

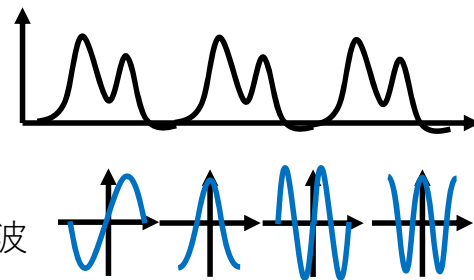


## 日程

講義番号	講義日	講義内容	pdf	video	レポート締め切り
1	10/6	周期関数、フーリエ級数の定義	<a href="#">[ pdf ](2022年版)</a>	<a href="#">video</a>	10/13
2	10/13	フーリエ級数の計算例	<a href="#">[ pdf ](2021年版)</a>	<a href="#">video</a>	10/20
3	10/20	複素フーリエ級数、直交関数系	<a href="#">[ pdf ](2021年版)</a>	<a href="#">video</a>	10/27
4	10/27	周期関数のたたみこみ、パーセバルの等式	<a href="#">[ pdf ](2021年版)</a>	<a href="#">video</a>	11/3
-	11/3	文化の日			
5	11/10	非周期関数、フーリエ変換の定義・計算例	<a href="#">[ pdf ](2021年版)</a>	<a href="#">video</a>	11/17
-	11/17	調布祭準備			
6	11/24	フーリエ変換の性質	<a href="#">[ pdf ](2021年版)</a>	<a href="#">video</a>	12/1
7	12/1	デルタ関数とフーリエ変換、たたみこみのフーリエ変換、パーセバルの等式	<a href="#">[ pdf ](2021年版)</a>	<a href="#">video</a>	12/8
-	12/8	中間確認テスト (前半。現在は大学を予定)	中間確認テスト用問題集	<a href="#">[ pdf ](2021年版)</a>	
8	12/15	離散時間信号と離散時間フーリエ変換 (教科書外)	<a href="#">[ pdf ](2021年版)</a>	<a href="#">video</a>	12/22
9	12/22	離散フーリエ変換 (教科書外)	<a href="#">[ pdf ](2021年版)</a>	<a href="#">video</a>	1/5
10	1/5	離散フーリエ変換の性質 (教科書外)	<a href="#">[ pdf ](2021年版)</a>	<a href="#">video</a>	1/12
11	1/12	サンプリング定理	<a href="#">[ pdf ](2021年版)</a>	<a href="#">video</a>	1/19
12	1/19	ラプラス変換の定義と性質	<a href="#">[ pdf ](2021年版)</a>	<a href="#">video</a>	1/26
13	1/26	線形常微分方程式のラプラス変換による解法	<a href="#">[ pdf ](2021年版)</a>	<a href="#">video</a>	2/2
-	2/2	期末用自習	<a href="#">[ pdf ](2021年版)</a>		
-	2/9	期末確認テスト (後半。現在は大学を予定)			

# 前回のまとめ

1. 動機「関数」の性質を「分析」したい
2. 多くの現象は「周期的」である
3. 周期関数であれば、同じ周期関数である正弦波の「合成」によって表せるのではないか
4. 表せると仮定した表式をたてた
5. その未知係数を積分計算によって求めた
6. 動機は解決されたか：ある関数が、複数の「周波数」の波の合成であることがわかったという意味で「分析」できた。



$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \right)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx$$



## (前回) フーリエ級数展開まとめ

周期Tの波形 f(t)は次のように分解できる

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \right)$$

ただし

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx$$

周期  $2\pi$  の場合

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

ただし

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$



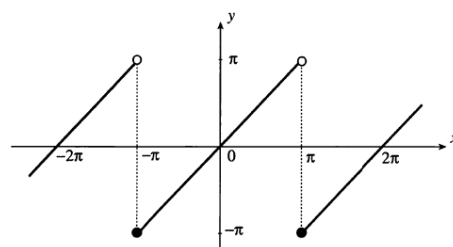
# 今日の目標

- フーリエ級数展開を，多数の計算例で身につける。
- Gibbs現象を知る。



## のこぎり波のフーリエ級数展開

周期 $2\pi$ ， $-\pi \sim \pi$ の間で $f(x)=x$ となる関数をフーリエ級数展開する。



$$a_n =$$

$$b_n =$$

$$=$$

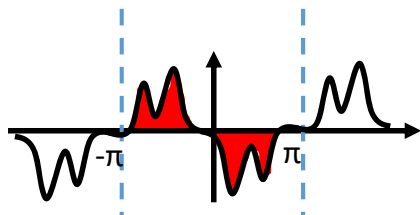
$$=$$

$$=$$

$$=$$

∵ 奇関数 × 偶関数 = 奇関数 (後述) .  
奇関数の原点对称の積分は0

$$=$$

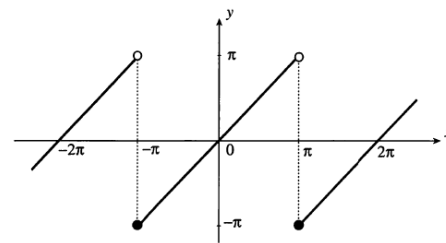


$$= \left\{ \right.$$

あるいは



# のこぎり波のフーリエ級数展開



$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{n} \sin(nx)$$

$$= 2 \sin(x) - \frac{2}{2} \sin(2x) + \frac{2}{3} \sin(3x) - \frac{2}{4} \sin(4x) + \frac{2}{5} \sin(5x) - \frac{2}{6} \sin(6x) + \frac{2}{7} \sin(7x) - \dots$$

