応用数学第一

第四回

梶本裕之

日程

講義番号	講義日	講義内容
1	10/1	周期関数、フーリエ級数の定義
2	10/8	フーリエ級数の計算例
3	10/15	複素フーリエ級数、直交関数系
-	10/22	体育祭
4	10/29	周期関数のたたみこみ、パーセバルの等式
5	11/5	非周期関数、フーリエ変換の定義・計算例
6	11/12	フーリエ変換の性質
-	11/19	中間確認問題（自習）
7	11/26	デルタ関数とフーリエ変換、たたみこみのフーリエ変換、パーセバルの等式
8	12/3	離散時間信号と離散時間フーリエ変換（教科書外）
9	12/10	離散フーリエ変換（教科書外）
10	12/17	離散フーリエ変換の性質（教科書外）
11	1/7	サンプリング定理
12	1/14	ラプラス変換の定義と性質
13	1/21	線形常微分方程式のラプラス変換による解法
-	1/28	期末テスト準備（自習）
-	2/4	期末確認テスト（全範囲。現在は大学を予定）

前回のまとめ

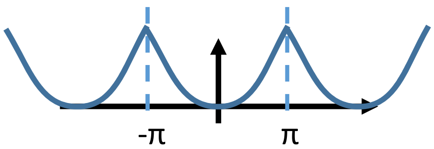
$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j\frac{2n\pi}{T}x) \quad c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\exp(-j\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

1. フーリエ級数展開を拡張し，複素フーリエ級数展開を定義した.
2. 少しシンプルな形で書ける．またある周波数の振幅と位相の情報が係数に現れる.
3. 基底関数がきちんと「要素」であるために，「要素を再度分解しても別の要素になることはない」ことを確認した.
4. このようになる基底関数群を直交関数系と呼び，フーリエ級数展開も複素フーリエ級数展開も直交関数系への展開であった.

復習を兼ねて：x^2の複素フーリエ級数展開

周期2π，-π～πの間で$f(x)=x^2$となる関数を複素フーリエ級数展開.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\exp(-jnx)dx =$$



$=$

$=$

周期2πで正負対称の周期関数のため

$=$

$=$

$=$ $\quad$ $=$

ただしn=0の場合は別途計算

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \qquad =$$

よって $f(x) = x^2 \approx \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n^2}\exp(jnx)$

今日の目標

- たたみこみを理解する.
- パーセバルの等式を理解する.

信号＝原音＋響き（残響，反響）

原曲：https://www.youtube.com/watch?v=AMbj_WDmWho

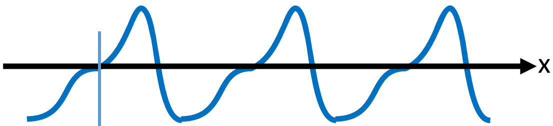
「元の音」に「入れ物による響き」が加わって音色となる.
この効果は数学的にどのように表現できるか

