応用数学第一

第十三回

梶本裕之

日程

講義番号	講義日	講義内容	pdf	video	レポート締め切り
1	10/6	周期関数、フーリエ級数の定義	[pdf](2022年版)	video	10/13
2	10/13	フーリエ級数の計算例	[pdf](2021年版)	video	10/20
3	10/20	複素フーリエ級数、直交関数系	[pdf](2021年版)	video	10/27
4	10/27	周期関数のたたみこみ、パーセバルの等式	[pdf](2021年版)	video	11/3
-	11/3	文化の日			
5	11/10	非周期関数、フーリエ変換の定義・計算例	[pdf](2021年版)	video	11/17
-	11/17	調布祭準備			
6	11/24	フーリエ変換の性質	[pdf](2021年版)	video	12/1
7	12/1	デルタ関数とフーリエ変換、たたみこみのフーリエ変換、パーセバルの等式	[pdf](2021年版)	video	12/8
-	12/8	中間確認テスト（前半。現在は大学を予定）	中間確認テスト用問題集	[pdf](2021年版)	
8	12/15	離散時間信号と離散時間フーリエ変換（教科書外）	[pdf](2021年版)	video	12/22
9	12/22	離散フーリエ変換（教科書外）	[pdf](2021年版)	video	1/5
10	1/5	離散フーリエ変換の性質（教科書外）	[pdf](2021年版)	video	1/12
11	1/12	サンプリング定理	[pdf](2021年版)	video	1/19
12	1/19	ラプラス変換の定義と性質	[pdf](2021年版)	video	1/26
13	1/26	線形常微分方程式のラプラス変換による解法	[pdf](2021年版)	video	2/2
-	2/2	期末用自習	[pdf](2021年版)		
-	2/9	期末確認テスト（後半。現在は大学を予定）			

前回のまとめ

- ラプラス変換を導入した.
- ラプラス変換の次のような性質を知った.
  - 微分に対するラプラス変換
  - 積分に対するラプラス変換
  - 時間遅れ関数に対するラプラス変換
  - デルタ関数に対するラプラス変換
- ラプラス変換の実例としてRC回路の電圧の変化を見た

（復習）ラプラス変換と変換表

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty f(t)\exp(-st)dt$$

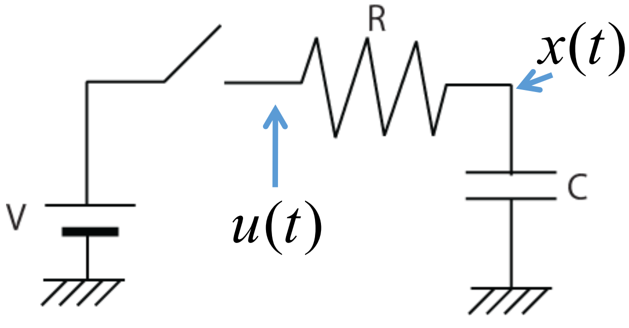
1	⇒	$\frac{1}{s}$	$\exp(at)$	⇒	$\frac{1}{s-a}$
t	⇒	$\frac{1}{s^2}$	$t\exp(at)$	⇒	$\left(\frac{1}{s-a}\right)^2$
t^n	⇒	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\dot{f}(t)$	⇒	$sF(s) - f(0)$
$\sin(\omega t)$	⇒	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\int_{t=0}^{t} f(t)dt$	⇒	$\frac{1}{s}F(s)$
$\cos(\omega t)$	⇒	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$f(t-\tau)$	⇒	$\exp(-s\tau)F(s)$
			$\delta(t)$	⇒	1