書いてみよう.

n=1まで

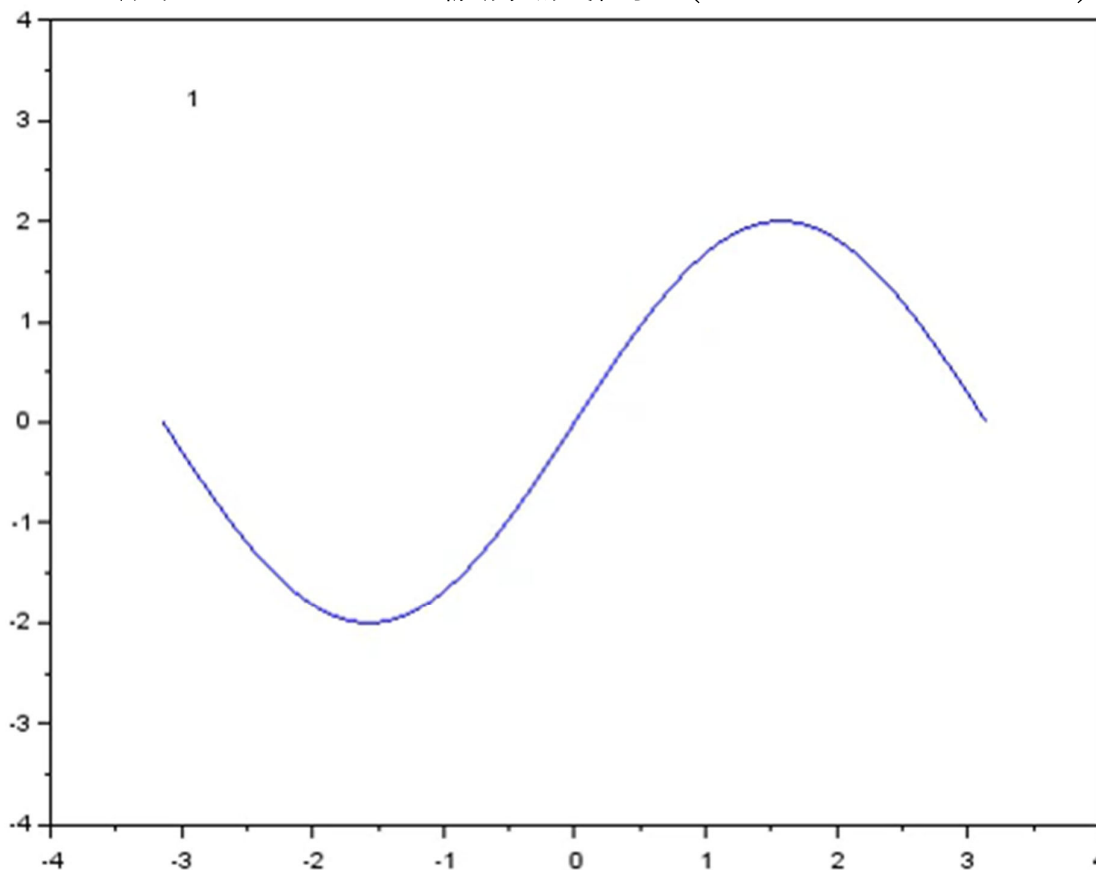
n=2まで

n=3まで

確かにのこぎり波に近づいていくように見える



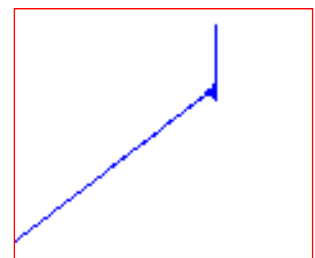
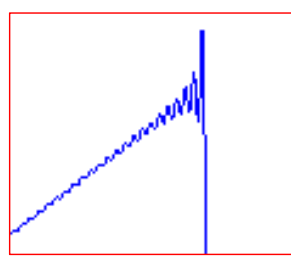
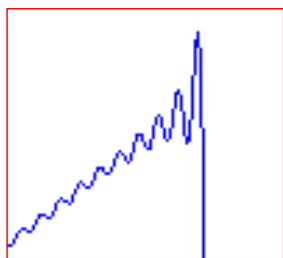
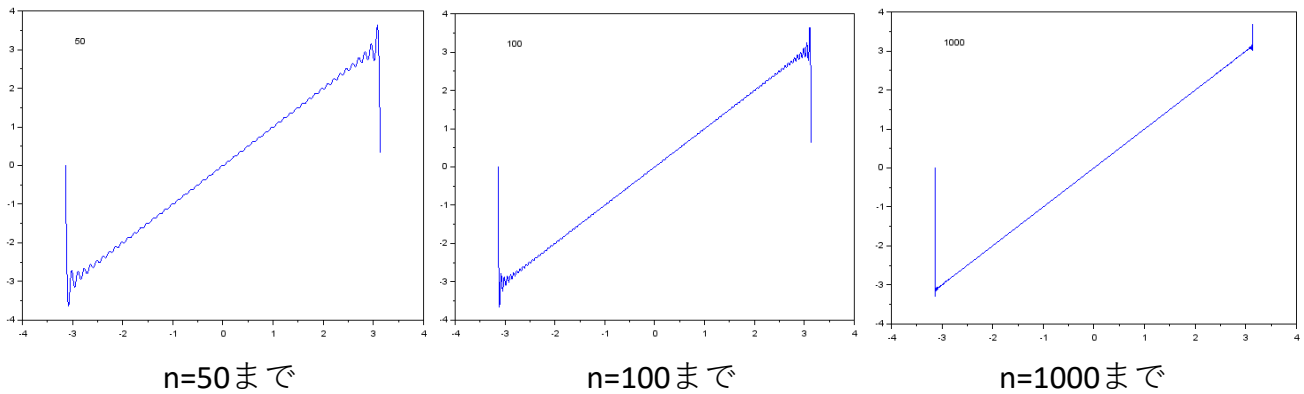
## のこぎり波のフーリエ級数展開 (アニメーション)



n=1から50までのシミュレート



# Gibbs現象



全体的にはもとの関数に収束しているが、不連続点で「ヒゲ」が出る。  
このヒゲは細くなっていくが、大きさ自体は小さくなっていかない



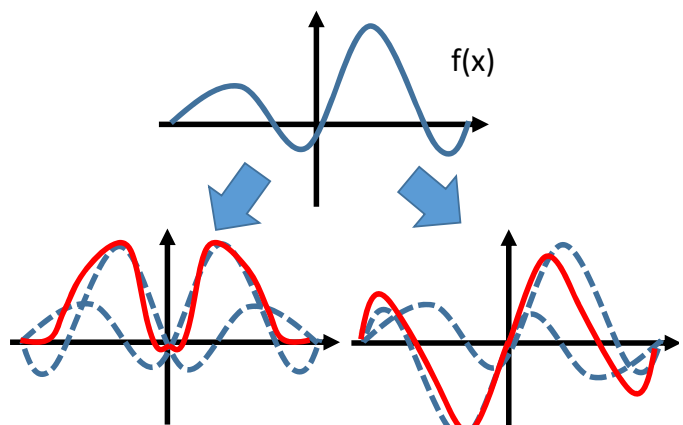