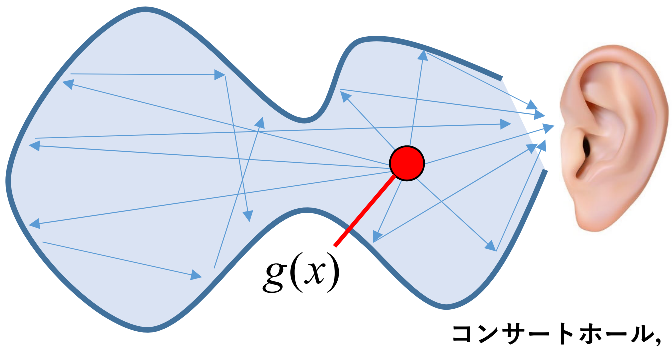
信号＝原音＋響き（残響，反響）

「元の音」に「入れ物による響き」が加わって音色となる
この効果は数学的にどのように表現できるか

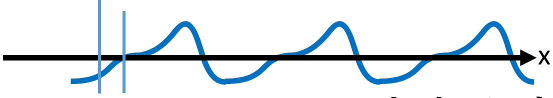
原音と響きの定式化

原音　$g(x)$



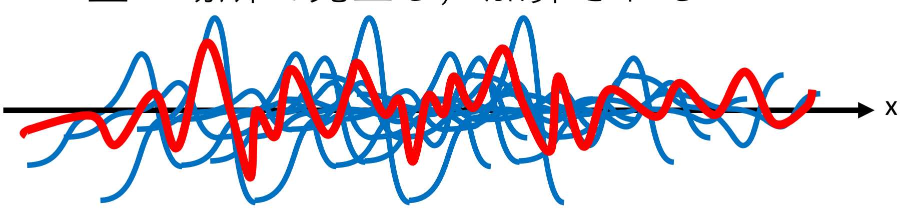


壁のある場所で反射した音

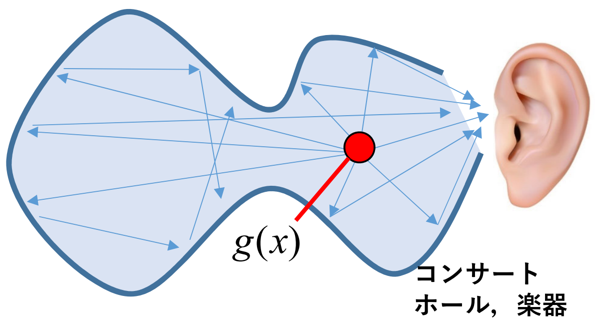


τだけ**遅れ**て，**振幅も変化**した波となる

これらがすべての壁の場所で発生し，加算される

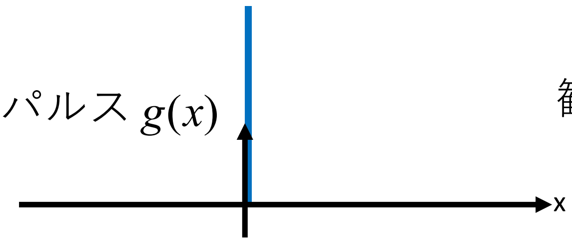


反響＝瞬間的な入力に対する応答



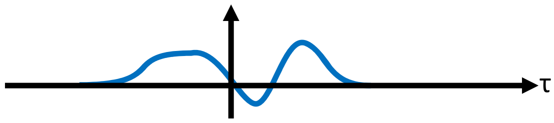
反響を表す関数は，コンサートホール，楽器等に固有の値であり，入力波形とは独立である．
直感的には「**瞬間的な入力（インパルス）」に対して返ってくる波**となる（インパルス関数については後日説明）

インパルス $g(x)$



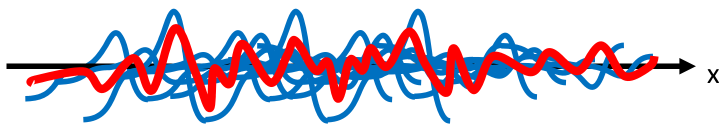
原点で∞の強さを持つ．拍手のような入力

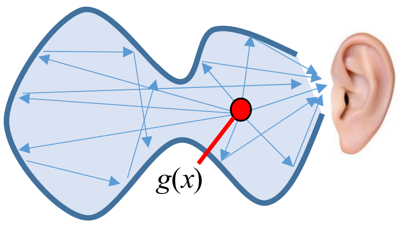
観測される反響 $f(\tau)$



遅れτは音響では非負だが，一般化して正負の関数とする

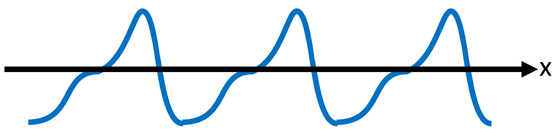
原音と響きの定式化



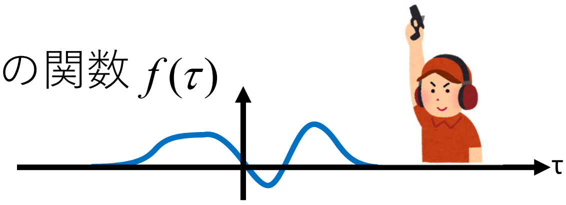


「遅れ時間τに対して振幅がどれだけか」の反響の関数があるなら，

原音　$g(x)$



反響の関数 $f(\tau)$



τだけ遅れた反響音成分は

遅れτに対応した反響の強さ　τだけ遅れた原信号

これらが**すべてのτで発生し，加算される**から，最終的な信号は

これを**関数f(x)とg(x)のたたみ込み積分**とよぶ

たたみ込み積分

$$\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau \qquad f*g(x)$$ と表記

原音の性質g(x)と，環境の性質f(τ)で信号を決める，信号の理解には欠かせないもの．意味的には多くの場合，τは-∞～∞

ここではフーリエ級数展開の扱う範囲でたたみ込み積分の性質を理解するため，f(τ)もg(x)も同じ**周期Tの周期関数**である場合の，次のたたみ込み積分h(x)を考える（物理的実体は考えにくいが…）．

