応用数学第一

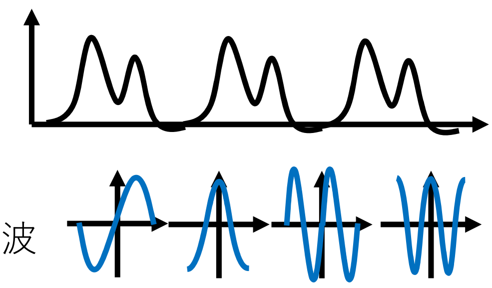
第二回

梶本裕之

日程

講義番号	講義日	講義内容
1	10/1	周期関数、フーリエ級数の定義
2	10/8	フーリエ級数の計算例
3	10/15	ベクトルと関数、直交関数系・複素フーリエ級数
-	10/22	体育祭
4	10/29	周期関数のたたみこみ、パーセバルの等式
5	11/5	非周期関数、フーリエ変換の定義・計算例
6	11/12	フーリエ変換の性質
-	11/19	中間確認問題（自習）
7	11/26	デルタ関数とフーリエ変換、たたみこみのフーリエ変換、パーセバルの等式
8	12/3	離散時間信号と離散時間フーリエ変換（教科書外）
9	12/10	離散フーリエ変換（教科書外）
10	12/17	離散フーリエ変換の性質（教科書外）
11	1/7	サンプリング定理
12	1/14	ラプラス変換の定義と性質
13	1/21	線形常微分方程式のラプラス変換による解法
-	1/28	期末テスト準備（自習）
-	2/4	期末確認テスト（全範囲。現在は大学を予定）

前回のまとめ



1. 動機「関数」の性質を「分析」したい
2. 多くの現象は「周期的」である
3. 周期関数であれば，同じ周期関数である正弦波の「合成」によって表せるのではないか
4. 表せると仮定した表式をたてた
5. その未知係数を積分計算によって求めた
6. 動機は解決されたか：ある関数が，複数の「周波数」の波の合成であることがわかったという意味で「分析」できた.

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(\frac{2n\pi}{T}x) + b_n \sin(\frac{2n\pi}{T}x) \right)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

（前回）フーリエ級数展開まとめ

周期Tの波形 f(t)は次のように分解できる

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(\frac{2n\pi}{T}x) + b_n \sin(\frac{2n\pi}{T}x) \right)$$

ただし

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

周期２πの場合

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)$$

ただし

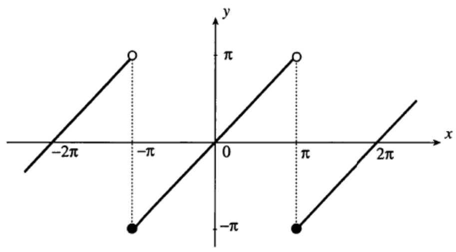
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

