

# 応用数学第一

第三回

梶本裕之



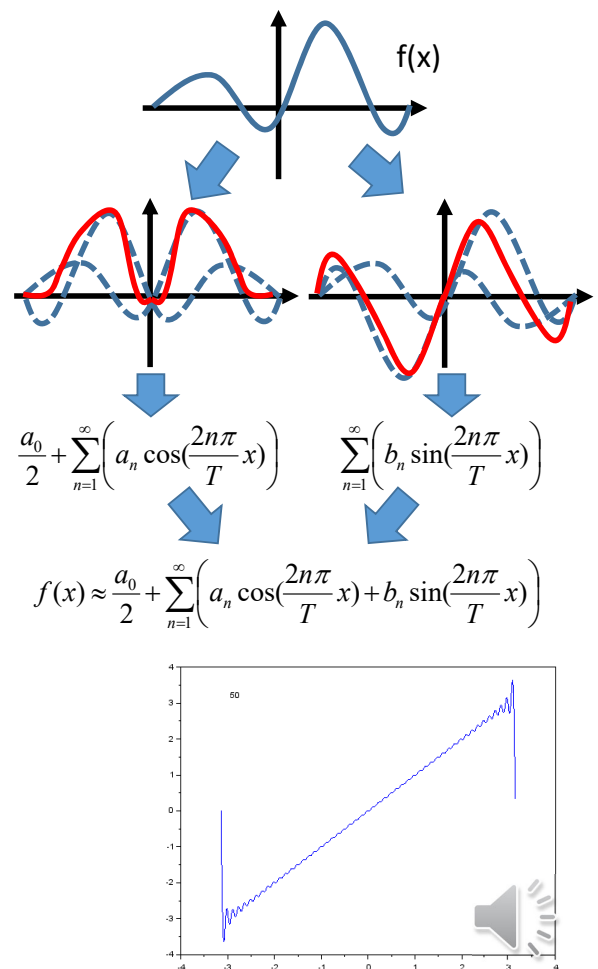
## 日程

| 講義番号 | 講義日   | 講義内容                               |
|------|-------|------------------------------------|
| 1    | 10/1  | 周期関数、フーリエ級数の定義                     |
| 2    | 10/8  | フーリエ級数の計算例                         |
| 3    | 10/15 | 複素フーリエ級数、直交関数系                     |
| -    | 10/22 | 体育祭                                |
| 4    | 10/29 | 周期関数のたたみこみ、パーセバルの等式                |
| 5    | 11/5  | 非周期関数、フーリエ変換の定義・計算例                |
| 6    | 11/12 | フーリエ変換の性質                          |
| -    | 11/19 | 中間確認問題（自習）                         |
| 7    | 11/26 | デルタ関数とフーリエ変換、たたみこみのフーリエ変換、パーセバルの等式 |
| 8    | 12/3  | 離散時間信号と離散時間フーリエ変換（教科書外）            |
| 9    | 12/10 | 離散フーリエ変換（教科書外）                     |
| 10   | 12/17 | 離散フーリエ変換の性質（教科書外）                  |
| 11   | 1/7   | サンプリング定理                           |
| 12   | 1/14  | ラプラス変換の定義と性質                       |
| 13   | 1/21  | 線形常微分方程式のラプラス変換による解法               |
| -    | 1/28  | 期末テスト準備（自習）                        |
| -    | 2/4   | 期末確認テスト（全範囲。現在は大学を予定）              |



## 前回のまとめ

1. 関数は偶関数と奇関数の和で表せる.
2. フーリエ級数展開のcos, sinの項は, 偶関数, 奇関数成分を表す
3. 不連続な点のある関数は, フーリエ級数展開の際にGibbs現象を生じる
4. 自由にフーリエ級数展開をできるようにになった.



## 今日の目標

- 複素フーリエ級数展開を導入する.
- 直交基底について理解する.

