応用数学第一

第三回

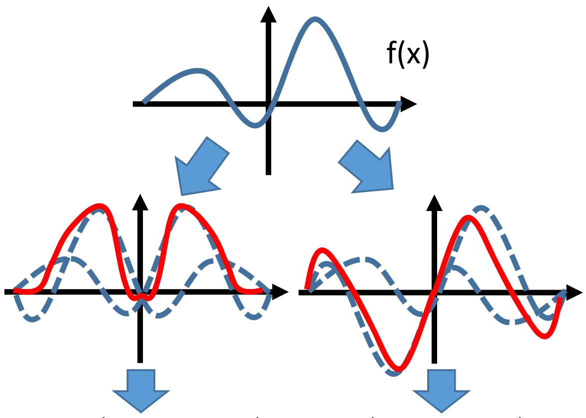
梶本裕之

日程

講義番号	講義日	講義内容
1	10/1	周期関数、フーリエ級数の定義
2	10/8	フーリエ級数の計算例
3	10/15	複素フーリエ級数、直交関数系
-	10/22	体育祭
4	10/29	周期関数のたたみこみ、パーセバルの等式
5	11/5	非周期関数、フーリエ変換の定義・計算例
6	11/12	フーリエ変換の性質
-	11/19	中間確認問題（自習）
7	11/26	デルタ関数とフーリエ変換、たたみこみのフーリエ変換、パーセバルの等式
8	12/3	離散時間信号と離散時間フーリエ変換（教科書外）
9	12/10	離散フーリエ変換（教科書外）
10	12/17	離散フーリエ変換の性質（教科書外）
11	1/7	サンプリング定理
12	1/14	ラプラス変換の定義と性質
13	1/21	線形常微分方程式のラプラス変換による解法
-	1/28	期末テスト準備（自習）
-	2/4	期末確認テスト（全範囲。現在は大学を予定）

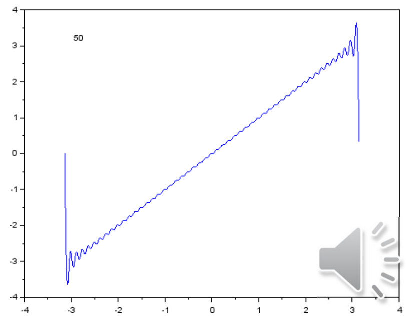
前回のまとめ

1. 関数は偶関数と奇関数の和で表せる.
2. フーリエ級数展開のcos, sinの項は, 偶関数, 奇関数成分を表す
3. 不連続な点のある関数は, フーリエ級数展開の際にGibbs現象を生じる
4. 自由にフーリエ級数展開をできるようになった.



$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(\frac{2n\pi}{T}x)\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\sin(\frac{2n\pi}{T}x)\right)$$

$$f(x)\approx\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(\frac{2n\pi}{T}x)+b_n\sin(\frac{2n\pi}{T}x)\right)$$



今日の目標

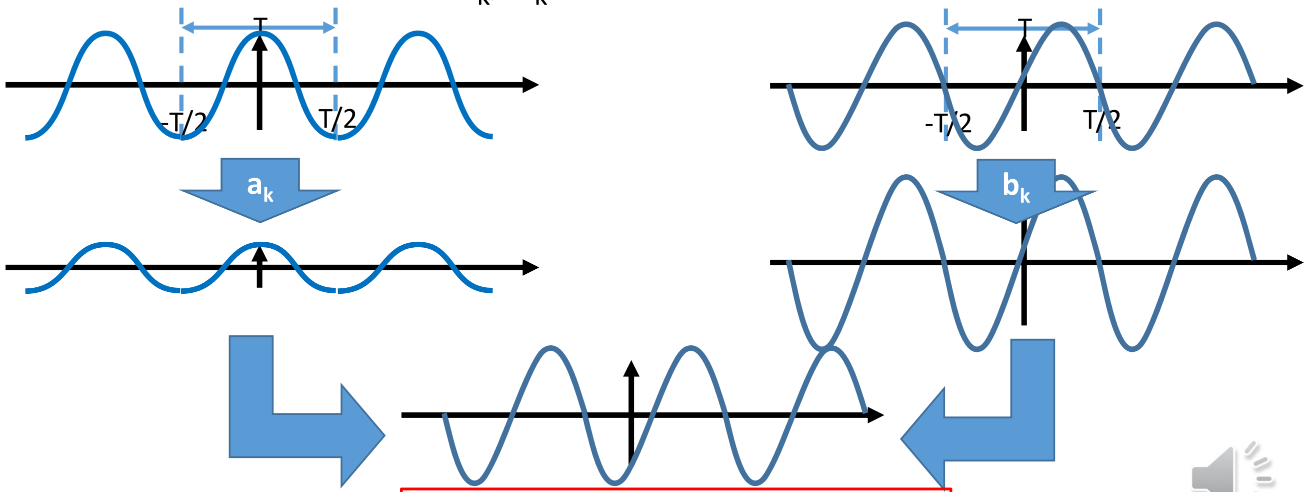
- 複素フーリエ級数展開を導入する.
- 直交基底について理解する.