今日の目標

- フーリエ級数展開を，多数の計算例で身につける．
- Gibbs現象を知る．

のこぎり波のフーリエ級数展開



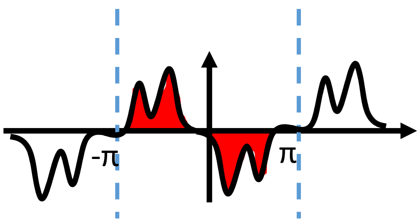
周期2π，-π～πの間でf(x)=xとなる
関数をフーリエ級数展開する．

$a_n =$

$=$

$=$

∵奇関数×偶関数＝奇関数（後述）．
奇関数の原点対称の積分は0



$b_n =$

$=$

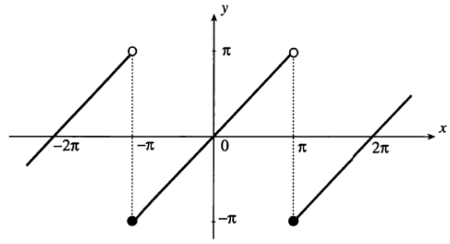
$=$

$=$

$= \left\{ \right.$

あるいは

のこぎり波のフーリエ級数展開



$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{n} \sin(nx)$$

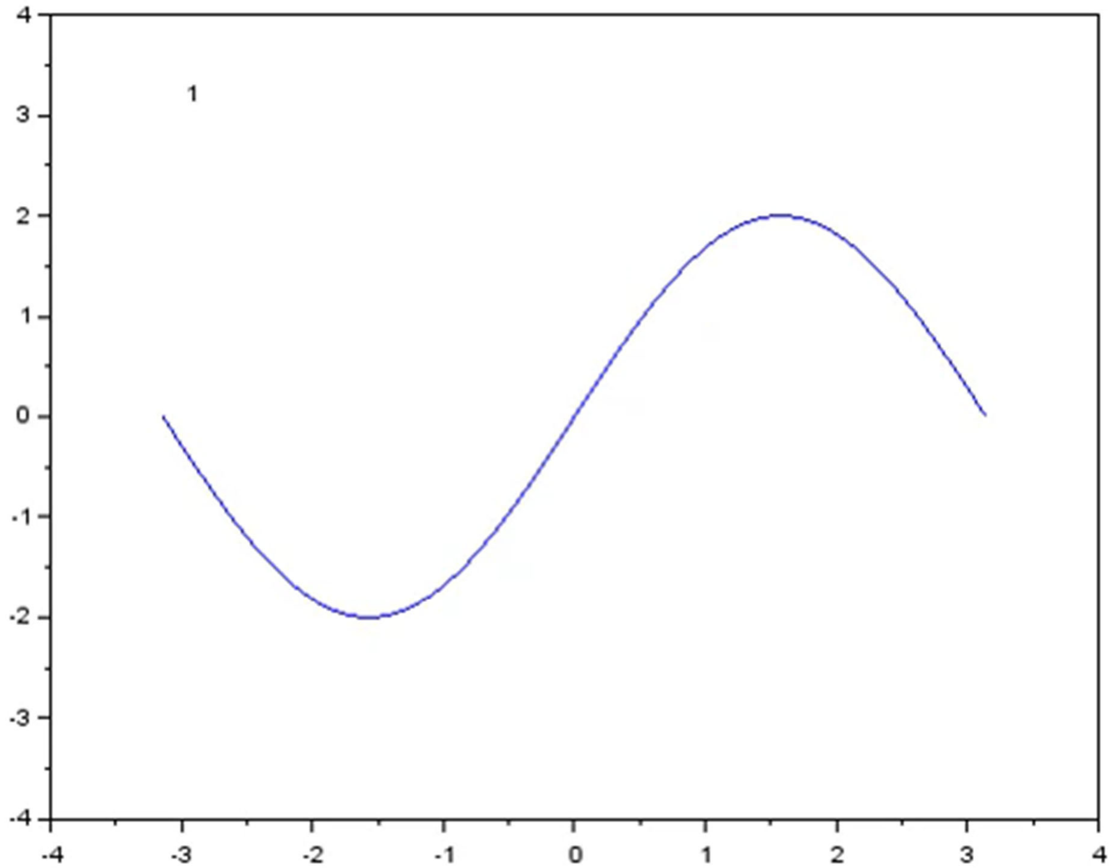
$$= 2\sin(x) - \frac{2}{2}\sin(2x) + \frac{2}{3}\sin(3x) - \frac{2}{4}\sin(4x) + \frac{2}{5}\sin(5x) - \frac{2}{6}\sin(6x) + \frac{2}{7}\sin(7x) - \cdots$$