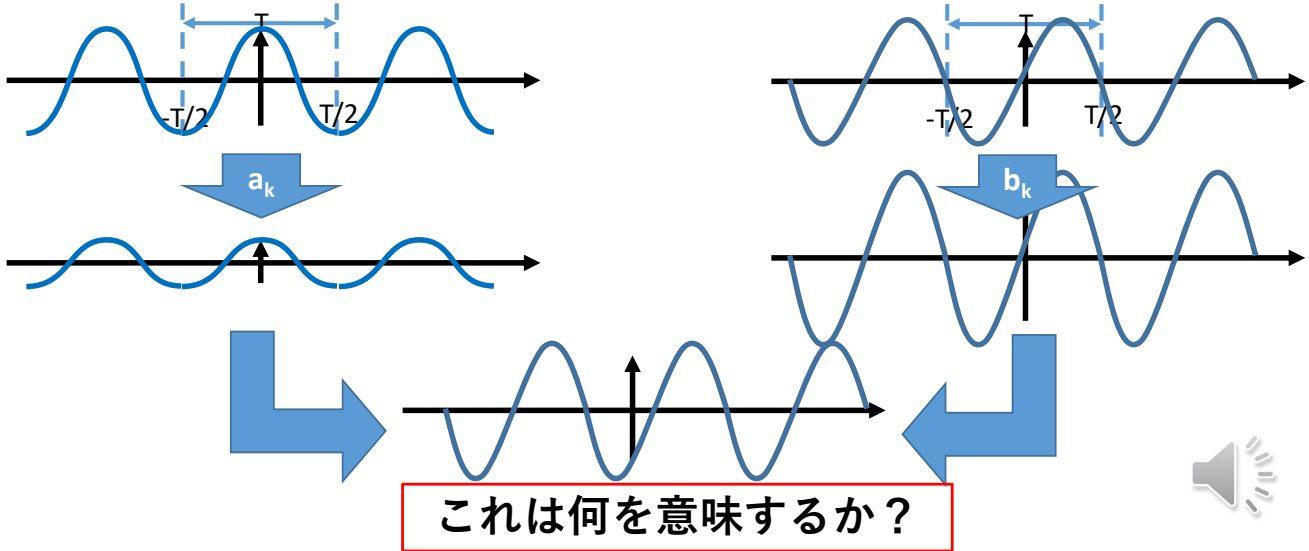


## フーリエ級数展開におけるある周波数成分

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \right)$$

Nがある値kの時（周波数= $kx/T$ ）の成分を抜き出すと

これはcos波とsin波を、 $a_k, b_k$ の重みをかけて足すことに相当。



## フーリエ級数展開におけるある周波数成分

$$a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{T}x\right)$$

加法定理から  $\sin(\theta + \phi) = \sin(\theta)\cos(\phi) + \cos(\theta)\sin(\phi)$

ここで、

となるA,  $\theta$ を選ぶと、

$$a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{T}x\right) =$$

$$=$$

つまり、同じ周波数のcosとsinの和は、 $a_k, b_k$ がどのような重み付けであっても、同じ周波数の、位相のずれた正弦波となる。

# フーリエ級数展開におけるある周波数成分

$$a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{T}x\right) = A \sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{T}x\right)$$

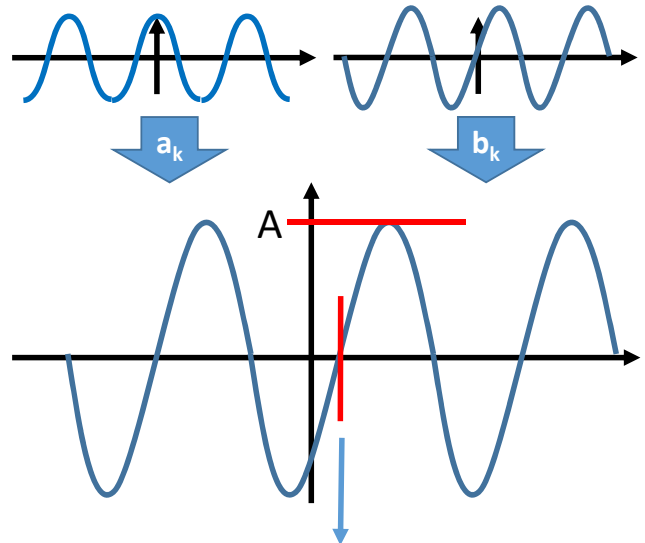
ただし,  $a_k = A \sin(\theta)$   $b_k = A \cos(\theta)$

Aを求める:

より,  
これは**振幅**を意味する

$\theta$ を求める:

より,  
これは**位相** (ずれ) と等価



$$A \sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{T}x\right) = A \sin\left(\frac{2k\pi}{T}\left(x + \frac{T}{2k\pi}\theta\right)\right)$$