フーリエ級数展開におけるある周波数成分

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\frac{2n\pi}{T} x) + b_n \sin(\frac{2n\pi}{T} x) \right)$$

Nがある値kの時（周波数=kx/T）の成分を抜き出すと

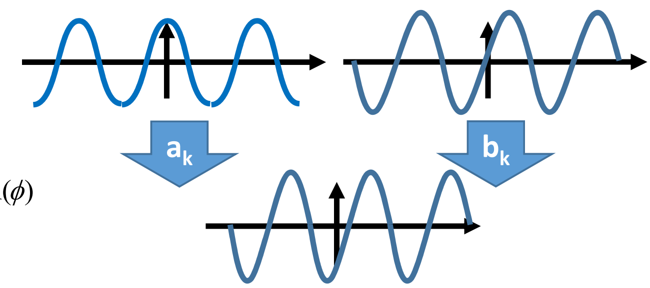
これはcos波とsin波を，a_k, b_kの重みをかけて足すことに相当.



これは何を意味するか？

フーリエ級数展開におけるある周波数成分

$$a_k \cos(\frac{2k\pi}{T} x) + b_k \sin(\frac{2k\pi}{T} x)$$



加法定理から $\sin(\theta+\phi) = \sin(\theta)\cos(\phi) + \cos(\theta)\sin(\phi)$

ここで,

となるA, θを選ぶと,

$$a_k \cos(\frac{2k\pi}{T} x) + b_k \sin(\frac{2k\pi}{T} x) =$$

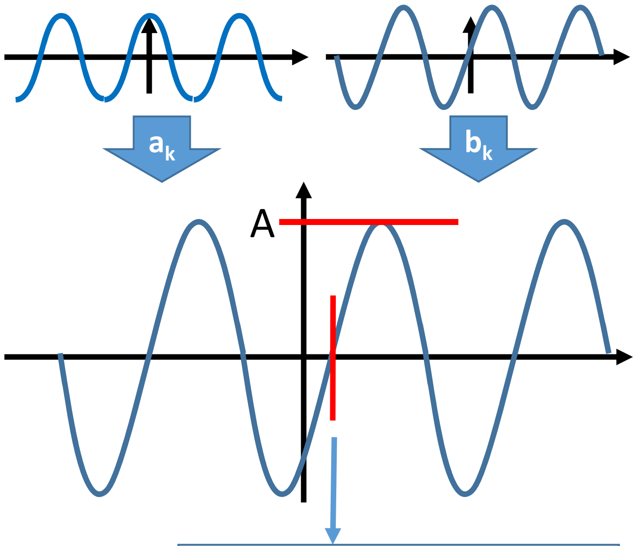
$$=$$

つまり，**同じ周波数のcosとsinの和は，a_k, b_kがどのような重み付けであっても，同じ周波数の，位相のずれた正弦波となる.**

フーリエ級数展開におけるある周波数成分

$$a_k\cos(\frac{2k\pi}{T}x)+b_k\sin(\frac{2k\pi}{T}x)=A\sin(\theta+\frac{2k\pi}{T}x)$$

ただし，$a_k=A\sin(\theta)$　$b_k=A\cos(\theta)$



$$A\sin(\theta+\frac{2k\pi}{T}x)=A\sin(\frac{2k\pi}{T}(x+\frac{T}{2k\pi}\theta))$$

