日程

講義番号	講義日	講義内容	pdf	video	レポート締め切り
1	10/7	周期関数、フーリエ級数の定義	[pdf](2020年版)	video	10/14
2	10/14	フーリエ級数の計算例	[pdf](2020年版)	video	10/21
-	10/21	体育祭			
3	10/28	複素フーリエ級数、直交関数系	[pdf](2020年版)	video	11/4
4	11/4	周期関数のたたみこみ、パーセバルの等式	[pdf](2020年版)	video	11/11
5	11/11	非周期関数、フーリエ変換の定義・計算例	[pdf](2020年版)	video	11/18
6	11/18	フーリエ変換の性質	[pdf]	video	11/25
7	11/25	デルタ関数とフーリエ変換、たたみこみのフーリエ変換、パーセバルの等式	[pdf](2020年版)	video	12/2
-		中間確認テスト用問題集	[pdf](2020年版)		
-	12/2	中間確認テスト（前半。現在は大学を予定）			
8	12/9	離散時間信号と離散時間フーリエ変換（教科書外）	[pdf](2020年版)	video	12/16
9	12/16	離散フーリエ変換（教科書外）	[pdf](2020年版)	video	12/23
10	12/23	離散フーリエ変換の性質（教科書外）	[pdf](2020年版)	video	1/6
11	1/6	サンプリング定理	[pdf](2020年版)	video	1/13
12	1/13	ラプラス変換の定義と性質	[pdf](2020年版)	video	1/20
13	1/20	線形常微分方程式のラプラス変換による解法	[pdf](2020年版)	video	1/27
-		期末テスト用問題集	[pdf](2020年版)		
-	1/27	期末確認テスト（後半。現在は大学を予定）			

前回のまとめ

- ラプラス変換を導入した.
- ラプラス変換の次のような性質を知った.
  - 微分に対するラプラス変換
  - 積分に対するラプラス変換
  - 時間遅れ関数に対するラプラス変換
  - デルタ関数に対するラプラス変換
- ラプラス変換の実例としてRC回路の電圧の変化を見た

（復習）ラプラス変換と変換表

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty f(t)\exp(-st)dt$$

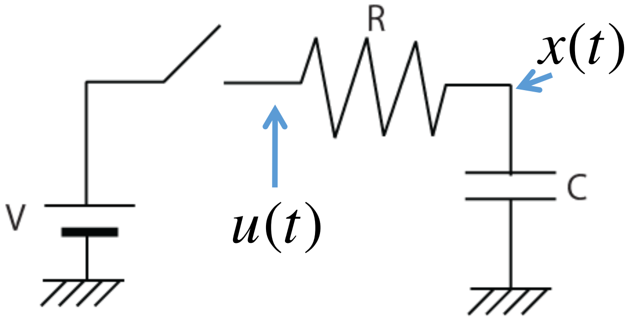
1	⇒	$\frac{1}{s}$	$\exp(at)$	⇒	$\frac{1}{s-a}$
t	⇒	$\frac{1}{s^2}$	$t\exp(at)$	⇒	$\left(\frac{1}{s-a}\right)^2$
t^n	⇒	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\dot{f}(t)$	⇒	$sF(s)-f(0)$
$\sin(\omega t)$	⇒	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\int_{t=0}^{t} f(t)dt$	⇒	$\frac{1}{s}F(s)$
$\cos(\omega t)$	⇒	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$f(t-\tau)$	⇒	$\exp(-s\tau)F(s)$
			$\delta(t)$	⇒	1

