$$= \frac{1}{3}(-\exp(-t) - 20 \exp(-4t) + 4 \exp(-t) + 4 \exp(-4t)) = \exp(-t)$$

# ラプラス変換による微分方程式解法例 2

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 2$$

両辺をラプラス変換

$$\begin{cases} L(y') = sY - y(0) \\ \quad = sY \\ L(y'') = sL(y') - y'(0) \\ \quad = s(sY - y(0)) - y'(0) \\ \quad = s^2Y - 2 \end{cases}$$

より

$$Y =$$

$$=$$

$$\therefore Y =$$

$$y =$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + 3b = 2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$$

検証 (初期値のみ)

$$\begin{cases} y(0) = -2 \exp(0) + 2 \exp(0) = 0 \\ y' = 6 \exp(-3t) - 4 \exp(-2t) \\ y'(0) = 6 \exp(0) - 4 \exp(0) = 2 \end{cases}$$

## ラプラス変換による微分方程式解法例 3

$$y'' + 5y' + 6y = \exp(-2t) \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 2$$

両辺をラプラス変換

$$\left\{ \begin{array}{l} L(y') = sY - y(0) \\ \quad = sY \\ L(y'') = sL(y') - y'(0) \\ \quad = s(sY - y(0)) - y'(0) \\ \quad = s^2Y - 2 \\ L(\exp(-2t)) = \frac{1}{s+2} \end{array} \right.$$

より

$Y =$

$Y =$

$\therefore Y =$

$y =$

検算  $y' = e^{-t} - te^{-t} - 2e^{-2t} + 3e^{-3t}$   
 $y(0) = 0$   
 $y'(0) = 2$



## ラプラス変換による微分方程式解法例 4

$$y'' + 4y = \exp(-t) \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

両辺をラプラス変換

$$\left\{ \begin{array}{l} L(y') = sY - y(0) \\ \quad = sY \\ L(y'') = sL(y') - y'(0) \\ \quad = s^2Y \\ L(\exp(-t)) = \frac{1}{s+1} \end{array} \right.$$

より

$Y =$

$=$

$=$



## ラプラス変換による微分方程式解法例 4

$$Y = \frac{a}{s+2i} + \frac{b}{s-2i} + \frac{c}{s+1}$$

$$1 = (s-2i)(s+1)a + (s+2i)(s+1)b + (s+2i)(s-2i)c$$

$$= (a+b+c)s^2 + ((-2i+1)a + (2i+1)b + (2i-2i)c)s + (-2ia + 2ib + 4c)$$

$$\begin{cases} a+b+c = \\ (-2i+1)a + (2i+1)b = \\ -2ia + 2ib + 4c = \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. = \quad =$$



## ラプラス変換による微分方程式解法例 4

$$\begin{cases} c = -a - b \\ (-2i+1)a + (2i+1)b = 0 \\ (-2i-4)a + (2i-4)b = 1 \end{cases}$$

$a =$

$b =$

$$a = \frac{2i+1}{2i-1} \frac{2i-1}{-20i} =$$

$$c = -a - b = \frac{2i+1+2i-1}{20i} = \frac{4i}{20i} =$$

$$\frac{4-2i-8i-4-4-8i-2i+4}{2i-1} b = \frac{-20i}{2i-1} b = 1$$



# ラプラス変換による微分方程式解法例 4

$$Y = \frac{a}{s+2i} + \frac{b}{s-2i} + \frac{c}{s+1}$$

$$a = \frac{2i+1}{-20i} \quad b = \frac{2i-1}{-20i} \quad c = \frac{1}{5}$$

∴  $y =$

=

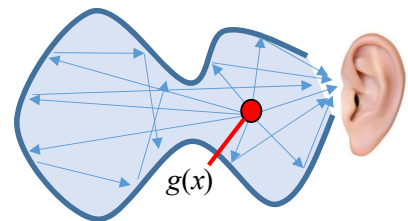
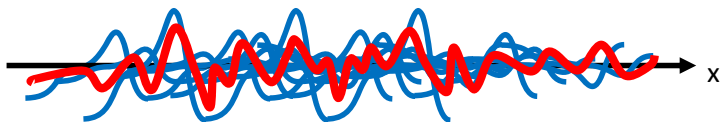
=

これが  $y''+4y = \exp(-t)$   $y(0) = 0$   $y'(0) = 0$  を満たしているかの検証は省略

．．． 意外と大変。簡単にできる方法はないか？

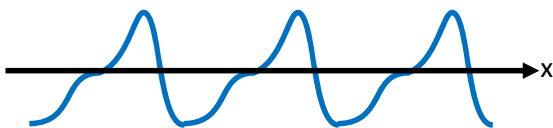


## (復習) 原音と響きの定式化

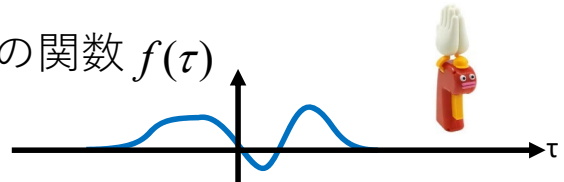


「遅れ時間 $\tau$ に対して振幅がどれだけか」の反響の関数があるなら、

原音  $g(x)$



反響の関数  $f(\tau)$



$\tau$ だけ遅れた反響音成分は  $f(\tau)g(x-\tau)$

遅れ $\tau$ に対応した反響の強さ  $\tau$ だけ遅れた原信号

これらがすべての $\tau$ で発生し、加算されるから、最終的な信号は

$$\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau$$

これを関数 $f(x)$ と $g(x)$ のたたみ込み積分とよぶ





# ラプラス変換におけるたたみ込み

通常なたたみ込み  $f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau$

ラプラス変換であつかう各関数は $x < 0$ では0としている.