書いてみよう．

n=1まで　　n=2まで　　n=3まで

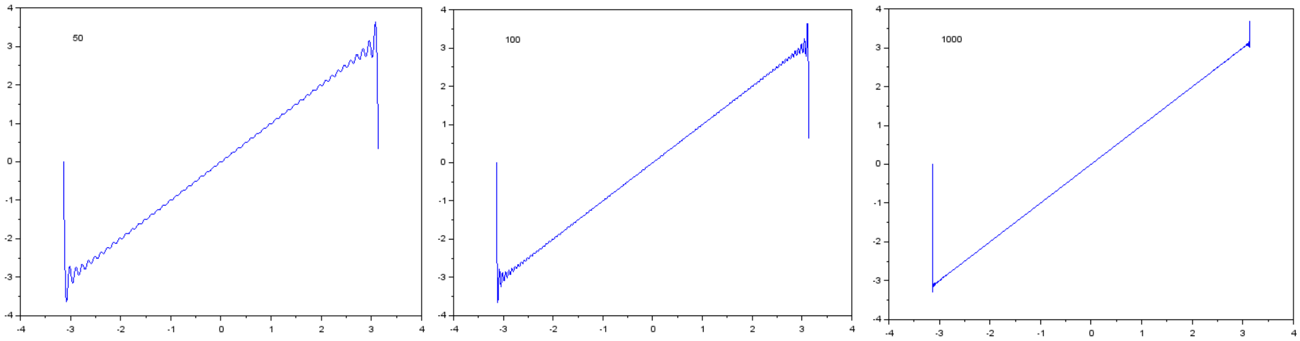
確かにのこぎり波に近づいていくようにみえる

のこぎり波のフーリエ級数展開（アニメーション）

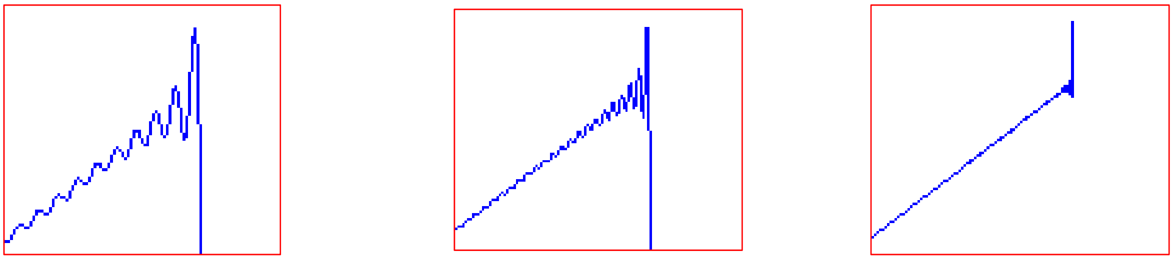


n=1から50までのシミュレート

Gibbs現象



n=50まで　　n=100まで　　n=1000まで



全体的にはもとの関数に収束しているが，不連続点で「ヒゲ」が出る．
このヒゲは**細くなっていくが，大きさ自体は小さくなっていかない**

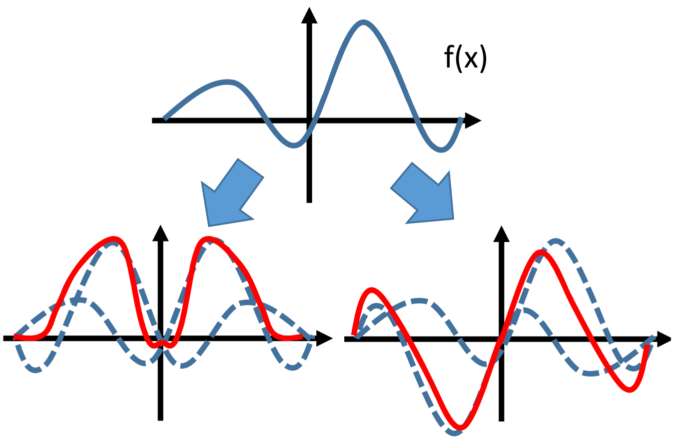
任意の関数は，偶関数成分と奇関数成分に分けられる

任意の関数f(x)に対して，

$g(x) =$

$h(x) =$

とすると，



よってg(x)は偶関数，h(x)は奇関数であり，

$f(x) = g(x) + h(x)$

またこの分解は一意である．なぜならもし異なる分解g’, h’があると，

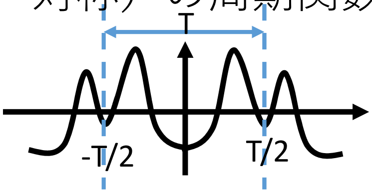
$f(x) =$

左辺は偶関数，右辺は奇関数で矛盾．

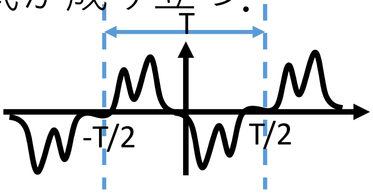
つまり**任意の関数は偶関数と奇関数の合成で一意に表せる．**

偶関数と奇関数の積分

（前回の資料より）偶関数（y軸線対称な関数）と奇関数（原点対称）の周期関数に対しては次の式が成り立つ．



$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = 2\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$$