より，

$$-\frac{T}{2k\pi}\theta$$

Aを求める：

より，

これは**振幅**を意味する

θを求める：

より，

これは**位相**（ずれ）と等価

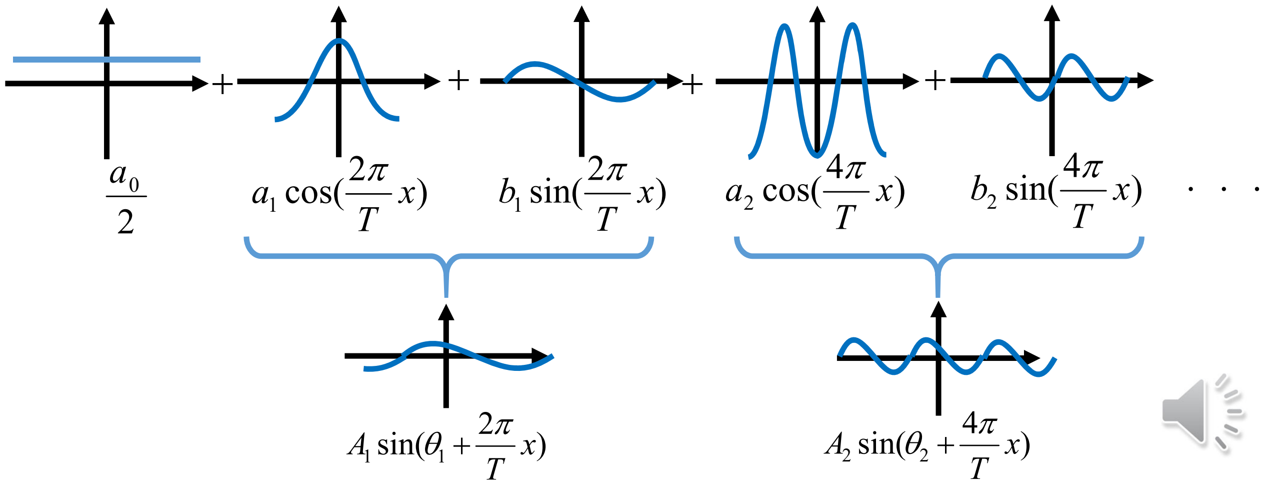
フーリエ級数展開における別の表現

これまでの展開から，フーリエ級数展開は

$$f(x)\approx\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(\frac{2n\pi}{T}x)+b_n\sin(\frac{2n\pi}{T}x)\right)$$

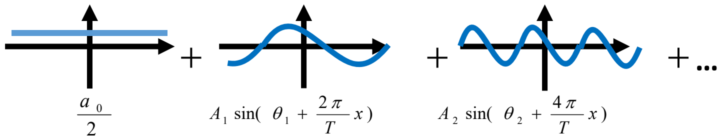
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(\theta_n+\frac{2n\pi}{T}x)$$

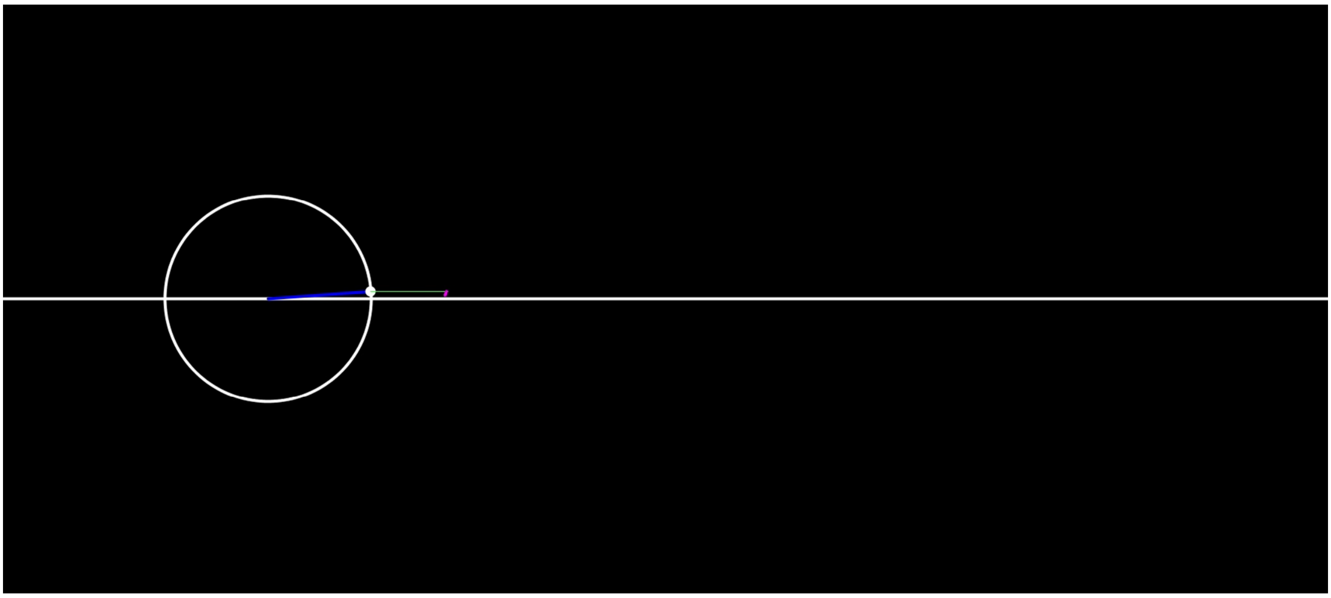
つまり，**振幅と位相の情報を持った正弦波**の合成で表現できる．
この場合も未知係数の数（各周波数２個）は変わっていない．