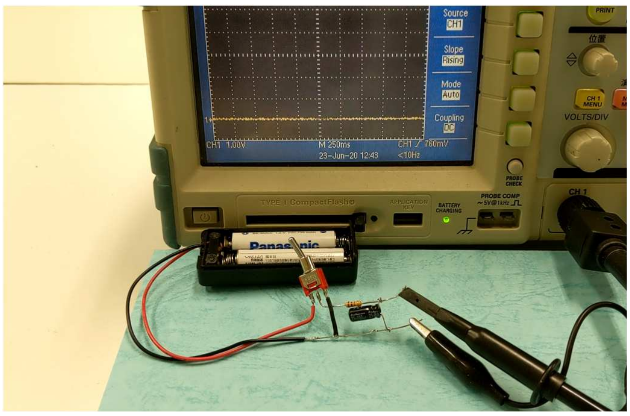
今日の目標

ラプラス変換で常微分方程式を解く

たたみ込みの性質を使う

（復習）ラプラス／逆ラプラス変換実例

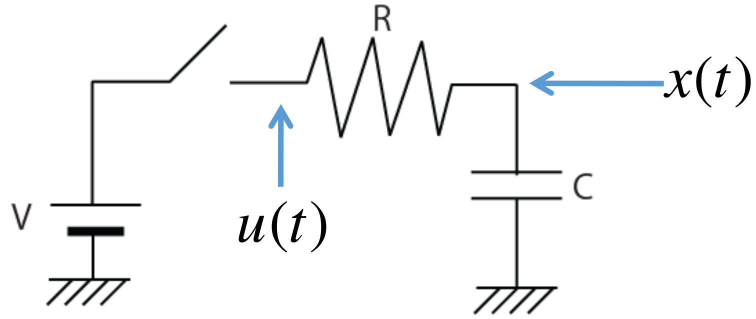




●入力：抵抗Rの左側の電圧 u(t).　時刻t>0でV
●出力：コンデンサの電圧x(t).

これも微分方程式をラプラス変換で解いた例といえる

微分方程式として見直す



●電流Iを考えて，

$$u = RI + \frac{1}{C}\int Idt$$

$$x = \frac{1}{C}\int Idt$$

$$I = C\dot{x}$$

$$u = RC\dot{x} + x$$

Uは時刻t>0でV（一定値）だから，

$$RC\dot{x} + x = V$$

$$\dot{x} + \frac{1}{RC}x = \frac{V}{RC}$$

これは

$$y' + ay = b$$

という形の微分方程式

微分方程式として見直す

$$\dot{x} + \frac{1}{RC}x = \frac{V}{RC}$$

両辺をラプラス変換（ただしx(0)=0)

$$sX + \frac{1}{RC}X = \frac{V}{RC}\frac{1}{s}$$

$$X = \frac{V}{RC}\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$X = V\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}\right)$$

ラプラス変換表から

$$x(t) = V\left(1 - \exp(-\frac{1}{RC}t)\right)$$

ラプラス変換による微分方程式解法例１

$$y' + 4y = \exp(-t) \quad y(0) = 2$$

両辺をラプラス変換

$$\begin{cases} L(y') = sY - y(0) \\ L(\exp(-t)) = \dfrac{1}{s+1} \end{cases}$$

より

$Y =$

$Y = \qquad =$

$=$

$a + b = 2$
$4a + b = 3$

$\begin{cases} a = 1/3 \\ b = 5/3 \end{cases}$

$\therefore Y =$

$y =$

検証

$$y(0) = \frac{1}{3}(\exp(0) + 5\exp(0)) = 2$$

$$y' + 4y$$
$$= \frac{1}{3}(-\exp(-t) - 20\exp(-4t) + 4\exp(-t) + 40\exp(-4t)) = \exp(-t)$$

ラプラス変換による微分方程式解法例２

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 2$$

両辺をラプラス変換

$$\begin{cases} L(y') = sY - y(0) \\ = sY \\ L(y'') = sL(y') - y'(0) \\ = s(sY - y(0)) - y'(0) \\ = s^2Y - 2 \end{cases}$$

より

$Y =$

$=$

$a + b = 0$
$2a + 3b = 2$

$\begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$

$\therefore Y =$

$y =$

検証（初期値のみ）

$$\begin{cases} y(0) = -2\exp(0) + 2\exp(0) = 0 \\ y' = 6\exp(-3t) - 4\exp(-2t) \\ y'(0) = 6\exp(0) - 4\exp(0) = 2 \end{cases}$$

ラプラス変換による微分方程式解法例３

$$\boxed{y'' + 5y' + 6y = \exp(-2t) \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 2}$$

両辺をラプラス変換

$$\begin{cases} L(y') = sY - y(0) \\ = sY \\ L(y'') = sL(y') - y'(0) \\ = s(sY - y(0)) - y'(0) \\ = s^2Y - 2 \\ L(\exp(-2t)) = \dfrac{1}{s+2} \end{cases}$$

より

$Y =$

$Y =$

$\because Y =$

$y =$

検算 $y' = e^{-t} - te^{-t} - 2e^{-2t} + 3e^{-3t}$

$y(0) = 0$

$y'(0) = 2$

ラプラス変換による微分方程式解法例４

$$\boxed{y'' + 4y = \exp(-t) \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0}$$