任意の関数は、偶関数成分と奇関数成分に分けられる

任意の関数 $f(x)$ に対して、

$$g(x) =$$

$$h(x) =$$

とすると、



よって $g(x)$ は偶関数、 $h(x)$ は奇関数であり、

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

またこの分解は一意である。なぜならもし異なる分解 $g', h'$ があると、

$$f(x) =$$

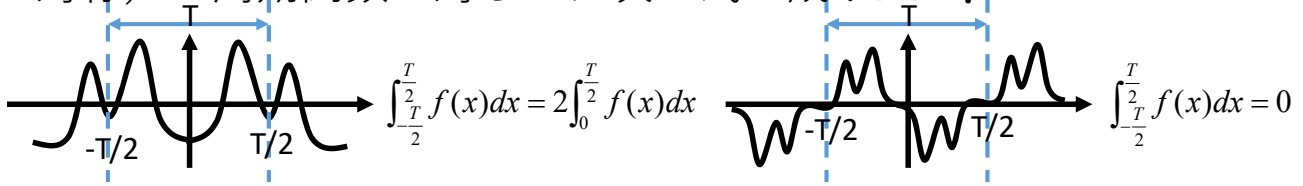
左辺は偶関数、右辺は奇関数で矛盾。

つまり任意の関数は偶関数と奇関数の合成で一意に表せる。



# 偶関数と奇関数の積分

(前回の資料より) 偶関数 (y軸線対称な関数) と奇関数 (原点对称) の周期関数に対しては次の式が成り立つ.



偶関数 × 奇関数 = 奇関数

$g(x)$ を偶関数,  $h(x)$ を奇関数とする.