振幅と位相の情報を持った正弦波の合成のイメージ

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\theta_n + \frac{2n\pi}{T}x)$$



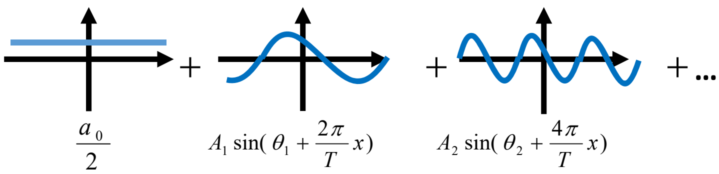


https://github.com/HiroyukiKajimoto/AppliedMathematics/blob/master/sketch_3_fourier_drawing.pde

$\sin(\theta_n + \frac{2n\pi}{T}x)$ の重ね合わせによって三角波，矩形波が合成される

振幅と位相という２つの情報

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\theta_n + \frac{2n\pi}{T}x)$$



この表現では，**振幅と位相**の情報が明示的に現れ，各周波数が「**どれだけ**」・「**どのように（ずれて）**」いるか端的に表せる．
しかし未知数の一部がsin関数の引数のため数学的に扱いにくい．
そこで，sin関数の代わりに**exp関数**を使って式を変換してみる．

$$\exp(j\theta) = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$
$$\exp(-j\theta) = \cos(\theta) - j\sin(\theta)$$

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\theta_n + \frac{2n\pi}{T}x)$$

$$=$$

expによる表現

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\theta_n + \frac{2n\pi}{T}x)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2j} \left\{ \exp(j(\theta_n + \frac{2n\pi}{T}x)) - \exp(-j(\theta_n + \frac{2n\pi}{T}x)) \right\}$$

$=$

$=$

$=$

第3項：n′=-nと変換.
未知係数をまとめてB_nとした.

シグマの範囲の移り変わりに注意.
元の第1項もn=0で含まれる.

- このように表記すると，**振幅と位相の情報は係数c_nに集約**される．
- なおc_nは複素数で，位相は複素数の偏角．
- シグマの範囲が変わっているため未知数の数は変化していない．

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j\frac{2n\pi}{T}x)$$

係数c_nを求めるため，exp(-j2mπx/T)を掛けて周期Tで両辺を積分．

なぜマイナスが付くかは後述

積分とΣの順序が交換できるとして

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\exp(-j\frac{2m\pi}{T}x)dx \approx$$

$=$

$=$

周期Tの周期関数．n=m以外はすべて
正負が（虚数成分も含め）相殺して0.
これは最初の式でマイナスをつけたか
らできたこと.

複素フーリエ級数展開

$$f(x) \approx \sum_{n=--\infty}^{\infty} c_n \exp(j\frac{2n\pi}{T}x)$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\exp(-j\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

マイナスが付くことに注意

T=2πの場合

フーリエ級数展開と複素フーリエ級数展開の対比

複素フーリエ級数展開

$$f(x) \approx \sum_{n=--\infty}^{\infty} c_n \exp(j\frac{2n\pi}{T}x)$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\exp(-j\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

元のフーリエ級数展開

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(\frac{2n\pi}{T}x) + b_n \sin(\frac{2n\pi}{T}x)\right)$$

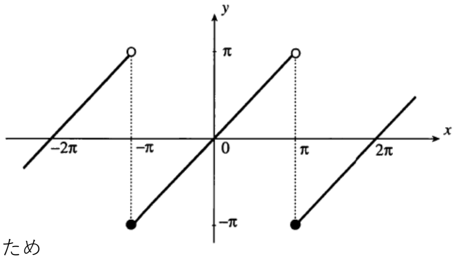
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

- ２種類のフーリエ級数展開はお互いに変換可能，等価である．
- Sin,cosという二種類の「基底関数」が，expに集約された．
- 未知係数の数は変わっていない．
- 元のフーリエ級数展開が，同じ周期の項をsin,cosという形で2つ持つのに対し，exp(), exp(-)という形で２つ持つ．

のこぎり波の複素フーリエ級数展開

周期2π，-π～πの間でf(x)=xとなる関数を複素フーリエ級数展開.



=

周期2πで正負対称の周期関数のため

=

ただしn=0ではこの積分は出来ないので別途計算

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$

=

=

$$\exp(j\theta) = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$
$$\exp(-j\theta) = \cos(\theta) - j\sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(\exp(j\theta) + \exp(-j\theta)\right)$$

=

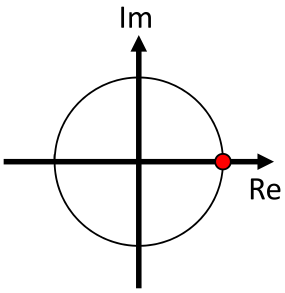
先週のフーリエ級数展開での結果と同値

よって .