両辺をラプラス変換

$$\begin{cases} L(y') = sY - y(0) \\ = sY \\ L(y'') = s(sY) - y'(0) \\ = s^2Y \\ L(\exp(-t)) = \dfrac{1}{s+1} \end{cases}$$

より

$Y =$

$=$

$=$

ラプラス変換による微分方程式解法例４

$$Y=\frac{a}{s+2i}+\frac{b}{s-2i}+\frac{c}{s+1}$$

$$1=(s-2i)(s+1)a+(s+2i)(s+1)b+(s+2i)(s-2i)c$$

$$=(a+b+c)s^2+((-2i+1)a+(2i+1)b+(2i-2i)c)s+(-2ia+2ib+4c)$$

$$\begin{cases} a+b+c= \\ (-2i+1)a+(2i+1)b= \\ -2ia+2ib+4c= \end{cases}$$

$$\begin{cases} \\ \qquad = \qquad = \end{cases}$$

ラプラス変換による微分方程式解法例４

$$\begin{cases} c=-a-b \\ (-2i+1)a+(2i+1)b=0 \\ (-2i-4)a+(2i-4)b=1 \end{cases}$$

$$a=$$

$$\frac{4-2i-8i-4-4-8i-2i+4}{2i-1}b=\frac{-20i}{2i-1}b=1$$

$$b=$$

$$a=\frac{2i+1}{2i-1}\frac{2i-1}{-20i}=$$

$$c=-a-b=\frac{2i+1+2i-1}{20i}=\frac{4i}{20i}=$$

ラプラス変換による微分方程式解法例４

$$Y=\frac{a}{s+2i}+\frac{b}{s-2i}+\frac{c}{s+1}$$

$$a=\frac{2i+1}{-20i}\quad b=\frac{2i-1}{-20i}\quad c=\frac{1}{5}$$

$\therefore y=$

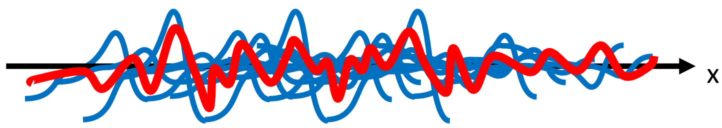
$=$

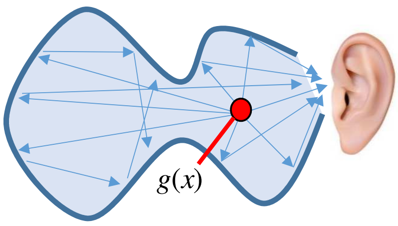
$=$

これが $y''+4y=\exp(-t)\quad y(0)=0\quad y'(0)=0$ を満たしているかの検証は省略

．．．意外と大変．簡単にできる方法はないか？

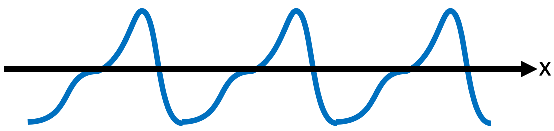
（復習）原音と響きの定式化



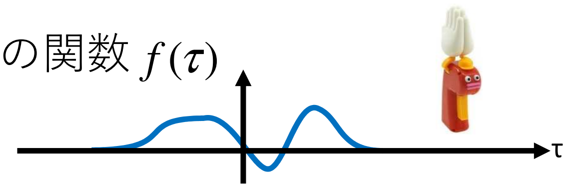


「遅れ時間τに対して振幅がどれだけか」の反響の関数があるなら，

原音　$g(x)$



反響の関数 $f(\tau)$



τだけ遅れた反響音成分は　$\underbrace{f(\tau)}_{\text{遅れτに対応した反響の強さ}}\underbrace{g(x-\tau)}_{\text{τだけ遅れた原信号}}$

遅れτに対応した反響の強さ　**τだけ遅れた原信号**

これらが**すべてのτで発生し，加算される**から，最終的な信号は

$$\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau$$

これを**関数f(x)とg(x)のたたみ込み積分**とよぶ

ラプラス変換におけるたたみ込み

通常のたたみ込み $f*g=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(x-\tau)d\tau$

ラプラス変換であつかう各関数はx<0では0としている.