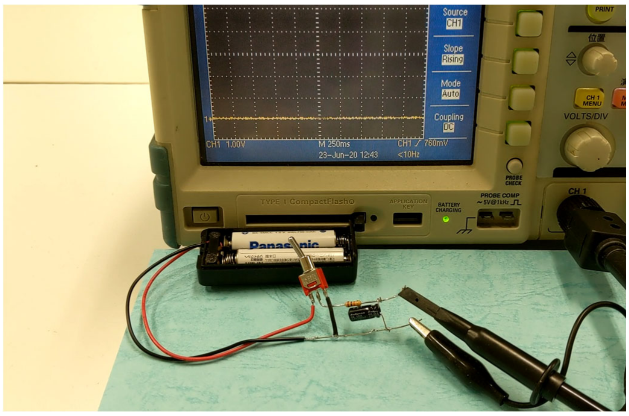
今日の目標

ラプラス変換で常微分方程式を解く

たたみ込みの性質を使う

（復習）ラプラス／逆ラプラス変換実例

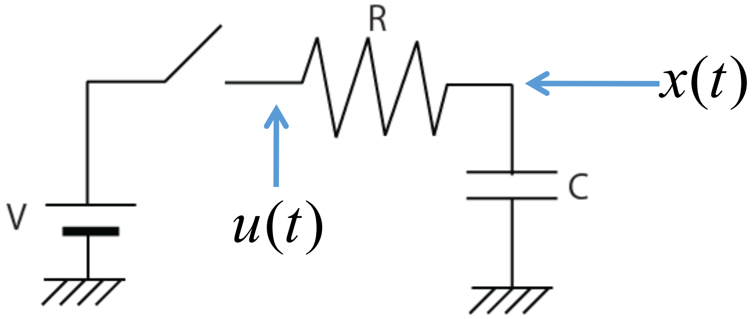




●入力：抵抗Rの左側の電圧 u(t). 時刻t>0でV
●出力：コンデンサの電圧x(t).

これも微分方程式をラプラス変換で解いた例といえる

微分方程式として見直す



●電流Iを考えて,

$$u = RI + \frac{1}{C}\int Idt$$

$$x = \frac{1}{C}\int Idt$$

$$I = C\dot{x}$$

$$u = RC\dot{x} + x$$

Uは時刻t>0でV（一定値）だから,

$$RC\dot{x} + x = V$$

$$\dot{x} + \frac{1}{RC}x = \frac{V}{RC}$$

これは

$$y' + ay = b$$

という形の微分方程式

微分方程式として見直す

$$\dot{x} + \frac{1}{RC}x = \frac{V}{RC}$$

両辺をラプラス変換（ただしx(0)=0)

$$sX + \frac{1}{RC}X = \frac{V}{RC}\frac{1}{s}$$

$$X = \frac{V}{RC}\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}$$

$$X = V\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right)$$

ラプラス変換表から

$$x(t) = V\left(1 - \exp(-\frac{1}{RC}t)\right)$$

ラプラス変換による微分方程式解法例１

$$y' + 4y = \exp(-t) \quad y(0) = 2$$

両辺をラプラス変換

$$\begin{cases} L(y') = sY - y(0) \\ L(\exp(-t)) = \dfrac{1}{s+1} \end{cases}$$

より

$Y =$

$Y = \qquad =$

$=$

$$a + b = 2$$
$$4a + b = 3$$

$\therefore Y =$

$$\begin{cases} a = 1/3 \\ b = 5/3 \end{cases}$$

$y =$

検証

$$y(0) = \frac{1}{3}(\exp(0) + 5\exp(0)) = 2$$

$$y' + 4y = \frac{1}{3}(-\exp(-t) - 20\exp(-4t) + 4\exp(-t) + 40\exp(-4t)) = \exp(-t)$$

ラプラス変換による微分方程式解法例２

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 2$$

両辺をラプラス変換

$$\begin{cases} L(y') = sY - y(0) \\ = sY \\ L(y'') = sL(y') - y'(0) \\ = s(sY - y(0)) - y'(0) \\ = s^2Y - 2 \end{cases}$$

より

$Y =$

$=$

$$a + b = 0$$
$$2a + 3b = 2$$

$\therefore Y =$

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$$

$y =$

検証（初期値のみ）

$$\begin{cases} y(0) = -2\exp(0) + 2\exp(0) = 0 \\ y' = 6\exp(-3t) - 4\exp(-2t) \\ y'(0) = 6\exp(0) - 4\exp(0) = 2 \end{cases}$$

ラプラス変換による微分方程式解法例３

$$\boxed{y'' + 5y' + 6y = \exp(-2t) \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 2}$$

両辺をラプラス変換

$$\begin{cases} L(y') = sY - y(0) \\ \quad = sY \\ L(y'') = sL(y') - y'(0) \\ = s(sY - y(0)) - y'(0) \\ \quad = s^2Y - 2 \\ L(\exp(-2t)) = \dfrac{1}{s+2} \end{cases}$$