$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = 0$$

$\boxed{\text{偶関数×奇関数＝奇関数}}$

g(x)を偶関数，h(x)を奇関数とする．

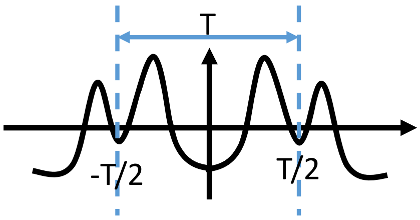
$g(-x) =$

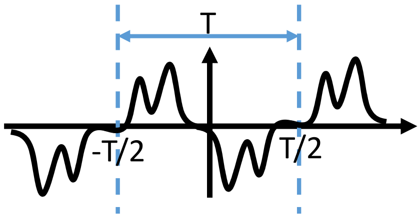
$h(-x) =$

k(x)を偶関数×奇関数とすると，

よってk(x)は奇関数である

偶関数，奇関数のフーリエ級数展開





f(x)が偶関数の場合

$b_n =$

$=$

∵奇関数×偶関数＝奇関数.
奇関数の原点対称の積分は0

$f(x) \approx$

f(x)が奇関数の場合

$a_n =$

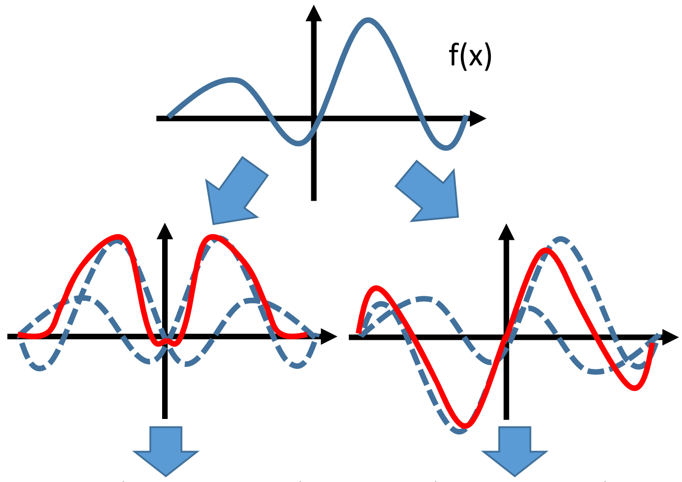
$=$

∵奇関数×偶関数＝奇関数.
奇関数の原点対称の積分は0

$f(x) \approx$

つまり，偶関数はcosの成分「だけ」で表せ，奇関数はsinの成分「だけ」で表せる．

フーリエ級数展開と偶関数・奇関数成分



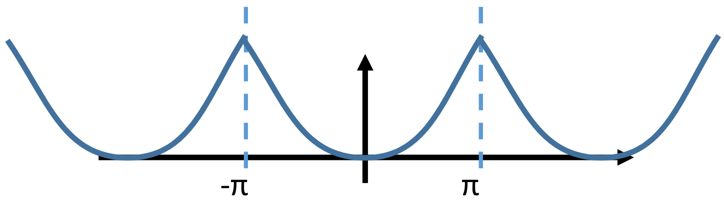
$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(\frac{2n\pi}{T}x)\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\sin(\frac{2n\pi}{T}x)\right)$$

$$f(x)\approx\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(\frac{2n\pi}{T}x)+b_n\sin(\frac{2n\pi}{T}x)\right)$$

結論：**フーリエ級数展開におけるcos, sin関数の項は，**
関数の偶関数成分と奇関数成分をそれぞれ分解したものである．

フーリエ級数展開の例さらに：x^2，周期2π

周期2π，-π～πの間で$f(x)=x^2$となる関数をフーリエ級数展開．
偶関数だからcosの項だけで表せるはず．



$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx$$

$=$ $=$

$=$

$=$

$=$

$=$

0～πの積分範囲で正負相殺

nが0の場合，

$a_0 =$

$=$

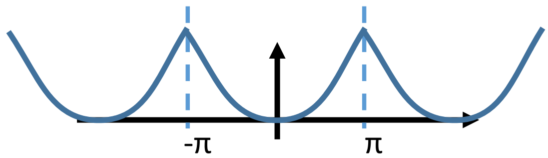
$=$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin(nx)dx$$
$$=0$$

フーリエ級数展開の例さらに：x^2, 周期2πの場合

$$a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2} \quad a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$$

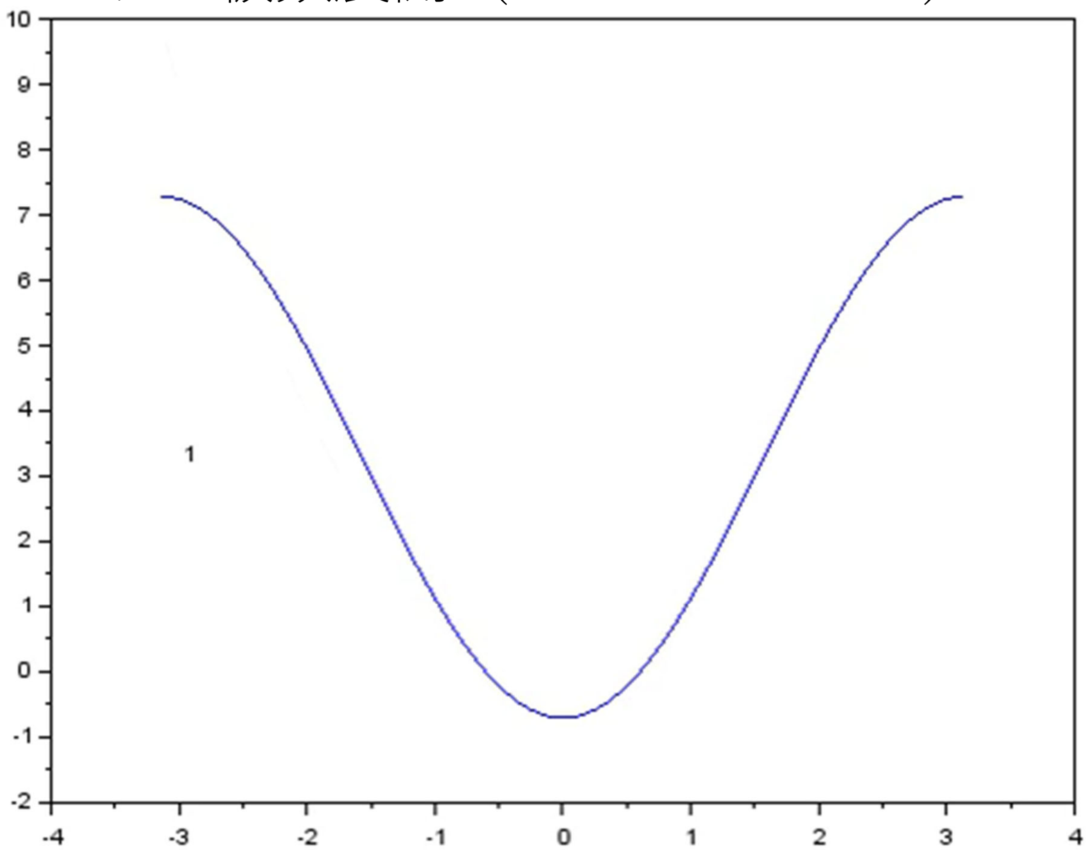
$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos(x) + \cos(2x) - \frac{4}{9}\cos(3x) + \cdots$$