$$g(-x) =$$

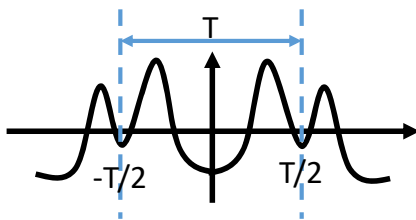
$$h(-x) =$$

$k(x)$ を偶関数 × 奇関数とすると,

よって $k(x)$ は奇関数である



# 偶関数, 奇関数のフーリエ級数展開



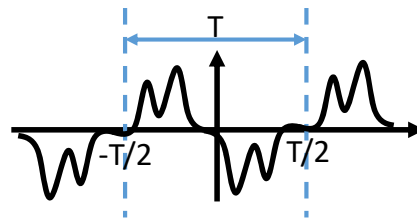
$f(x)$ が偶関数の場合

$$b_n =$$

$$=$$

∵ 奇関数 × 偶関数 = 奇関数,  
奇関数の原点对称の積分は0

$$f(x) \approx$$



$f(x)$ が奇関数の場合

$$a_n =$$

$$=$$

∵ 奇関数 × 偶関数 = 奇関数,  
奇関数の原点对称の積分は0

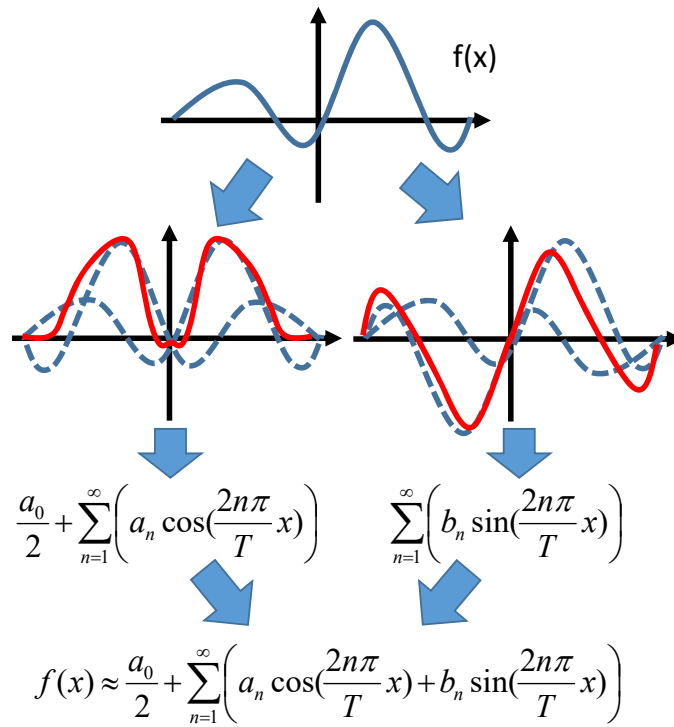
$$f(x) \approx$$

つまり, 偶関数はcosの成分「だけ」で表せ, 奇関数はsinの成分「だけ」で表せる





# フーリエ級数展開と偶関数・奇関数成分

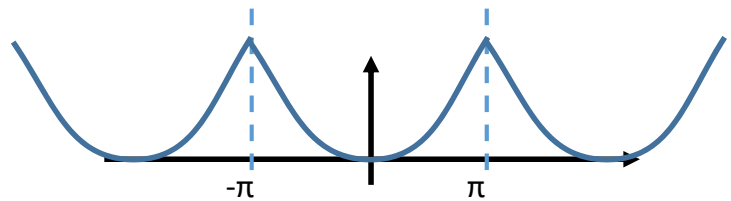


結論：フーリエ級数展開におけるcos, sin関数の項は、関数の偶関数成分と奇関数成分をそれぞれ分解したものである。



## フーリエ級数展開の例さらに： $x^2$ ，周期 $2\pi$

周期 $2\pi$ ， $-\pi \sim \pi$ の間で $f(x)=x^2$ となる関数をフーリエ級数展開。  
偶関数だからcosの項だけで表せるはず。



$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

=

=

=

=

=

$0 \sim \pi$ の積分範囲で正負相殺

$n$ が0の場合、

$$a_0 =$$

=

=

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(nx) dx$$

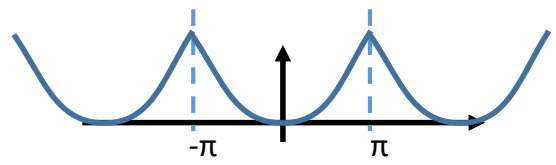
$$= 0$$



フーリエ級数展開の例さらに： $x^2$ ，周期 $2\pi$ の場合

$$a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2} \quad a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos(x) + \cos(2x) - \frac{4}{9} \cos(3x) + \dots$$