$$h(x) = \qquad\qquad f*g(x)$$ と表記

関数h(x)も周期Tの周期関数となる．

$$h(x+T) = \qquad\qquad = \qquad\qquad = h(x)$$

だから，関数h(x)もフーリエ級数展開できる．

たたみ込み積分をフーリエ級数展開

$$h(x) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)g(x-\tau)d\tau$$ を複素フーリエ級数展開する

n次の項をe_nとして

$$e_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} h(x)\exp(-j\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

$$=$$

$$=$$

z=x-τで変数変換．
周期関数の一周期分の積分なので積分範囲は変化しない

$$=$$

$$=$$

つまりf(x),g(x)それぞれのフーリエ級数の積になっている．

たたみ込み積分のフーリエ級数展開まとめ

２つの周期関数f(x),g(x) が次のようにフーリエ級数展開され,

$$f(x) \approx \sum_{n=--\infty}^{\infty} c_n \exp(j\frac{2n\pi}{T}x) \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\exp(-j\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

$$g(x) \approx \sum_{n=--\infty}^{\infty} d_n \exp(j\frac{2n\pi}{T}x) \qquad d_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x)\exp(-j\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

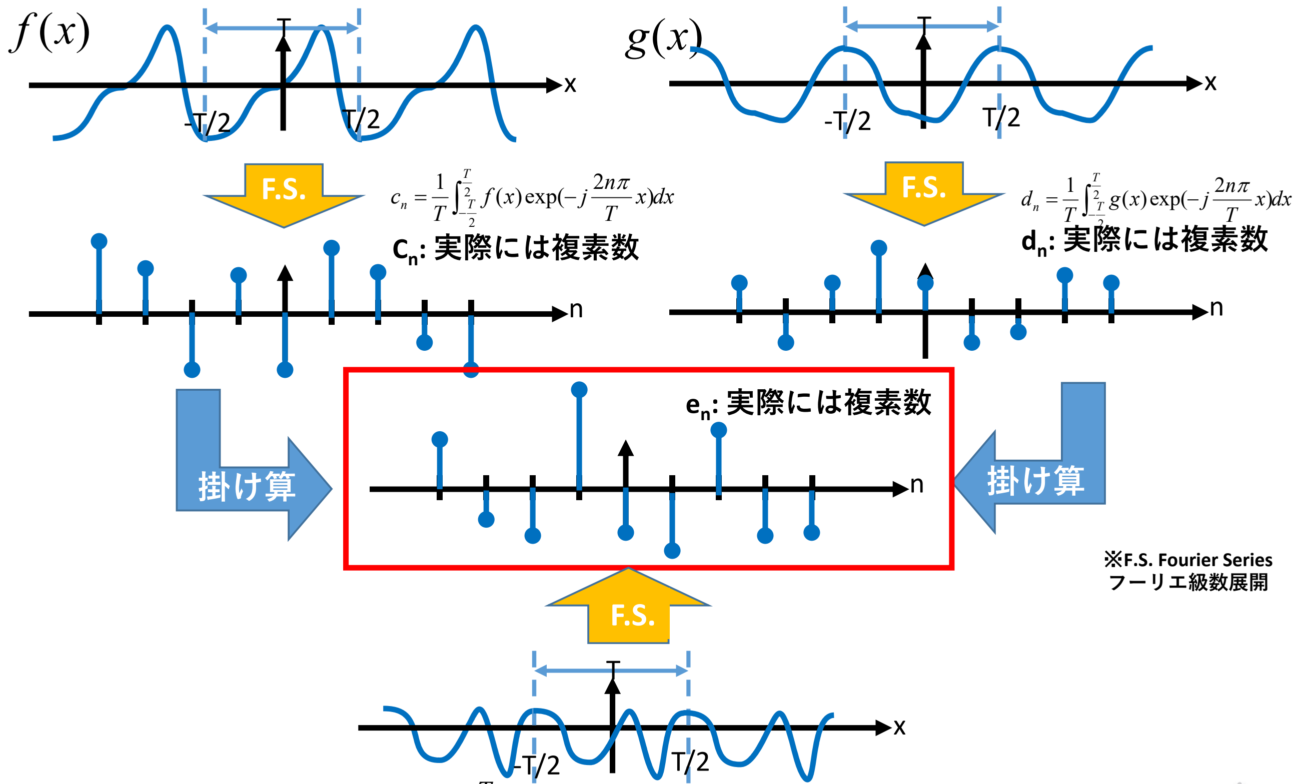
f(x),g(x)のたたみ込みh(x)が次のようにフーリエ級数展開される時,

$$h(x) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)g(x-\tau)d\tau \qquad e_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} h(x)\exp(-j\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