書いてみよう.

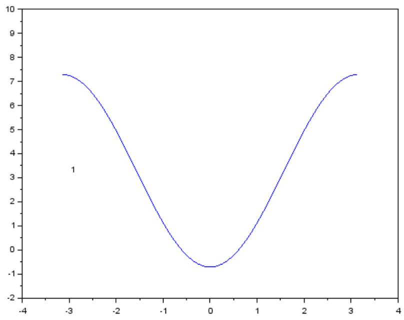
n=0まで　　n=1まで　　n=2まで

X^2のフーリエ級数展開（アニメーション）

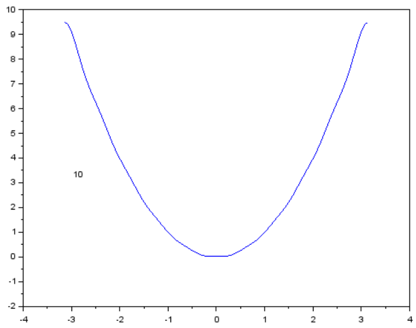


n=1から50までのシミュレート

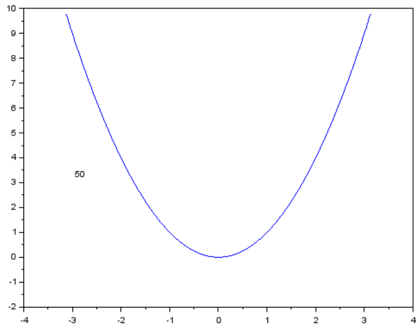
この場合はGibbs現象は生じない



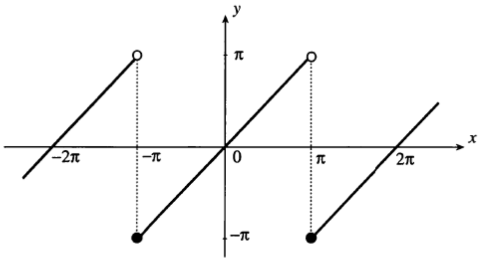
n=1まで



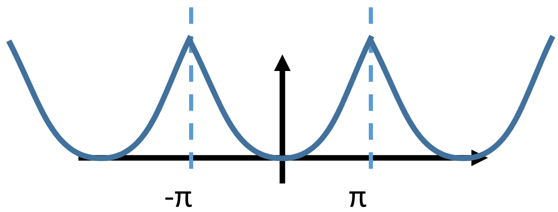
n=10まで



n=50まで



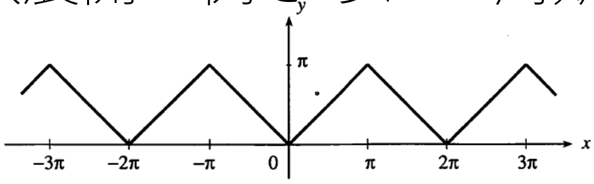
生じる



生じない

Gibbs現象は「不連続な点がある」場合に生じる.

フーリエ級数展開の例さらに：周期2πの三角波



偶関数なのでcosの項だけ計算すれば良い.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx =$$

$$=$$

$$=$$

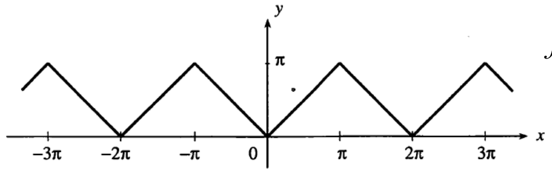
$$=$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx =$$