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{n} \sin(nx)$$

複素フーリエ級数展開の基底関数のイメージ

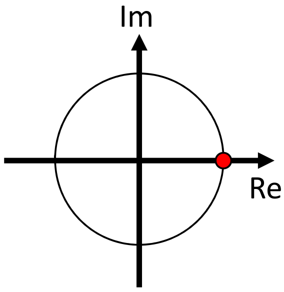
$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j\frac{2n\pi}{T}x)$$



$\exp(j\frac{2\pi}{T}x)$

=

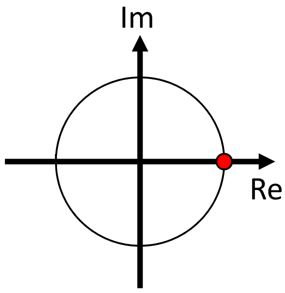
n=1



$\exp(-j\frac{2\pi}{T}x)$

=

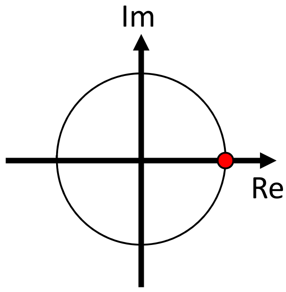
n=-1



$\exp(j\frac{4\pi}{T}x)$

=

n=2



$\exp(-j\frac{4\pi}{T}x)$

=

n=-2

各項は複素平面の単位円上を回転している点を表している.
回転周期T/n，回転方向はnの正負によって決まる.

級数展開で共通して現れる積分

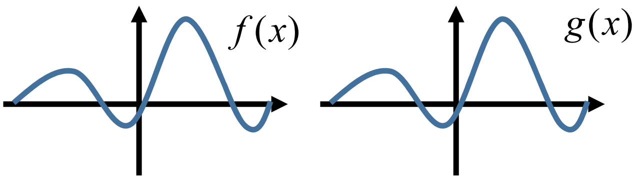
フーリエ／複素フーリエ級数展開では，係数を求めるための類似の式が頻出する

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)dx \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)dx \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\exp\left(-j\frac{2n\pi}{T}x\right)dx$$

一般に，関数f,gに対して，$(f,g) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\overline{g}(x)dx$ を，関数fとgの**内積**と呼ぶ

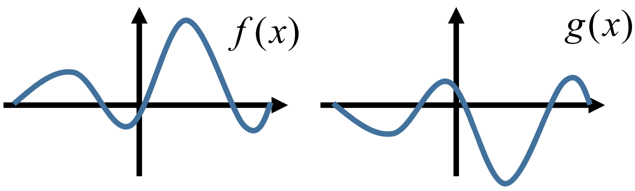
共役複素数

関数fとgが同一の場合，$f(x)\overline{g}(x)$ は $f(x)^2$ に等しく，**常に正値**をとる．
よってその**積分は大きな値**を取る．（**共役複素数**を取ることで複素関数でも成立）



$f(x)\overline{g}(x)$
書いてみよう

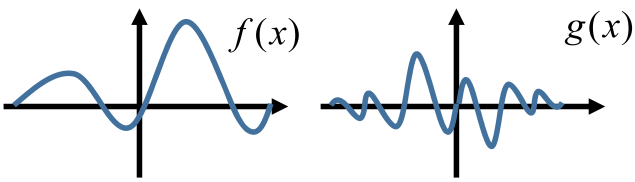
関数fとgが逆の場合，$f(x)\overline{g}(x)$ は$-f(x)^2$ に等しく，**常に負値**をとる．
よってその**積分は負の大きな値**を取る．（共役複素数を取ることで複素関数でも成立）