書いてみよう。

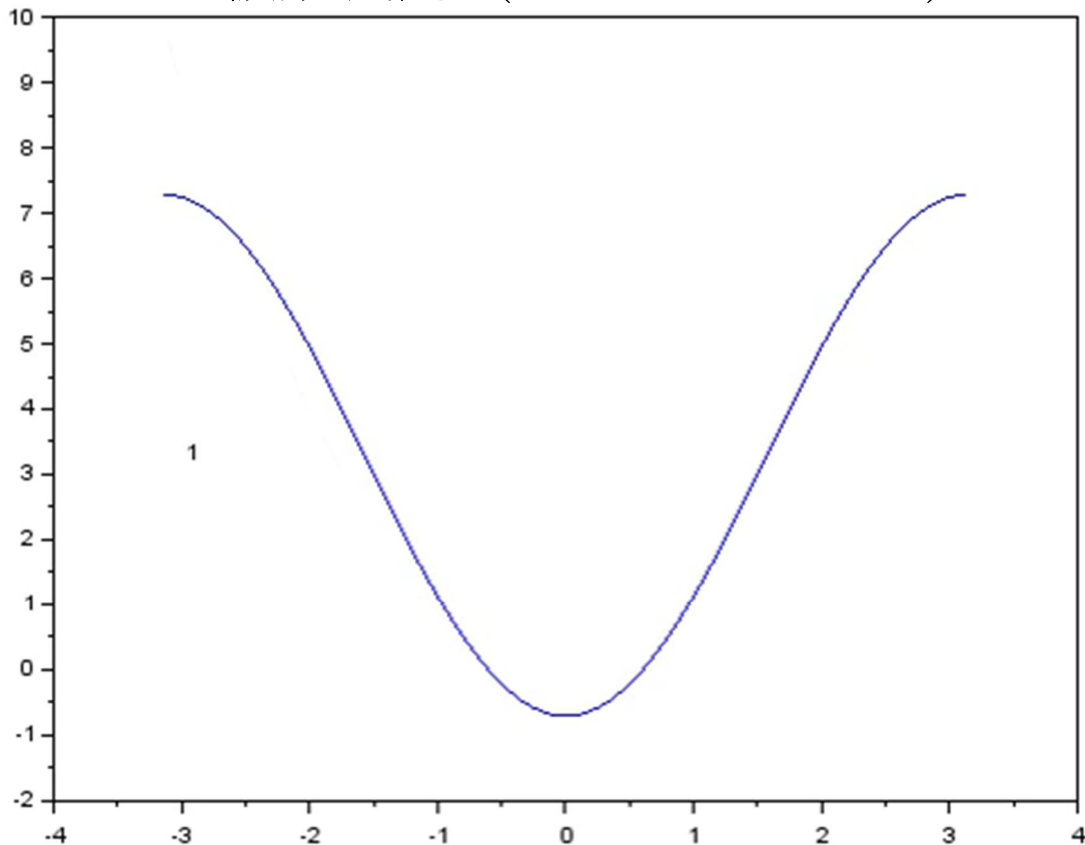
n=0まで

n=1まで

n=2まで



$x^2$ のフーリエ級数展開（アニメーション）

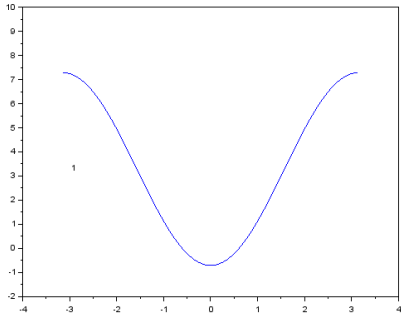


n=1から50までのシミュレート

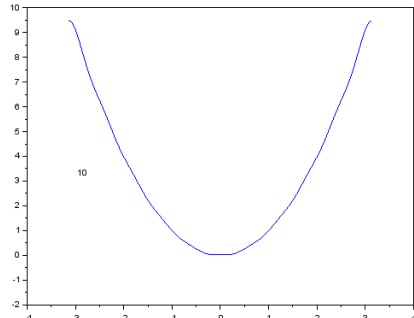




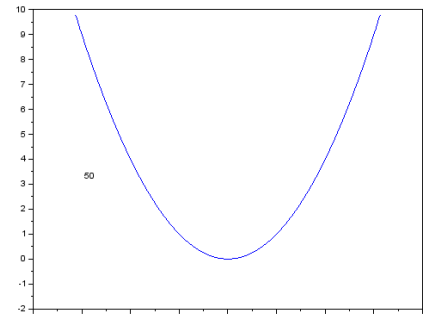
この場合はGibbs現象は生じない



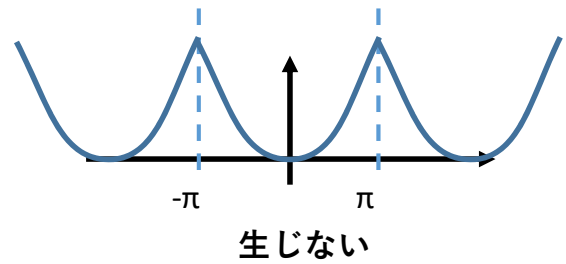
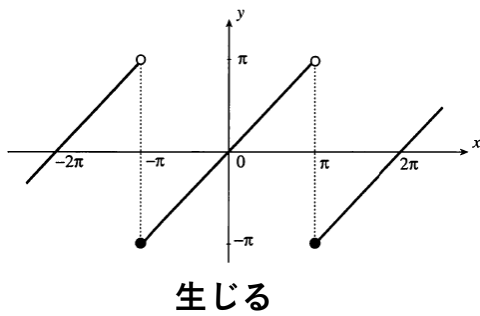
n=1まで



n=10まで



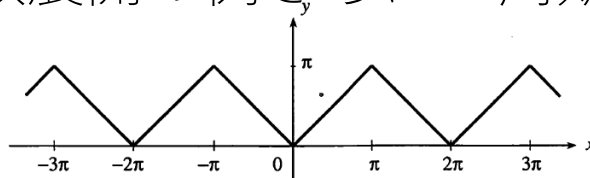
n=50まで



Gibbs現象は「不連続な点がある」場合に生じる.