$$=$$

$$=$$

フーリエ級数展開の例さらに：周期2πの三角波



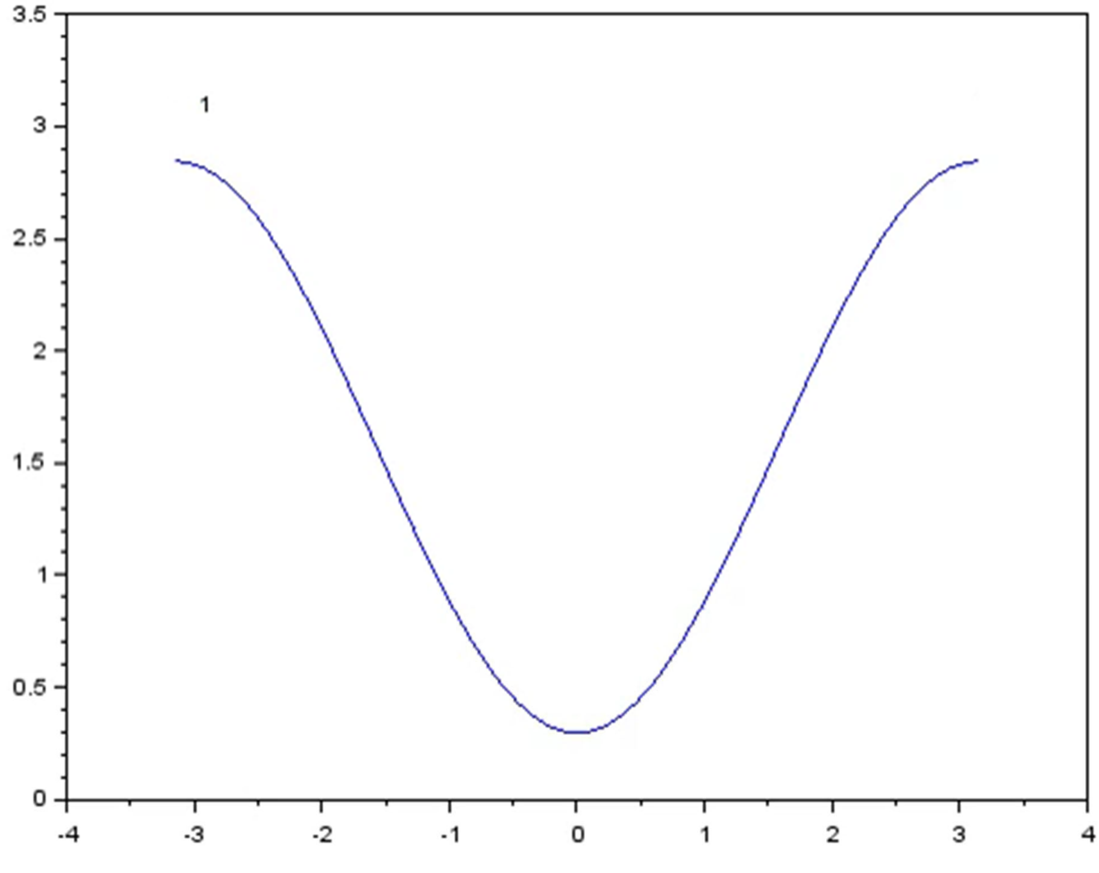
$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos(x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + \frac{1}{25}\cos(5x) + \ldots \right)$$

書いてみよう.