$$\begin{cases} f(\tau)=0 \\ g(x-\tau)=0 \end{cases}$$

このため，たたみ込みの積分の有効範囲は

ラプラス変換で扱う関数のたたみ込み

$$f*g=$$

ラプラス変換におけるたたみ込み

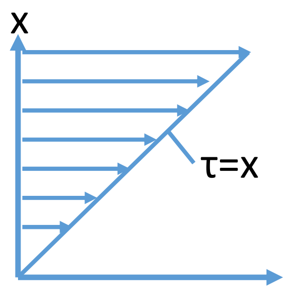
$$f*g=\int_{0}^{x}f(\tau)g(x-\tau)d\tau$$

ラプラス変換してみる

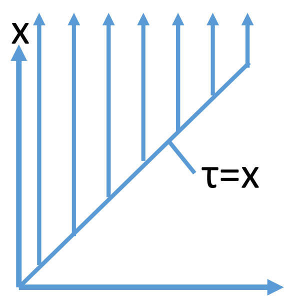
$$L(f*g)=\int_{0}^{\infty}f*g(x)\exp(-sx)dx$$

$$=$$

$$=$$



τを0から x
まで積分
→xを0から∞
まで積分



xをτから∞ま
で積分
→τを0から∞
まで積分

ラプラス変換におけるたたみ込み

$$L(f*g)=\int_0^\infty\left\{\int_\tau^\infty f(\tau)g(x-\tau)\exp(-sx)dx\right\}d\tau$$

x-τ=yと置いて $=$

$=$

$=$

よってラプラス変換においても，たたみ込み積分→掛け算となる

ということは，逆に，$L(f)L(g)$ で表される関数の

逆ラプラス変換は $f*g=\int_0^x f(\tau)g(x-\tau)d\tau$　となる

ラプラス変換による微分方程式解法例４

$$\boxed{y''+4y=\exp(-t)\quad y(0)=0\quad y'(0)=0}$$

両辺をラプラス変換

$$\begin{cases} L(y')=sY-y(0) \\ \quad =sY \\ L(y'')=s(sY)-y'(0) \\ \quad =s^2Y \\ L(\exp(-t))=\dfrac{1}{s+1} \end{cases}$$

より $s^2Y+4Y=\dfrac{1}{s+1}$

$$(s^2+4)Y=\frac{1}{s+1}$$

$$Y=\frac{1}{(s^2+4)(s+1)}$$

ここで，たたみ込みを使う．

$Y=$

ラプラス変換表より

$\sin(\omega t)$ ⇨ $\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ だから

$$\begin{cases} \dfrac{1}{s^2+4} \to \\ \dfrac{1}{s+1} \to \end{cases}$$

ラプラス変換による微分方程式解法例４

$$Y = \frac{1}{s^2+4}\cdot\frac{1}{s+1} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{s^2+4} & \to \dfrac{1}{2}\sin(2t) \\ \dfrac{1}{s+1} & \to \exp(-t) \end{cases}$$

たたみ込み

$$y = \int_0^x f(\tau)g(x-\tau)d\tau =$$

$$=$$

積分を部分積分で解く

$$J = \int_0^x \sin(2\tau)\exp(\tau)d\tau =$$

$$=$$

$$=$$

ラプラス変換による微分方程式解法例４

$$J = \sin(2x)\exp(x) - 2\cos(2x)\exp(x) + 2 - 4J$$

$$J =$$

元の式に代入

$$y =$$

$$=$$

たたみ込みを利用することでより簡単？に計算できた

今日のまとめ

- ラプラス変換をつかって微分方程式を解く練習をした.
- ラプラス変換のたたみ込みの性質を知り，それを使って簡単に？解ける場合を示した.

今日のレポート

ラプラス変換によって次の微分方程式を解け

$$y'' + 4y' + 3y = \exp(-2t) \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 3$$

レポートは紙に書いたものを写真にとり、下記からアップロードする。Googleアカウントによりアップロードするので、大学が提供しているアカウントを使用すること。画像ファイルは5MB以下に抑えること。

https://forms.gle/YWvwdqxwYT1WsiDD9

提出締め切り：講義日から一週間以内

期末試験

- 主に練習問題集から出しますが発展的内容も含みます。後半が範囲です。
- このスライドを録画している段階では最終回の日に大学で行う予定です。