より,  
 $-\frac{T}{2k\pi}\theta$



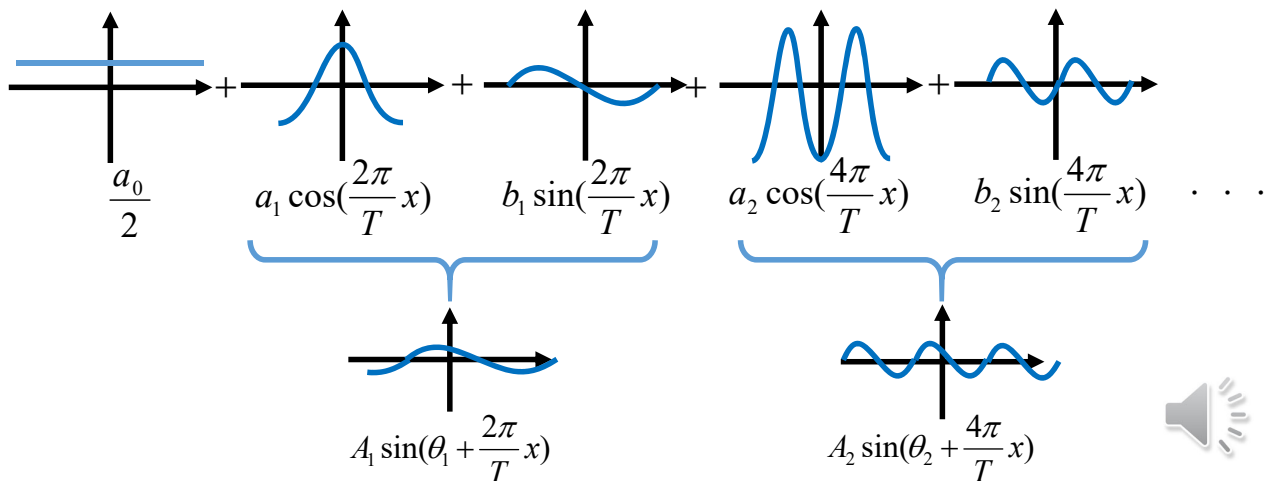
# フーリエ級数展開における別の表現

これまでの展開から, フーリエ級数展開は

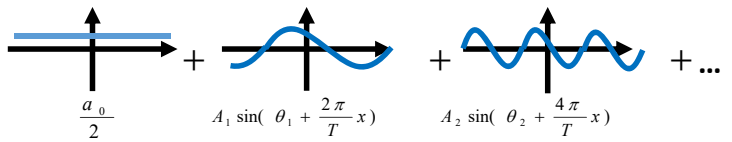
$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \right)$$

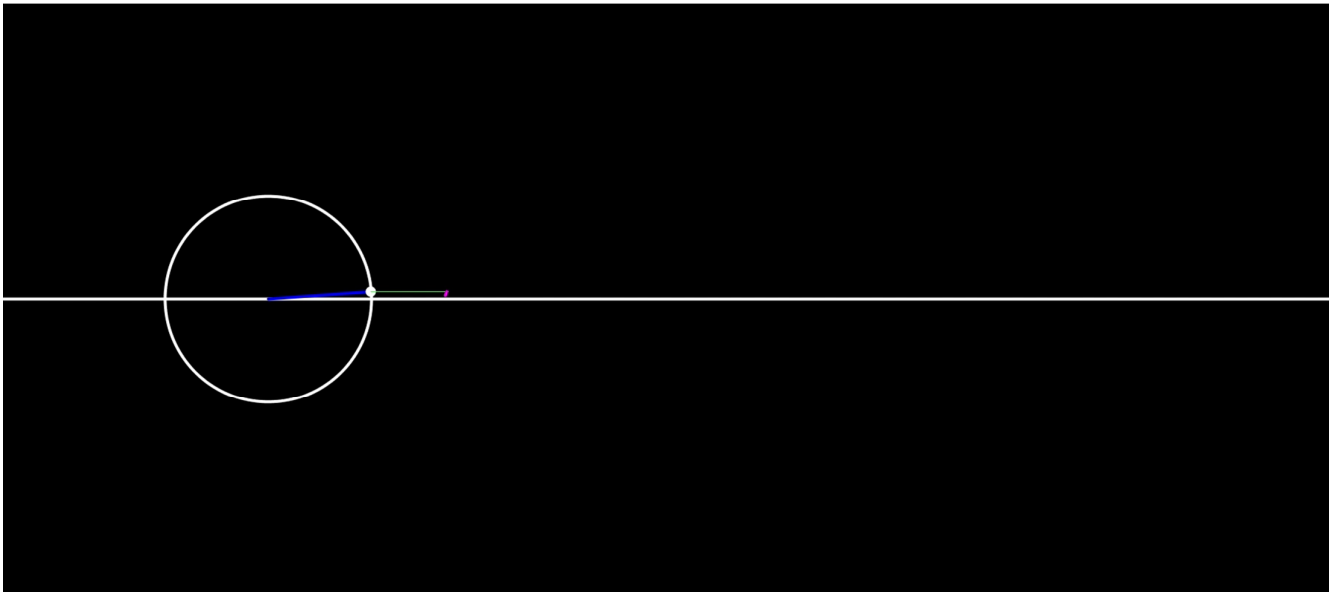
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\theta_n + \frac{2n\pi}{T}x\right)$$