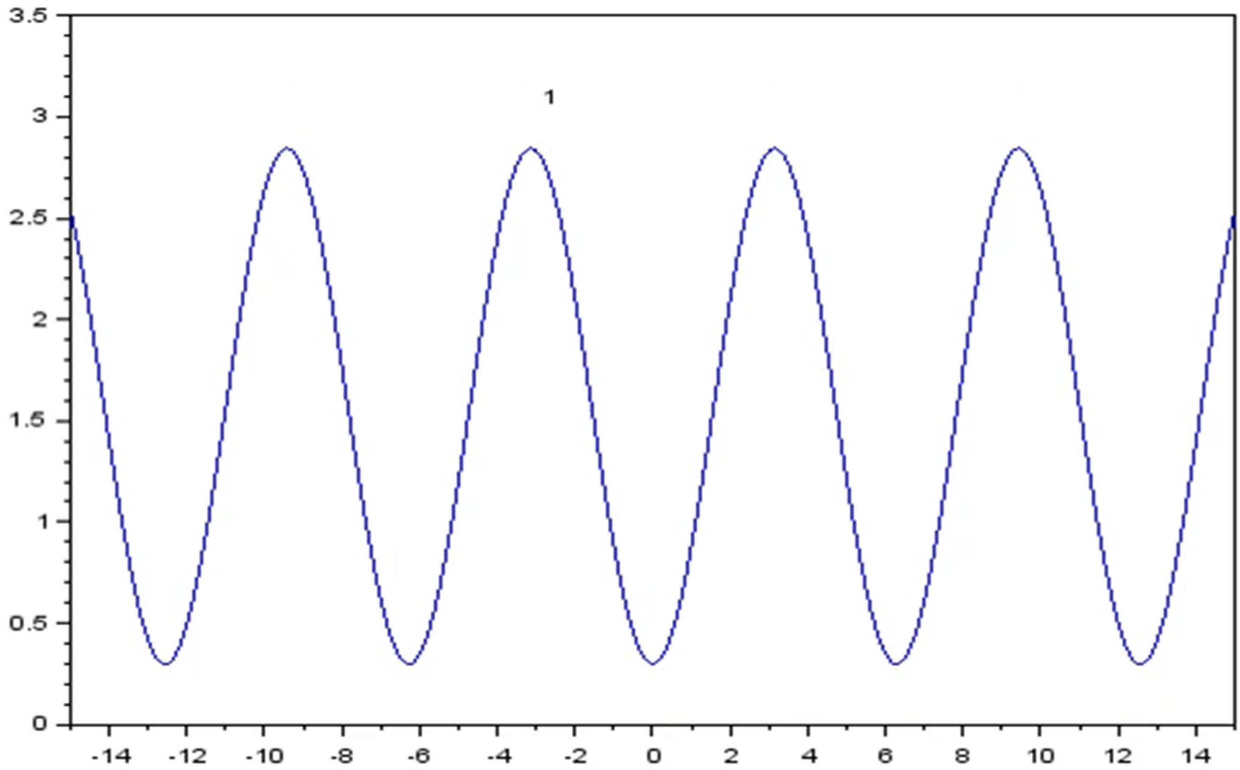
n=0まで　　n=1まで　　n=3まで

三角波のフーリエ級数展開（アニメーション）



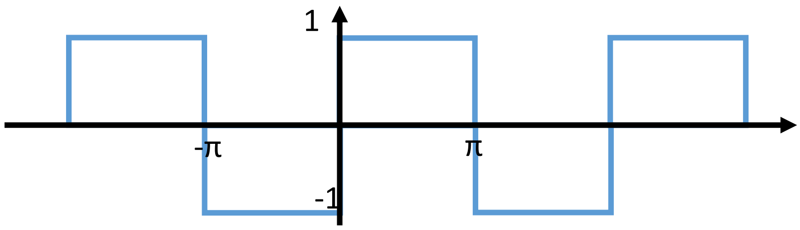
n=1から20までのシミュレート

三角波のフーリエ級数展開（アニメーション）



X軸の計算範囲を広げた場合．n=1から20まで

フーリエ級数展開の例さらに：周期2πの矩形波



奇関数なのでsinの項だけ計算すれば良い．

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx =$$

$$=$$

$$=$$

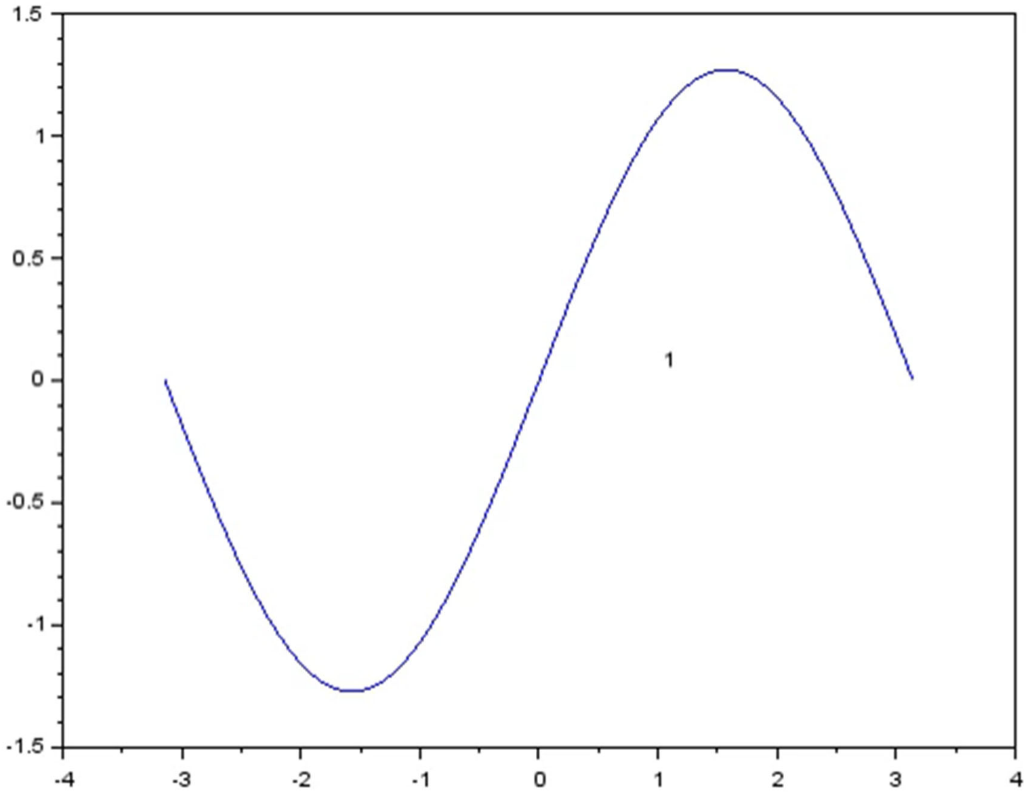
フーリエ級数展開の例さらに：周期2πの矩形波

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)$$
$$= \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \ldots \right)$$

書いてみよう（ここでは4/πを無視して書いてみる）.