より

$Y =$

$Y =$

$\because Y =$

$y =$

検算 $y' = e^{-t} - te^{-t} - 2e^{-2t} + 3e^{-3t}$

$y(0) = 0$

$y'(0) = 2$

ラプラス変換による微分方程式解法例４

$$\boxed{y'' + 4y = \exp(-t) \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0}$$

両辺をラプラス変換

$$\begin{cases} L(y') = sY - y(0) \\ \quad = sY \\ L(y'') = s(sY) - y'(0) \\ \quad = s^2Y \\ L(\exp(-t)) = \dfrac{1}{s+1} \end{cases}$$

より

$Y =$

$=$

$=$

ラプラス変換による微分方程式解法例４

$$Y = \frac{a}{s+2i} + \frac{b}{s-2i} + \frac{c}{s+1}$$

$$1 = (s-2i)(s+1)a + (s+2i)(s+1)b + (s+2i)(s-2i)c$$

$$= (a+b+c)s^2 + ((-2i+1)a + (2i+1)b + (2i-2i)c)s + (-2ia + 2ib + 4c)$$

$$\begin{cases} a+b+c = \\ (-2i+1)a + (2i+1)b = \\ -2ia + 2ib + 4c = \end{cases}$$

$$\begin{cases} \\ \qquad\qquad = \qquad\qquad = \end{cases}$$

ラプラス変換による微分方程式解法例４

$$\begin{cases} c = -a-b \\ (-2i+1)a + (2i+1)b = 0 \\ (-2i-4)a + (2i-4)b = 1 \end{cases}$$

$b =$

$$a = \frac{2i+1}{2i-1}\frac{2i-1}{-20i} =$$

$$c = -a-b = \frac{2i+1+2i-1}{20i} = \frac{4i}{20i} =$$

$a =$

$$\frac{4-2i-8i-4-4-8i-2i+4}{2i-1}b = \frac{-20i}{2i-1}b = 1$$

ラプラス変換による微分方程式解法例４

$$Y=\frac{a}{s+2i}+\frac{b}{s-2i}+\frac{c}{s+1}$$

$$a=\frac{2i+1}{-20i}\quad b=\frac{2i-1}{-20i}\quad c=\frac{1}{5}$$

$$\therefore y=$$

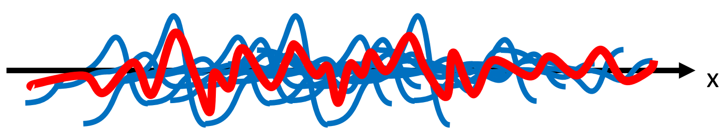
$$=$$

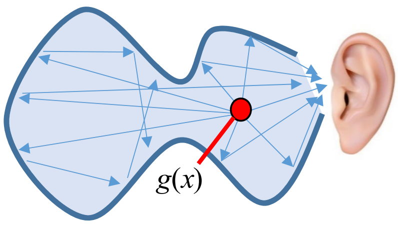
$$=$$

これが $y''+4y=\exp(-t)\quad y(0)=0\quad y'(0)=0$ を満たしているかの検証は省略

．．．意外と大変．簡単にできる方法はないか？

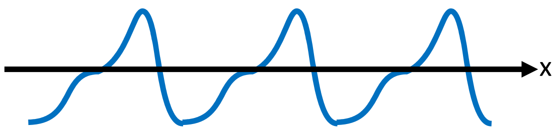
（復習）原音と響きの定式化



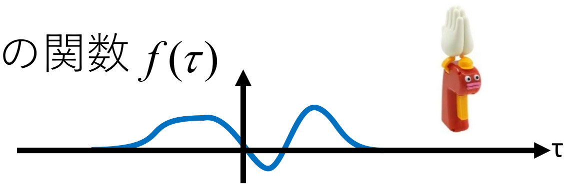


「遅れ時間τに対して振幅がどれだけか」の反響の関数があるなら，

原音　$g(x)$



反響の関数 $f(\tau)$



τだけ遅れた反響音成分は　$\underbrace{f(\tau)}_{\text{遅れτに対応した反響の強さ}}\underbrace{g(x-\tau)}_{\text{τだけ遅れた原信号}}$

これらが**すべてのτで発生し，加算される**から，最終的な信号は

$$\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau$$

これを**関数f(x)とg(x)のたたみ込み積分**とよぶ

ラプラス変換におけるたたみ込み

通常のたたみ込み　$f*g=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau$

ラプラス変換であつかう各関数はx<0では0としている.