つまり, **振幅と位相の情報を持った正弦波**の合成で表現できる。  
この場合も未知係数の数 (各周波数2個) は変わっていない。



# 振幅と位相の情報を持った正弦波の合成のイメージ

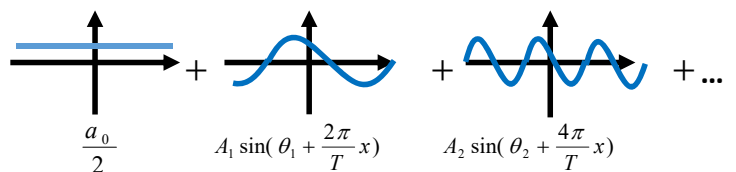
$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\theta_n + \frac{2n\pi}{T}x\right)$$




[https://github.com/HiroyukiKajimoto/AppliedMathematics/blob/master/sketch\\_3\\_fourier\\_drawing.pde](https://github.com/HiroyukiKajimoto/AppliedMathematics/blob/master/sketch_3_fourier_drawing.pde)

$\sin\left(\theta_n + \frac{2n\pi}{T}x\right)$  の重ね合わせによって三角波、矩形波が合成される

## 振幅と位相という 2 つの情報

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\theta_n + \frac{2n\pi}{T}x\right)$$


この表現では、**振幅と位相**の情報が明示的に現れ、各周波数が「どれだけ」・「どのように（ずれて）」いるか端的に表せる。しかし未知数の一部がsin関数の引数のため数学的に扱いにくい。そこで、sin関数の代わりに**exp関数**を使って式を変換してみる。

$$\begin{aligned} \exp(j\theta) &= \cos(\theta) + j \sin(\theta) \\ \exp(-j\theta) &= \cos(\theta) - j \sin(\theta) \end{aligned} \quad \rightarrow$$

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\theta_n + \frac{2n\pi}{T}x\right)$$

=



## expによる表現

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\theta_n + \frac{2n\pi}{T}x\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2j} \left\{ \exp\left(j\left(\theta_n + \frac{2n\pi}{T}x\right)\right) - \exp\left(-j\left(\theta_n + \frac{2n\pi}{T}x\right)\right) \right\}$$

=

=

=

第3項： $n'=-n$ と変換。  
未知係数をまとめて $B_n$ とした。

シグマの範囲の移り変わりに注意。  
元の第1項も $n=0$ で含まれる。

- このように表記すると、**振幅と位相の情報は係数 $c_n$ に集約**される。
- なお $c_n$ は複素数で、位相は複素数の偏角。
- シグマの範囲が変わっているため未知数の数は変化していない。



$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(j\frac{2n\pi}{T}x\right)$$

係数 $c_n$ を求めるため、 $\exp(-j2m\pi x/T)$ を掛けて周期 $T$ で両辺を積分。  
なぜマイナスが付くかは後述

積分と $\Sigma$ の順序が交換できるとして

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \exp\left(-j\frac{2m\pi}{T}x\right) dx \approx$$