次の式が成り立つ

つまりたたみ込み積分は，周波数領域では単なる積となる

たたみ込み積分のフーリエ級数展開まとめ

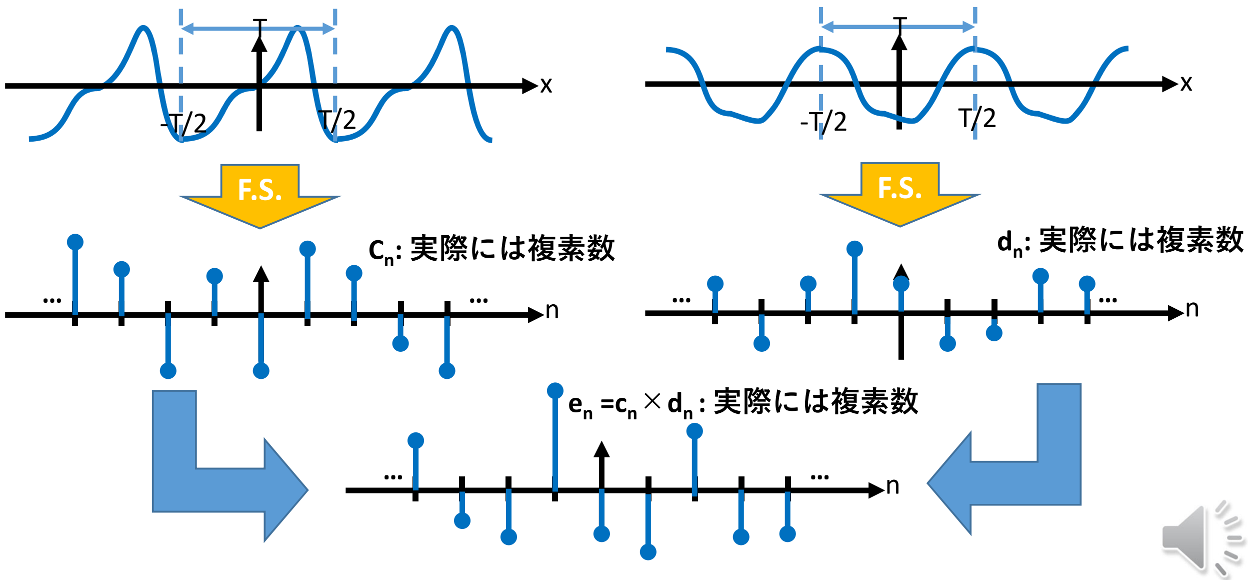


$$h(x) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)g(x-\tau)d\tau = f * g(x)$$

逆順の計算：２つの周期関数の，周波数成分同士を掛けたら？

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j\frac{2n\pi}{T}x) \qquad g(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \exp(j\frac{2n\pi}{T}x)$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\exp(-j\frac{2n\pi}{T}x)dx \qquad d_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x)\exp(-j\frac{2n\pi}{T}x)dx$$



２つの関数の，周波数成分同士を掛けたら？

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\exp(-j\frac{2n\pi}{T}x)dx \quad d_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x)\exp(-j\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

$$c_n d_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)\exp(-j\frac{2n\pi}{T}y)dy \cdot \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(z)\exp(-j\frac{2n\pi}{T}z)dz$$

$=$

$=$

x=y+zで変数変換．z=x-y
周期関数の一周期分の積分なので積分範囲は変化しない

$=$

これは新たな関数 $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)g(x-y)dy$ の複素フーリエ級数展開を求めているとみなせる．

たたみ込みの交換則

$$h(x)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)g(x-\tau)d\tau=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(\tau)f(x-\tau)d\tau$$

をしめしたい($c_n d_n = d_n c_n$だから当然ではある)

$$f*g(x)=$$

$$=$$

z=x-τで変数変換.
周期関数の一周期分の積分なので積分範囲は変化しない

$$=$$

$$=$$

つまりたたみ込み積分は交換則がなりたつ.