フーリエ級数展開の例さらに：周期 $2\pi$ の三角波



偶関数なのでcosの項だけ計算すれば良い.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx =$$

=

=

=

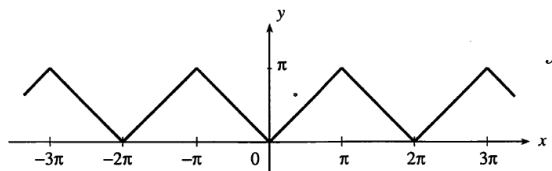
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx =$$

=

=



# フーリエ級数展開の例さらに：周期 $2\pi$ の三角波



$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos(x) + \frac{1}{9} \cos(3x) + \frac{1}{25} \cos(5x) + \dots \right)$$

書いてみよう.

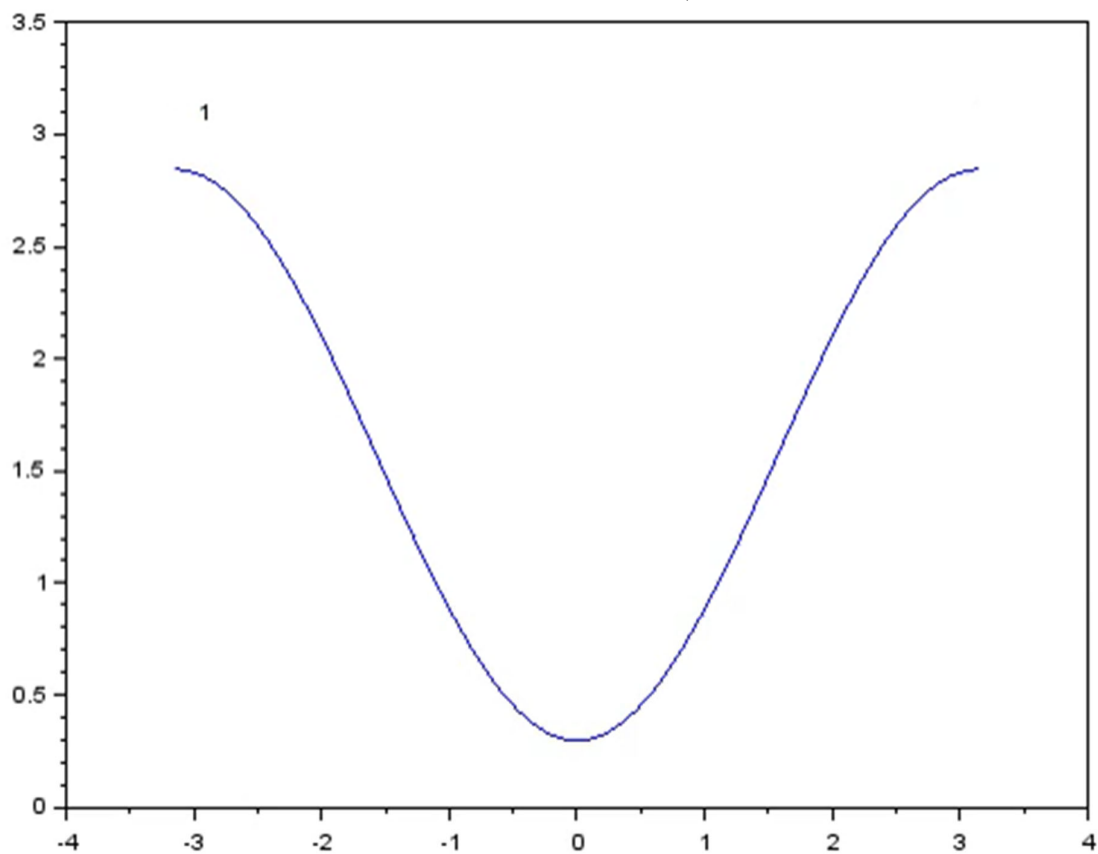
n=0まで

n=1まで

n=3まで