$f(x)\overline{g}(x)$
書いてみよう

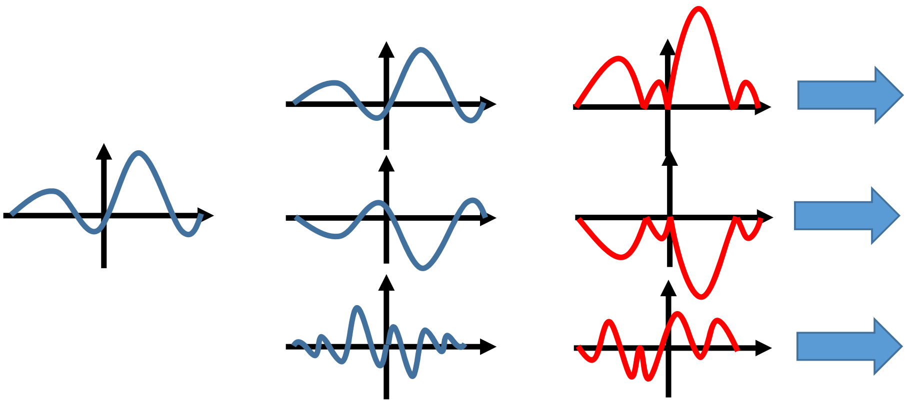
関数の「内積」とは何か

関数fとgが無関係かずれていると，$f(x)\overline{g}(x)$ は正負に振れる．
よってその積分は小さな値を取る．



$f(x)\overline{g}(x)$
書いてみよう

$f(x)$ $g(x)$ $f(x)\overline{g}(x)$ $(f,g) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\overline{g}(x)dx$



関数f,gの内積は，関数fにgの成分がどれだけ含まるかを，正負も含めて定量化する
（量子化してベクトルデータとみなせば、ベクトルの内積と全く同じ意味を持つ）

関数の「内積」とフーリエ・複素フーリエ級数展開

フーリエ／複素フーリエ級数展開では，係数を求めるための類似の式が頻出する

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(\frac{2n\pi}{T}x)dx \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(\frac{2n\pi}{T}x)dx \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\exp(-j\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

これは，$(f,g) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\underbrace{\overline{g}(x)}_{\text{共役複素数}}dx$ の形，すなわち内積だから，

- a_nは，関数f(x)に　　　　　がどれだけ含まれているか，
- b_nは，関数f(x)に　　　　　がどれだけ含まれているか，
- c_nは，関数f(x)に　　　　　がどれだけ含まれているか，

符号注意

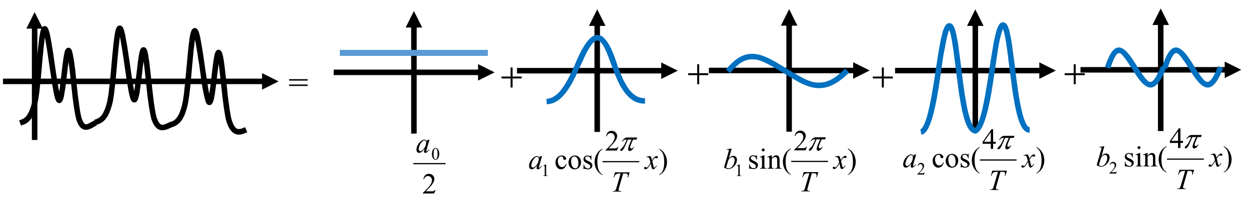
を計量しているといえる．

だから，「復元」する場合には，それぞれの**成分**を**合成**する形を取る．

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(\frac{2n\pi}{T}x) + b_n\sin(\frac{2n\pi}{T}x)\right)$$

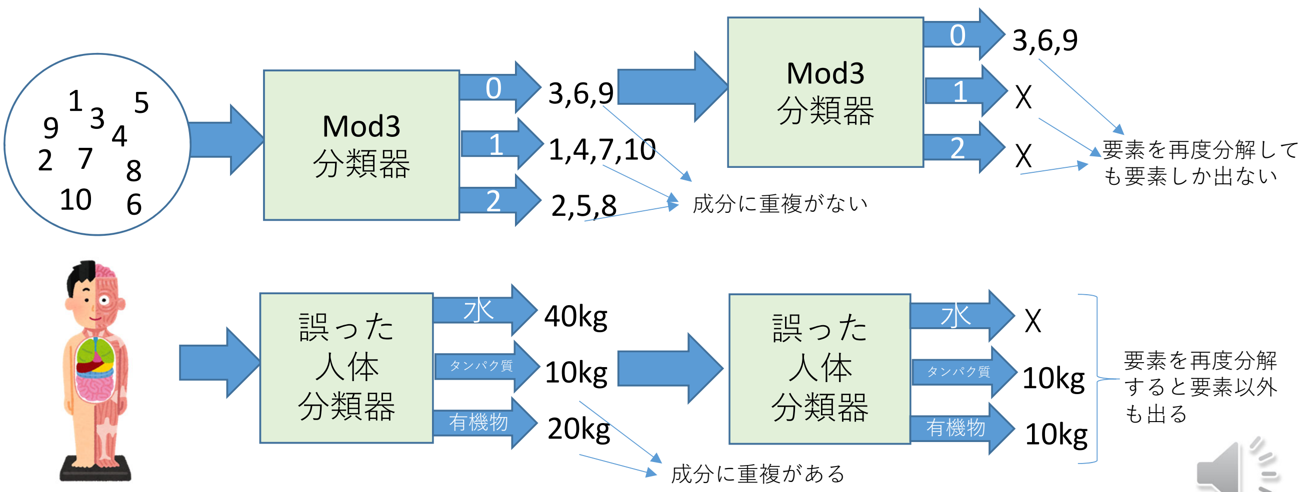
$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j\frac{2n\pi}{T}x)$$