$$\begin{cases} f(\tau) = 0 \\ g(x-\tau) = 0 \end{cases}$$

このため、たたみ込みの積分の有効範囲は

ラプラス変換で扱う関数のたたみ込み

$$f * g =$$



# ラプラス変換におけるたたみ込み

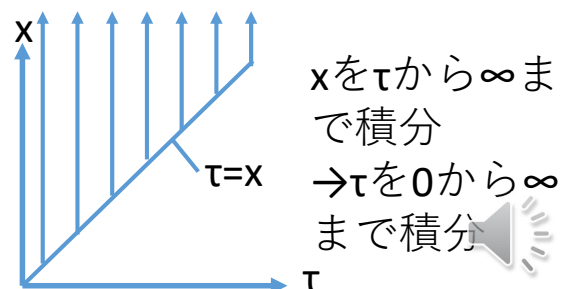
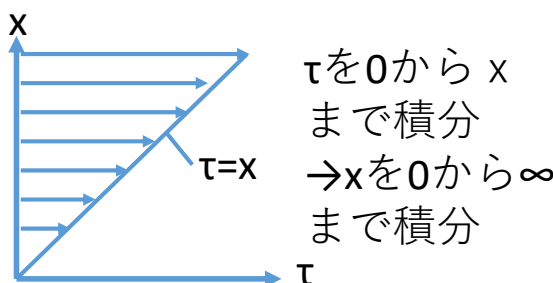
$$f * g = \int_0^x f(\tau)g(x-\tau)d\tau$$

ラプラス変換してみる

$$L(f * g) = \int_0^{\infty} f * g(x) \exp(-sx) dx$$

=

=



## ラプラス変換におけるたたみ込み

$$L(f * g) = \int_0^{\infty} \left\{ \int_{\tau}^{\infty} f(\tau)g(x - \tau) \exp(-sx) dx \right\} d\tau$$

$x - \tau = y$ と置いて =

=

=

よってラプラス変換においても、たたみ込み積分→掛け算となる  
ということは、逆に、 $L(f)L(g)$  で表される関数の  
逆ラプラス変換は  $f * g = \int_0^x f(\tau)g(x - \tau)d\tau$  となる



## ラプラス変換による微分方程式解法例 4

$$y'' + 4y = \exp(-t) \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

両辺をラプラス変換

$$\begin{cases} L(y') = sY - y(0) \\ \quad = sY \\ L(y'') = s(sY) - y'(0) \\ \quad = s^2Y \\ L(\exp(-t)) = \frac{1}{s+1} \end{cases}$$

より  $s^2Y + 4Y = \frac{1}{s+1}$

$$(s^2 + 4)Y = \frac{1}{s+1}$$

$$Y = \frac{1}{(s^2 + 4)(s+1)}$$

ここで、たたみ込みを使う。

$$Y =$$

ラプラス変換表より

$\sin(\omega t) \rightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$  だから

$$\begin{cases} \frac{1}{s^2 + 4} \rightarrow \\ \frac{1}{s+1} \rightarrow \end{cases}$$



## ラプラス変換による微分方程式解法例 4

$$Y = \frac{1}{s^2 + 4} \cdot \frac{1}{s + 1} \quad \begin{cases} \frac{1}{s^2 + 4} & \rightarrow \frac{1}{2} \sin(2t) \\ \frac{1}{s + 1} & \rightarrow \exp(-t) \end{cases}$$

たたみ込み

$$y = \int_0^x f(\tau)g(x-\tau)d\tau =$$

=

積分を部分積分で解く

$$J = \int_0^x \sin(2\tau) \exp(\tau) d\tau =$$

=

=



## ラプラス変換による微分方程式解法例 4

$$J = \sin(2x) \exp(x) - 2 \cos(2x) \exp(x) + 2 - 4J$$

$$J =$$

元の式に代入

$$y =$$

=

たたみ込みを利用することでより簡単？に計算できた



## 今日のまとめ

- ラプラス変換をつかって微分方程式を解く練習をした。
- ラプラス変換のたたみ込みの性質を知り，それを使って簡単に？解ける場合を示した。



## 今日のレポート

ラプラス変換によって次の微分方程式を解け

$$y'' + 4y' + 3y = \exp(-2t) \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 3$$

レポートは紙に書いたものを写真にとり、下記からアップロードする。  
Googleアカウントによりアップロードするので、大学が提供しているアカウントを使用すること。画像ファイルは5MB以下に抑えること。

<https://forms.gle/tovLwBV1eaiuoAVA>

提出締め切り：講義日から一週間以内



## 期末試験

- 主に練習問題集から数値を変えて出します。後半用練習問題も掲示します。
- **授業全体が範囲です。** 中間用練習問題も準備してください。
- このスライドを録画している段階では最終回の日<sup>①</sup>に大学で行う予定ですが、**状況に応じて試験@Homeになる可能性があります。** 日程変更もあります。  
Google class、授業webでの掲示に注意してください。