$$\begin{cases} f(\tau)=0 \\ g(x-\tau)=0 \end{cases}$$

このため，たたみ込みの積分の有効範囲は

ラプラス変換で扱う関数のたたみ込み

$$f*g=$$

ラプラス変換におけるたたみ込み

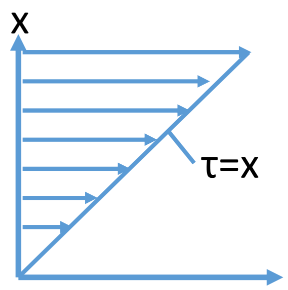
$$f*g=\int_{0}^{x} f(\tau)g(x-\tau)d\tau$$

ラプラス変換してみる

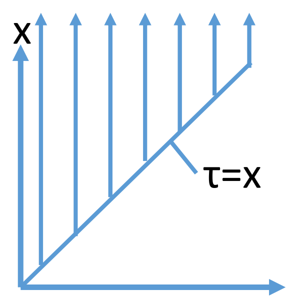
$$L(f*g)=\int_{0}^{\infty} f*g(x)\exp(-sx)dx$$

$$=$$

$$=$$



τを0から x
まで積分
→xを0から∞
まで積分



xをτから∞ま
で積分
→τを0から∞
まで積分

ラプラス変換におけるたたみ込み

$$L(f*g)=\int_0^\infty\left\{\int_\tau^\infty f(\tau)g(x-\tau)\exp(-sx)dx\right\}d\tau$$

x-τ=yと置いて $=$

$=$

$=$

よってラプラス変換においても，たたみ込み積分→掛け算となる

ということは，逆に，$L(f)L(g)$ で表される関数の

逆ラプラス変換は $f*g=\int_0^x f(\tau)g(x-\tau)d\tau$ となる

ラプラス変換による微分方程式解法例４

$$\boxed{y''+4y=\exp(-t)\quad y(0)=0\quad y'(0)=0}$$

両辺をラプラス変換

$$\begin{cases} L(y')=sY-y(0) \\ \qquad =sY \\ L(y'')=s(sY)-y'(0) \\ \qquad =s^2Y \\ L(\exp(-t))=\dfrac{1}{s+1} \end{cases}$$

より $s^2Y+4Y=\dfrac{1}{s+1}$

$$(s^2+4)Y=\frac{1}{s+1}$$

$$Y=\frac{1}{(s^2+4)(s+1)}$$

ここで，たたみ込みを使う．

$Y=$

ラプラス変換表より

$\sin(\omega t)$ ➡ $\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ だから

$$\begin{cases} \dfrac{1}{s^2+4} \quad \rightarrow \\ \dfrac{1}{s+1} \quad \rightarrow \end{cases}$$

ラプラス変換による微分方程式解法例４

$$Y = \frac{1}{s^2+4} \cdot \frac{1}{s+1} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{s^2+4} & \to \dfrac{1}{2}\sin(2t) \\ \dfrac{1}{s+1} & \to \exp(-t) \end{cases}$$

たたみ込み

$$y = \int_0^x f(\tau)g(x-\tau)d\tau =$$

$$=$$

積分を部分積分で解く

$$J = \int_0^x \sin(2\tau)\exp(\tau)d\tau =$$

$$=$$

$$=$$

ラプラス変換による微分方程式解法例４

$$J = \sin(2x)\exp(x) - 2\cos(2x)\exp(x) + 2 - 4J$$

$$J =$$

元の式に代入

$$y =$$

$$=$$

たたみ込みを利用することでより簡単？に計算できた

今日のまとめ

- ラプラス変換をつかって微分方程式を解く練習をした.
- ラプラス変換のたたみ込みの性質を知り，それを使って簡単に？解ける場合を示した.

今日のレポート

ラプラス変換によって次の微分方程式を解け

$$y'' + 4y' + 3y = \exp(-2t) \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 3$$

レポートは紙に書いたものを写真にとり、指定のフォームからアップロードする。Googleアカウントによりアップロードするので、大学が提供しているアカウントを使用すること。画像ファイルは5MB以下に抑えること。

提出締め切り：講義日から一週間以内

期末試験

- 主に練習問題集から出しますが発展的内容も含みます。後半が範囲です。