基底関数の直交性



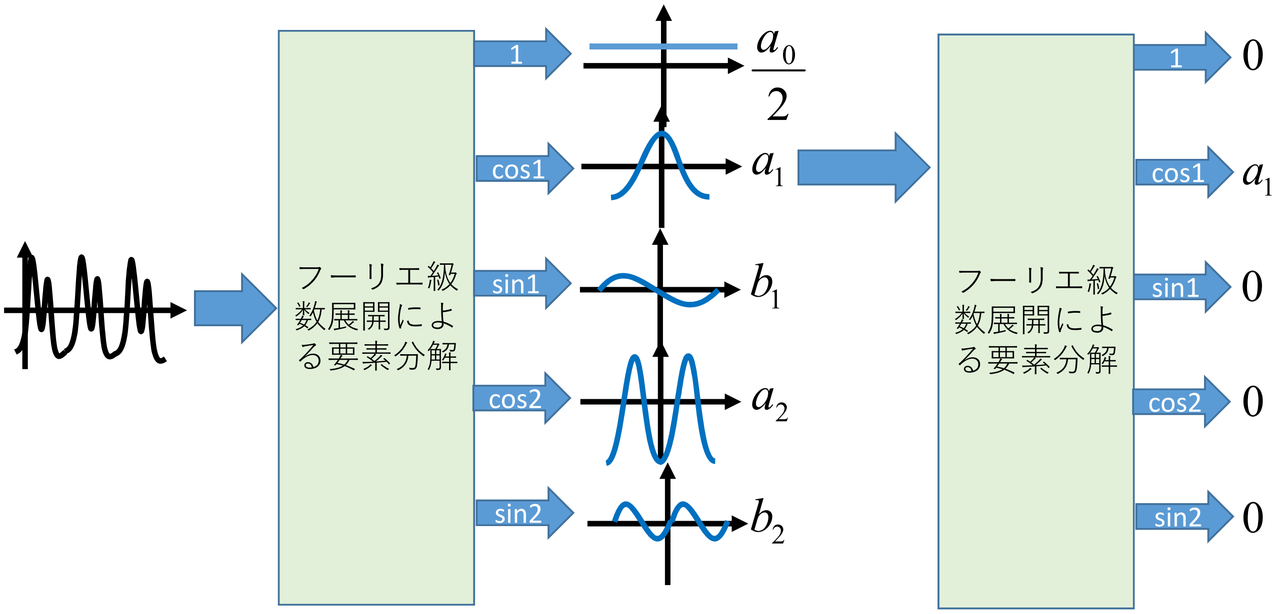
フーリエ・複素フーリエ級数展開：**基底関数による内積**によって**元の関数に含まれる基底関数の成分を計量する**ものである．

疑問：「成分の抽出」がもしお互いの成分を持っていたら，分解が一意でなくなる．



→「要素」に、他の「要素」が入っていないことが重要

基底関数の直交性



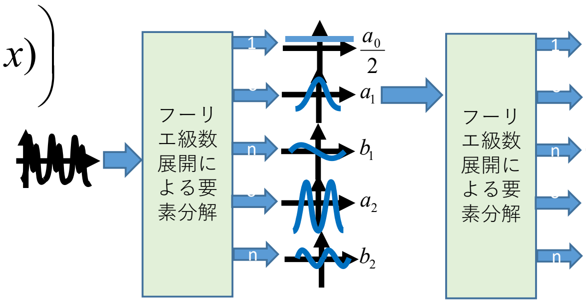
フーリエ級数展開の場合，「要素」はsin,cosの基底関数である．
異なる「要素」同士がお互いの成分を持たないことを確認するために，要素を再度フーリエ級数展開してみて，その要素しか出ないことを確認する．

基底関数の直交性

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(\frac{2n\pi}{T}x) + b_n \sin(\frac{2n\pi}{T}x)\right)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(\frac{2n\pi}{T}x)dx$$



ある成分 $a_k \cos(\frac{2k\pi}{T}x)$ を，元の関数f(x)と見立てて再度分解してみる．まずa_n成分は

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\{\sin(x+y) + \sin(x-y)\}$$
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\{\cos(x-y) - \cos(x+y)\}$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\{\cos(x+y) + \cos(x-y)\}$$