=

=

周期 $T$ の周期関数。  $n=m$ 以外はすべて  
正負が（虚数成分も含め）相殺して0。  
これは最初の式でマイナスをつけたから  
できたこと。



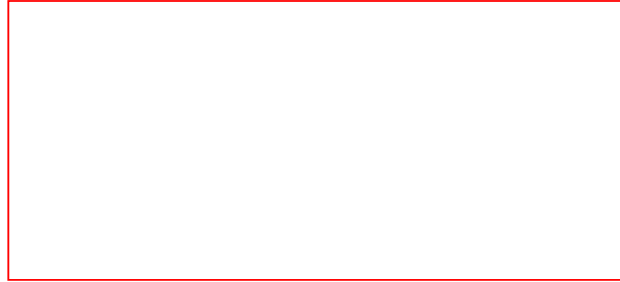
# 複素フーリエ級数展開

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j \frac{2n\pi}{T} x)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \exp(-j \frac{2n\pi}{T} x) dx$$

マイナスが付くことに注意

T=2πの場合



## フーリエ級数展開と複素フーリエ級数展開の対比

複素フーリエ級数展開

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j \frac{2n\pi}{T} x)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \exp(-j \frac{2n\pi}{T} x) dx$$

元のフーリエ級数展開

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos(\frac{2n\pi}{T} x) + b_n \sin(\frac{2n\pi}{T} x) \right)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(\frac{2n\pi}{T} x) dx$$

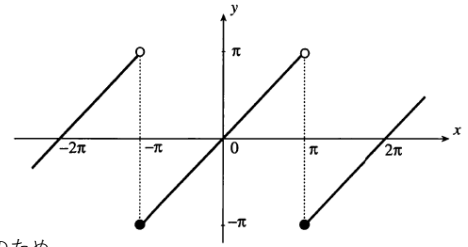
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(\frac{2n\pi}{T} x) dx$$

- 2種類のフーリエ級数展開はお互いに変換可能、等価である。
- Sin,cosという二種類の「基底関数」が、expに集約された。
- 未知係数の数は変わっていない。
- 元のフーリエ級数展開が、同じ周期の項をsin,cosという形で2つ持つのに対し、exp(), exp(-)という形で2つ持つ。



# のこぎり波の複素フーリエ級数展開

周期 $2\pi$ ,  $-\pi \sim \pi$ の間で $f(x)=x$ となる関数を複素フーリエ級数展開.



周期 $2\pi$ で正負対称の周期関数のため

ただし $n=0$ ではこの積分は出来ないので別途計算

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$

$$\begin{aligned} \exp(j\theta) &= \cos(\theta) + j\sin(\theta) \\ \exp(-j\theta) &= \cos(\theta) - j\sin(\theta) \end{aligned} \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{1}{2}(\exp(j\theta) + \exp(-j\theta))$$

先週のフーリエ級数展開での結果と同値

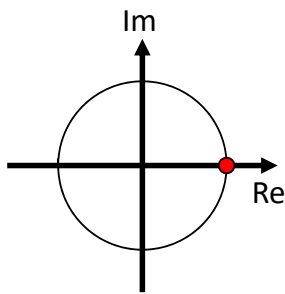
$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{n} \sin(nx)$$



よって、

## 複素フーリエ級数展開の基底関数のイメージ

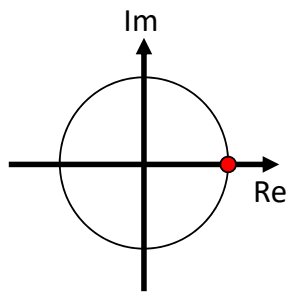
$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j \frac{2n\pi}{T} x)$$



$$\exp(j \frac{2\pi}{T} x)$$

=

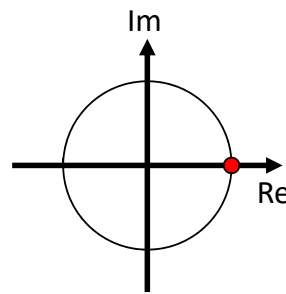
**n=1**



$$\exp(-j \frac{2\pi}{T} x)$$

=

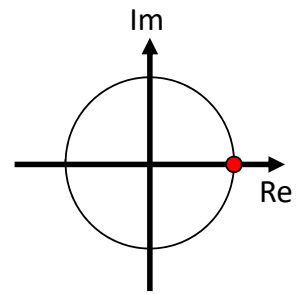
**n=-1**



$$\exp(j \frac{4\pi}{T} x)$$

=

**n=2**



$$\exp(-j \frac{4\pi}{T} x)$$

=

**n=-2**

各項は複素平面の単位円上を回転している点を表している。  
回転周期 $T/n$ , 回転方向は $n$ の正負によって決まる。





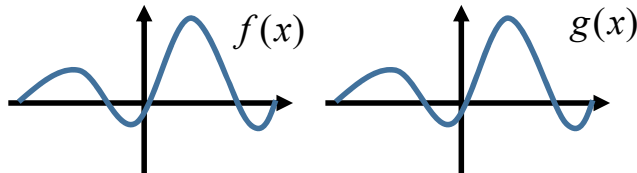
# 級数展開で共通して現れる積分

フーリエ/複素フーリエ級数展開では、係数を求めるための類似の式が頻出する

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \exp\left(-j\frac{2n\pi}{T}x\right) dx$$