特殊な場合：g(x)がf(-x)の共役複素関数の場合

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\exp(-j\frac{2n\pi}{T}x)dx \quad d_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x)\exp(-j\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

ここで, $g(x)=\overline{f(-x)}$ とおく.

$$d_n=$$

$$=$$

y=-xで変数変換.

$$=$$

これは「f(x)の複素フーリエ変換」の共役とみなせる

$$=$$

$$\therefore c_n d_n = \qquad =$$

特殊な場合：g(x)がf(-x)の共役複素関数の場合

h(x)に関しては $h(x)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)g(x-\tau)d\tau$

$=$

この関数の複素フーリエ級数展開の係数が$c_n d_n = |c_n|^2$だから,

$h(x)=$

よって,

X=0を代入してみると,

$h(0)= \qquad = \qquad =$

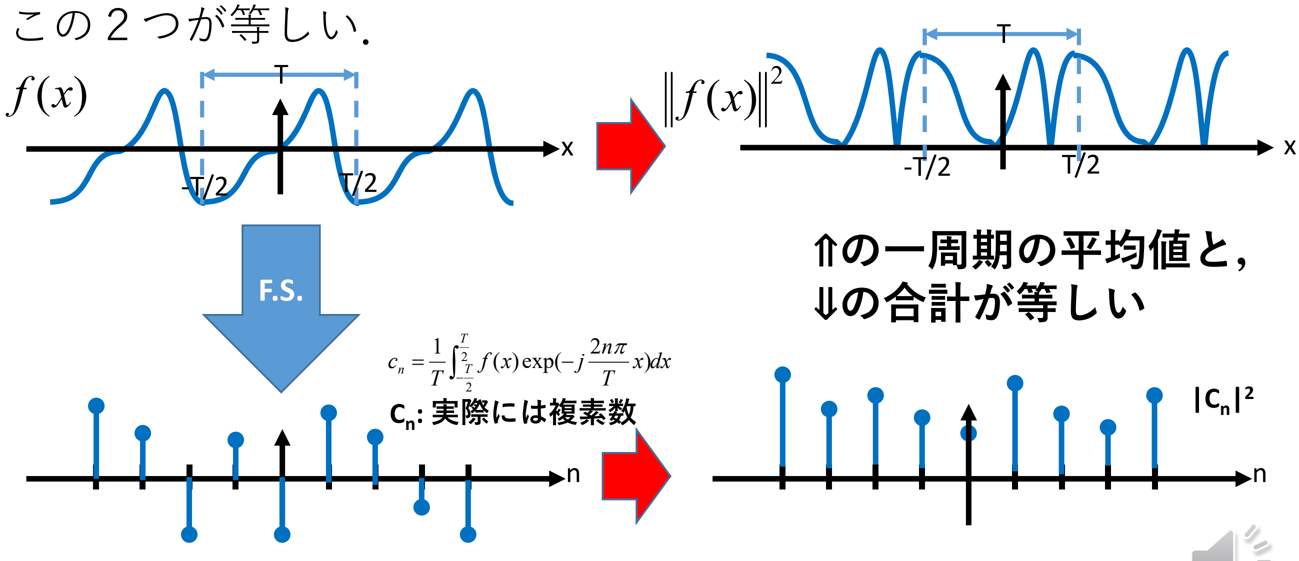
パーセバルの等式

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left\| f(x) \right\|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\| c_n \right\|^2$$

これをパーセバルの等式という.

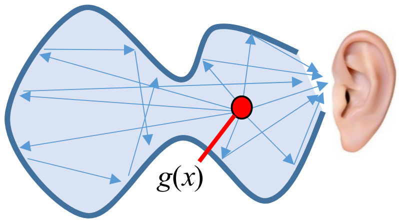
- 左辺：元の関数の絶対値の自乗の積分（の平均）
- 右辺：元の関数の（複素）フーリエ級数展開の係数の自乗和

この２つが等しい.



大まかな意味：フーリエ級数展開をしてもパワーは保存（詳細はフーリエ変換で再度）

今日のまとめ

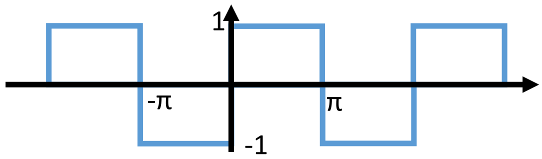


- 一般的な信号を「原音」と「環境による反響」の相互作用とみなし，たたみ込み積分を導入した.
- たたみ込み積分のフーリエ級数展開によって，周波数領域では各周波数の積にすぎないことを理解した.
- 特殊な場合を計算することでパーセバルの等式を導入し，フーリエ級数展開によって「パワー」は変化しないことを見た.

次回はフーリエ変換

今日のレポート

(複素フーリエ級数展開の復習)
周期2πの矩形波（右図）の複素フーリエ級数展開が、$c_n = j\frac{(-1)^n - 1}{\pi n}$となることを示せ



レポートは紙に書いたものを写真にとり、下記からアップロードする。Googleアカウントによりアップロードするので、大学が提供しているアカウントを使用すること。画像ファイルは5MB以下に抑えること。

https://forms.gle/tovLwBV1eauiuoAVA

提出締め切り：講義日から一週間以内