$=$

$=$

これは明らかにn=kの時以外は0となる．n=kでは　＝

基底関数の直交性

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\{\sin(x+y) + \sin(x-y)\}$$
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\{\cos(x-y) - \cos(x+y)\}$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\{\cos(x+y) + \cos(x-y)\}$$

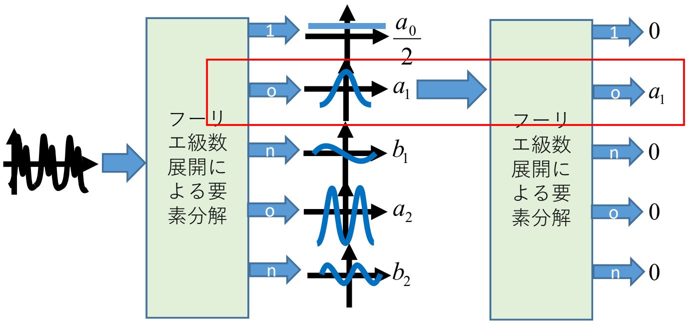
次に，b_n成分は $b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(\frac{2n\pi}{T}x)dx$

$=$

$=$

これは明らかにあらゆるnで0となる．

つまり $a_k\cos(\frac{2k\pi}{T}x)$ は，再度分解しても確かに $\cos(\frac{2k\pi}{T}x)$ 成分しか持たない



$b_k\sin(\frac{2k\pi}{T}x)$ に対しても同様の結果（省略）．

よって，**確かにフーリエ級数展開の基底関数は互いに相手を要素として持たない．**

基底関数の直交性

鍵は $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\frac{2k\pi}{T}x)\cos(\frac{2n\pi}{T}x)dx$ が，k=nの時以外はすべて0で，

$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\frac{2k\pi}{T}x)\sin(\frac{2n\pi}{T}x)dx$ が，すべて0だったこと．

一般に，関数f,gに対する内積が，

となるとき，すなわち，関数fが関数gの成分を持たない時，

関数fとgは「**直交している**」という

関数群，$f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$…が，すべてお互いに直交している時，

この関数群を「**直交関数系**」と呼ぶ．

フーリエ級数展開の基底関数は直交関数系である

フーリエ級数展開の基底関数

$$1 \quad \cos(\frac{2\pi}{T}x) \quad \sin(\frac{2\pi}{T}x) \quad \cos(\frac{4\pi}{T}x) \quad \sin(\frac{4\pi}{T}x) \quad \cos(\frac{6\pi}{T}x) \quad \sin(\frac{6\pi}{T}x)$$

は，すべてのm,nに対して，

→m=nをのぞきすべて0（すでに示した）

→すべて0 （すでに示した）

→m=nをのぞきすべて0（今日のレポート）

なので，基底関数はすべてお互いに直交している．
（フーリエ級数展開の係数a_n, b_n,を求めるに際してもこの直交性を利用していた）

複素フーリエ級数展開の基底関数も直交関数系である

複素フーリエ級数展開の基底関数

$$\exp(j\frac{2n\pi}{T}x) \text{ すなわち， } \cdots \exp(j\frac{-4\pi}{T}x) \quad \exp(j\frac{-2\pi}{T}x) \quad 1 \quad \exp(j\frac{2\pi}{T}x) \quad \exp(j\frac{4\pi}{T}x) \cdots$$

直交性の確認

※関数の内積では共役複素数を用いることに注意

$$(f,g)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\overline{g}(x)dx$$

＝

→m=nをのぞきすべて0

なので，基底関数はすべてお互いに直交している．

（複素フーリエ級数展開の係数c_nを求めるに際してもこの直交性を利用していた）

今日のまとめ

1. フーリエ級数展開を拡張し，複素フーリエ級数展開を定義した.
2. 少しシンプルな形で書ける．またある周波数の振幅と位相の情報が係数に現れる.
3. 基底関数がきちんと「要素」であるために，「要素を再度分解しても別の要素になることはない」ことを確認した.
4. このようになる基底関数群を直交関数系と呼び，フーリエ級数展開も複素フーリエ級数展開も直交関数系への展開であった.

次回はたたみこみとパーセバルの等式

今日のレポート

$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(\frac{2m\pi}{T}x)\sin(\frac{2n\pi}{T}x)dx$　が、m=nの場合を除き0となることを示せ
（直交性）

レポートは紙に書いたものを写真にとり、下記からアップロードする。Googleアカウントによりアップロードするので、大学が提供しているアカウントを使用すること。画像ファイルは5MB以下に抑えること。

https://forms.gle/tovLwBV1eauiuoAVA

提出締め切り：講義日から一週間以内