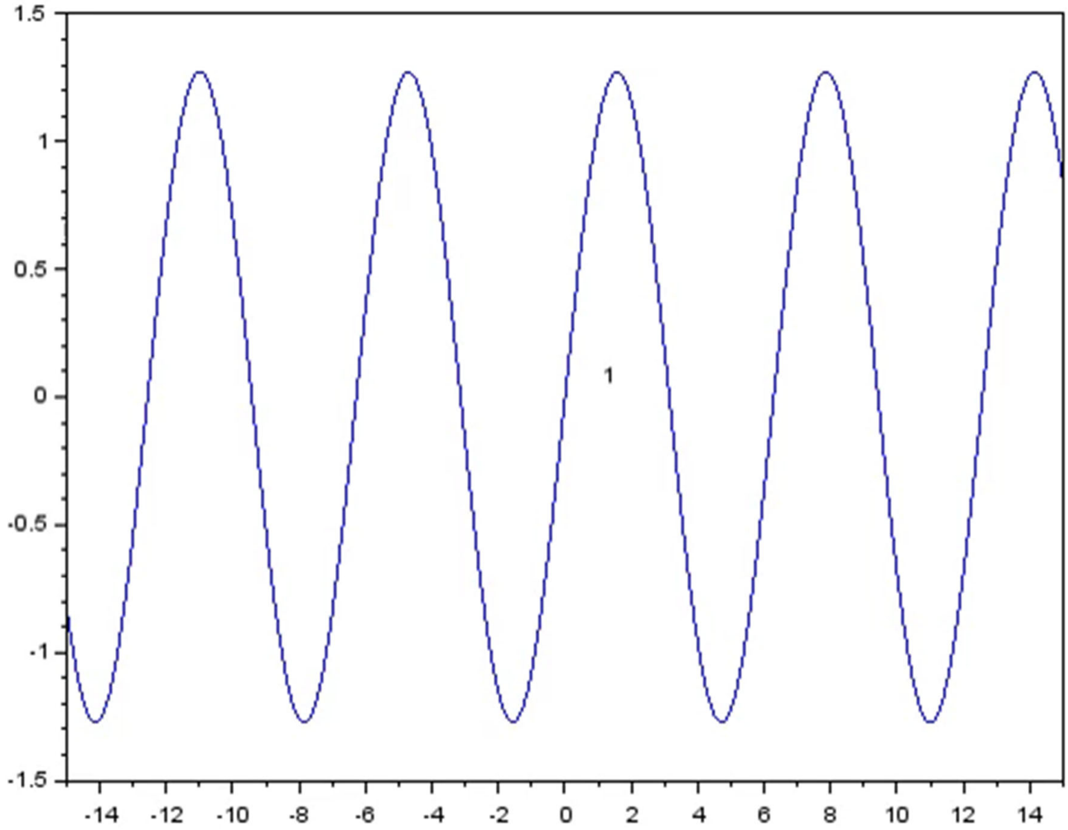
n=1まで　　n=3まで　　n=5まで

矩形波のフーリエ級数展開（アニメーション）



n=1から50までのシミュレート

矩形波のフーリエ級数展開（アニメーション）



X軸の計算範囲を広げた場合．n=1から50まで

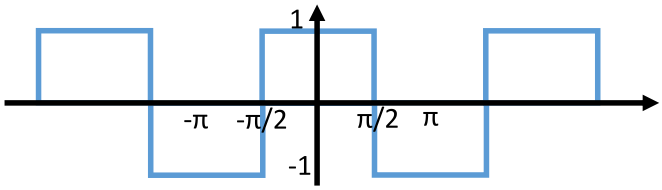
今日のまとめ

1. 関数は偶関数と奇関数の和で表せる．
2. フーリエ級数展開のcos，sinの項は，偶関数，奇関数成分を表す
3. 不連続な点のある関数は，フーリエ級数展開の際にGibbs現象を生じる
4. 自由にフーリエ級数展開をできるようになった．

次回は複素フーリエ級数展開

今日のレポート

1. 左図のような周期2πの矩形波のフーリエ級数展開をせよ
（授業の例とは異なり偶関数）



レポートは紙に書いたものを写真にとり、下記からアップロードする。Googleアカウントによりアップロードするので、大学が提供しているアカウントを使用すること。画像ファイルは5MB以下に抑えること。

https://forms.gle/tovLwBV1eauiuoAVA

提出締め切り：講義日から一週間以内