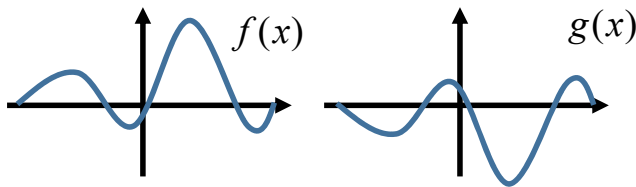
一般に、関数 $f, g$ に対して、 $(f, g) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \bar{g}(x) dx$  を、関数 $f$ と $g$ の**内積**と呼ぶ  
共役複素数

関数 $f$ と $g$ が同一の場合、 $f(x)\bar{g}(x)$  は  $f(x)^2$  に等しく、常に**正值**をとる。  
 よってその**積分は大きな値**を取る。（共役複素数を取ることで複素関数でも成立）



$f(x)\bar{g}(x)$   
書いてみよう

関数 $f$ と $g$ が逆の場合、 $f(x)\bar{g}(x)$  は  $-f(x)^2$  に等しく、常に**負値**をとる。  
 よってその**積分は負の大きな値**を取る。（共役複素数を取ることで複素関数でも成立）

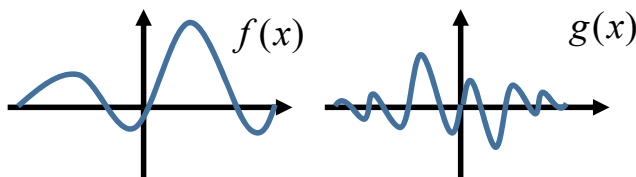


$f(x)\bar{g}(x)$   
書いてみよう

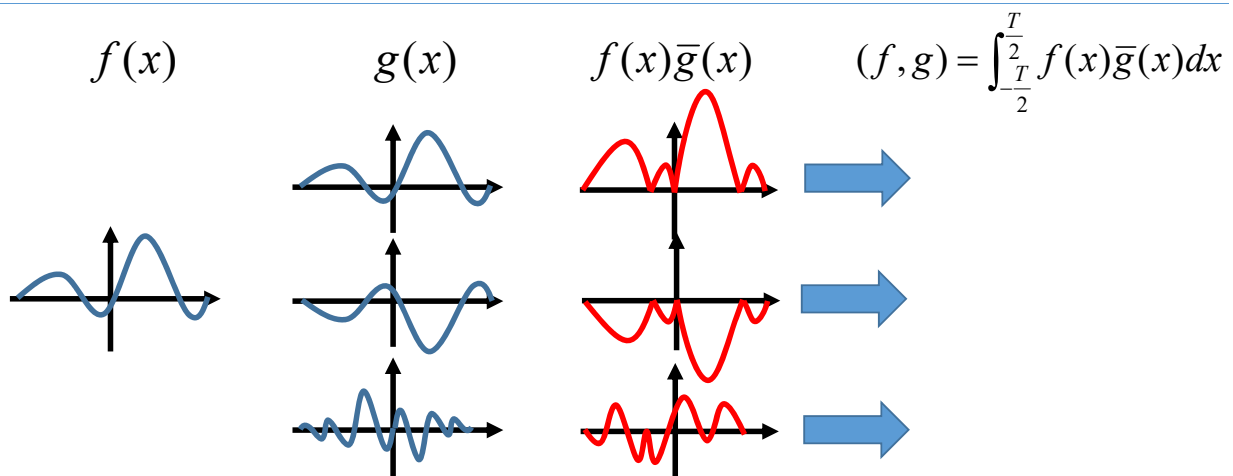


## 関数の「内積」とは何か

関数 $f$ と $g$ が無関係かずれていると、 $f(x)\bar{g}(x)$  は正負に振れる。  
 よってその積分は**小さな値**を取る。



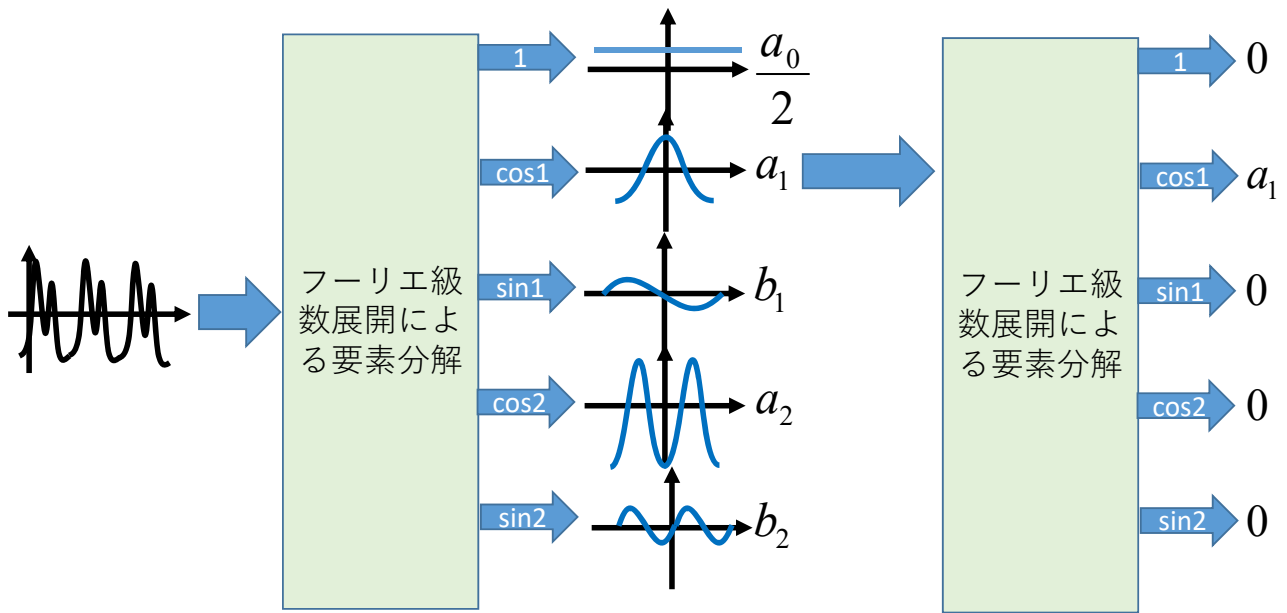
$f(x)\bar{g}(x)$   
書いてみよう



関数 $f, g$ の内積は、関数 $f$ に $g$ の成分がどれだけ含まれるかを、正負も含めて定量化する  