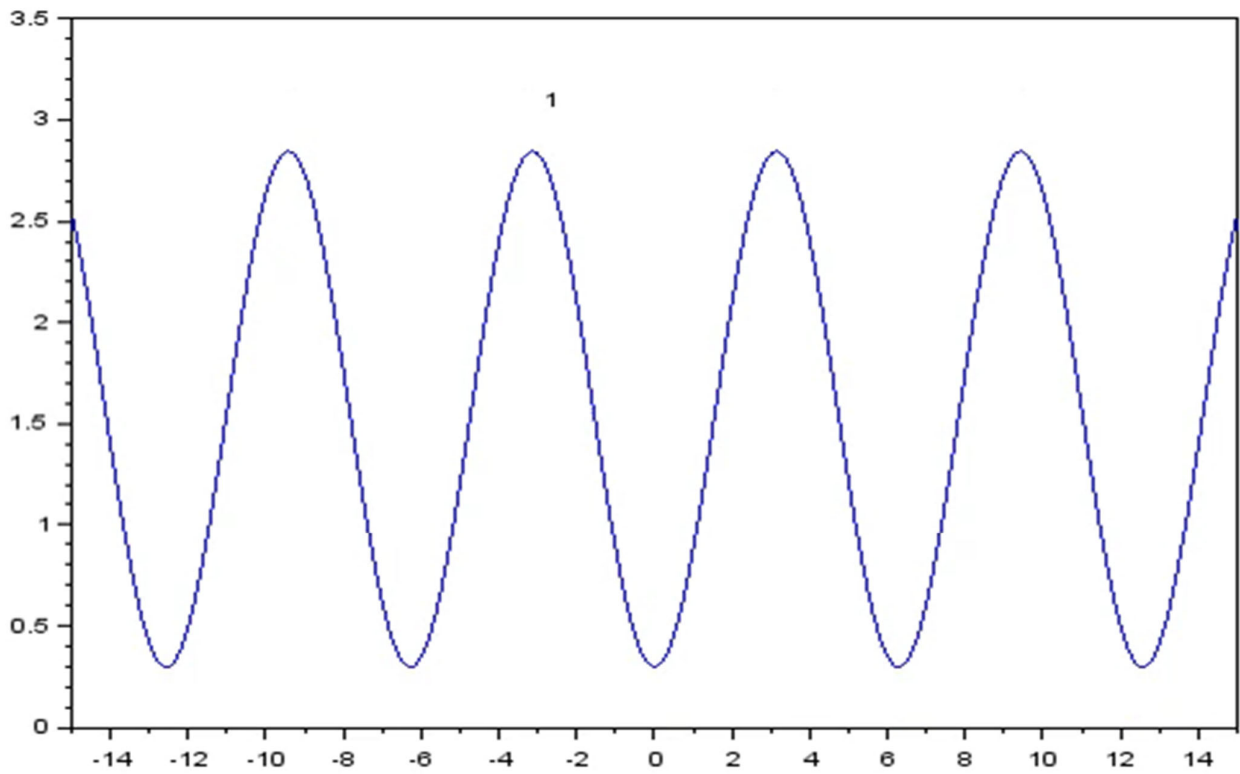
## 三角波のフーリエ級数展開（アニメーション）



n=1から20までのシミュレート

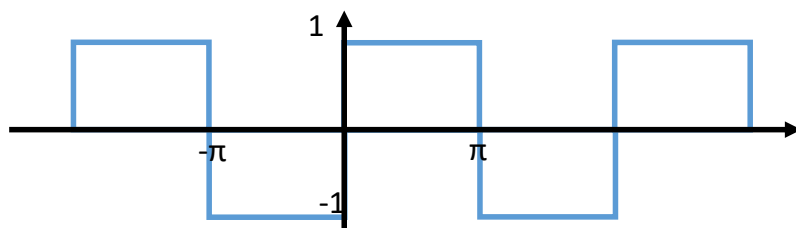


# 三角波のフーリエ級数展開 (アニメーション)



x軸の計算範囲を広げた場合. n=1から20まで

## フーリエ級数展開の例さらに：周期 $2\pi$ の矩形波



奇関数なのでsinの項だけ計算すれば良い.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx =$$

=

=



# フーリエ級数展開の例さらに：周期 $2\pi$ の矩形波

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$
$$= \frac{4}{\pi} \left( \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \right)$$