 （量子化してベクトルデータとみなせば、ベクトルの内積と全く同じ意味を持つ）



# 基底関数の直交性



フーリエ級数展開の場合、「要素」はsin,cosの基底関数である。  
異なる「要素」同士がお互いの成分を持たないことを確認するために、要素を再度フーリエ級数展開してみて、その要素しか出ないことを確認する。

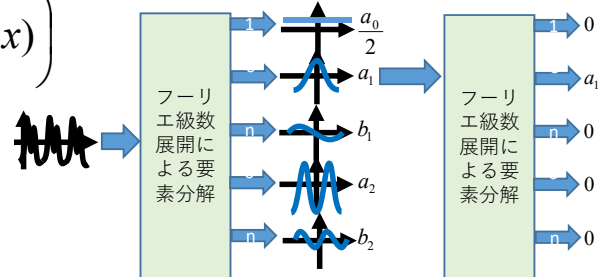


# 基底関数の直交性

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \right)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx$$



ある成分  $a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{T}x\right)$  を、元の関数f(x)と見立てて再度分解してみる。まず  $a_n$  成分は

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx$$

=

=

$$\begin{aligned} \sin x \cos y &= \frac{1}{2} \{ \sin(x+y) + \sin(x-y) \} \\ \sin x \sin y &= \frac{1}{2} \{ \cos(x-y) - \cos(x+y) \} \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2} \{ \cos(x+y) + \cos(x-y) \} \end{aligned}$$

これは明らかに  $n \neq k$  の時以外は0となる。  $n=k$  では =



# 基底関数の直交性

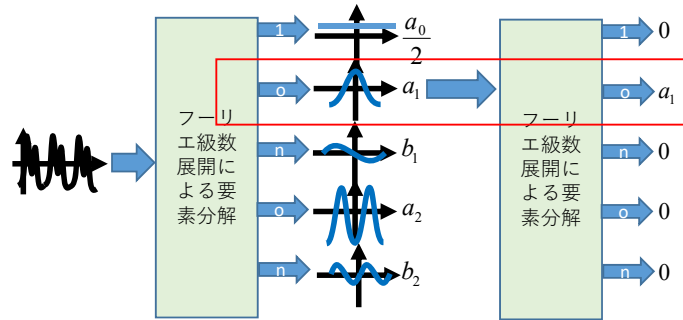
次に、 $b_n$ 成分は 
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx$$

=

=

これは明らかにあらゆる $n$ で0となる。

つまり  $a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{T}x\right)$  は、再度分解しても確かに  $\cos\left(\frac{2k\pi}{T}x\right)$  成分しか持たない



$b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{T}x\right)$  に対しても同様の結果（省略）。

よって、**確かにフーリエ級数展開の基底関数は互いに相手を要素として持たない。**



# 基底関数の直交性

鍵は 
$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2k\pi}{T}x\right) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx$$
 が、 $k=n$ の時以外はすべて0で、  

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2k\pi}{T}x\right) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx$$
 が、すべて0だったこと。

一般に、関数 $f, g$ に対する内積が、

となる時、すなわち、関数 $f$ が関数 $g$ の成分を持たない時、

関数 $f$ と $g$ は「**直交している**」という

関数群、 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x) \dots$ が、すべてお互いに直交している時、

この関数群を「**直交関数系**」と呼ぶ。



# フーリエ級数展開の基底関数は直交関数系である

フーリエ級数展開の基底関数

$$1 \quad \cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right) \quad \sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right) \quad \cos\left(\frac{4\pi}{T}x\right) \quad \sin\left(\frac{4\pi}{T}x\right) \quad \cos\left(\frac{6\pi}{T}x\right) \quad \sin\left(\frac{6\pi}{T}x\right)$$

は、すべての $m, n$ に対して、

→ $m=n$ をのぞきすべて0 (すでに示した)

→すべて0 (すでに示した)

→ $m=n$ をのぞきすべて0 (今日のレポート)

なので、基底関数はすべてお互いに直交している。

(フーリエ級数展開の係数 $a_n, b_n$ を求めるに際してもこの直交性を利用していた)



# 複素フーリエ級数展開の基底関数も直交関数系である

複素フーリエ級数展開の基底関数

$$\exp\left(j\frac{2n\pi}{T}x\right) \text{ すなわち, } \dots \exp\left(j\frac{-4\pi}{T}x\right) \quad \exp\left(j\frac{-2\pi}{T}x\right) \quad 1 \quad \exp\left(j\frac{2\pi}{T}x\right) \quad \exp\left(j\frac{4\pi}{T}x\right) \dots$$

直交性の確認

※関数の内積では共役複素数を用いることに注意

$$(f, g) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\bar{g}(x)dx$$

=

→ $m=n$ をのぞきすべて0

なので、基底関数はすべてお互いに直交している。

(複素フーリエ級数展開の係数 $c_n$ を求めるに際してもこの直交性を利用していた)



## 今日のまとめ

1. フーリエ級数展開を拡張し、複素フーリエ級数展開を定義した。
2. 少しシンプルな形で書ける。またある周波数の振幅と位相の情報が係数に現れる。
3. 基底関数がきちんと「要素」であるために、「要素を再度分解しても別の要素になることはない」ことを確認した。
4. このようになる基底関数群を直交関数系と呼び、フーリエ級数展開も複素フーリエ級数展開も直交関数系への展開であった。

次回はたたみこみとパーセバルの等式



## 今日のレポート

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2m\pi}{T}x\right) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx \quad \text{が、} m=n \text{ の場合を除き} 0 \text{ となることを示せ}$$

(直交性)

レポートは紙に書いたものを写真にとり、下記からアップロードする。  
Googleアカウントによりアップロードするので、大学が提供しているアカウントを使用すること。画像ファイルは5MB以下に抑えること。

<https://forms.gle/tovLwBV1eaiuoAVA>

提出締め切り：講義日から一週間以内