書いてみよう（ここでは $4/\pi$ を無視して書いてみる）。

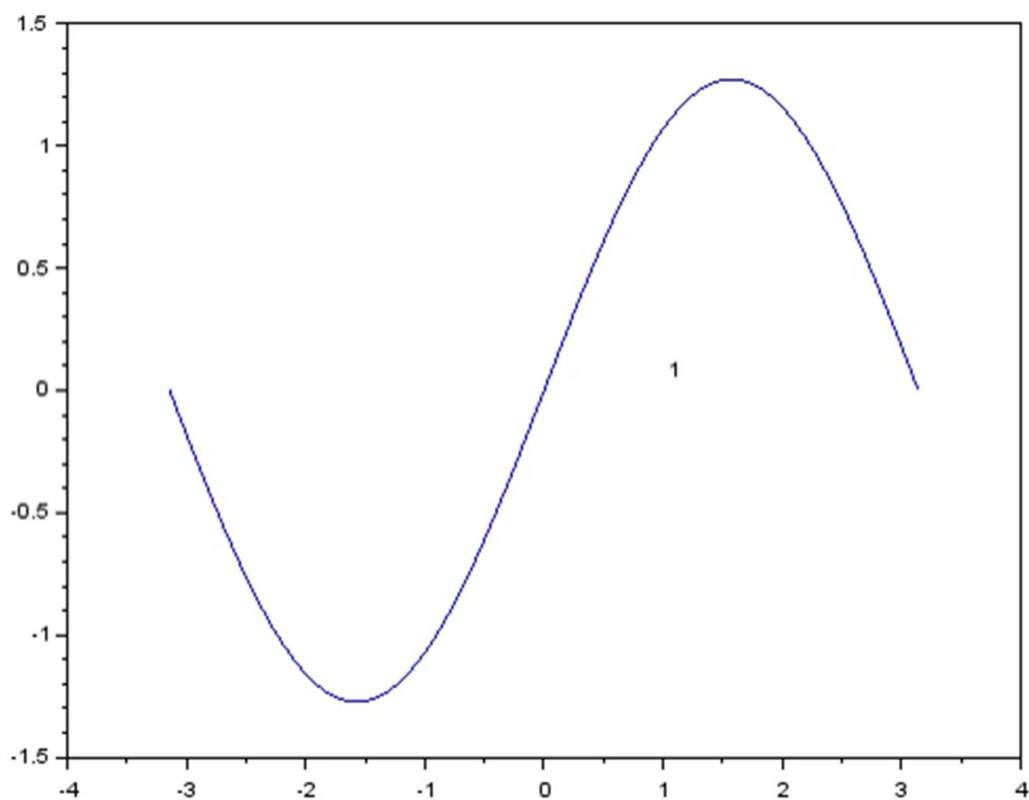
n=1まで

n=3まで

n=5まで



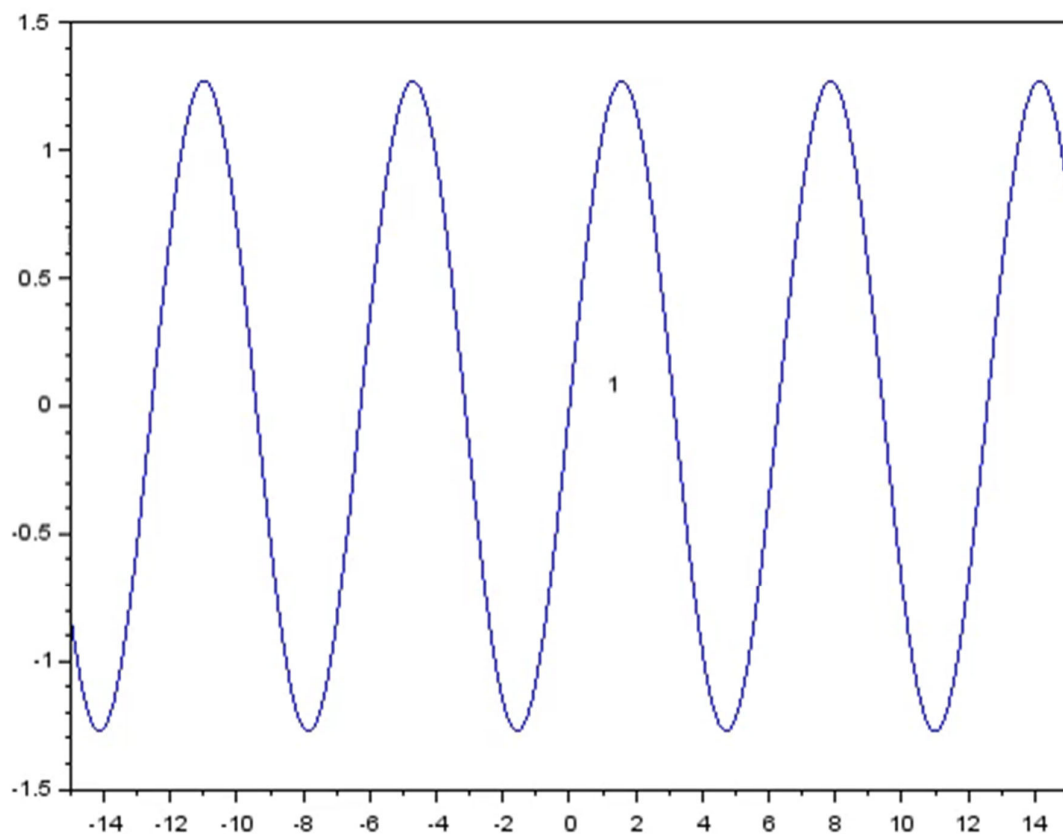
## 矩形波のフーリエ級数展開（アニメーション）



n=1から50までのシミュレート



## 矩形波のフーリエ級数展開（アニメーション）



x軸の計算範囲を広げた場合. n=1から50まで



### 今日のまとめ

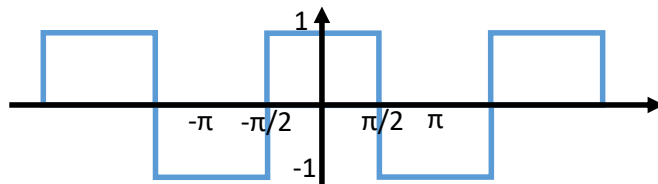
1. 関数は偶関数と奇関数の和で表せる.
2. フーリエ級数展開のcos, sinの項は, 偶関数, 奇関数成分を表す
3. 不連続な点のある関数は, フーリエ級数展開の際にGibbs現象を生じる
4. 自由にフーリエ級数展開をできるようになった.

次回は複素フーリエ級数展開



# 今日のレポート

1. 左図のような周期 $2\pi$ の矩形波の  
フーリエ級数展開をせよ  
(授業の例とは異なり偶関数)



レポートは紙に書いたものを写真にとり、指定のフォームからアップロードする。Googleアカウントによりアップロードするので、大学が提供しているアカウントを使用すること。画像ファイルは5MB以下に抑えること。

提出締め切り：講義日から一週間以内

