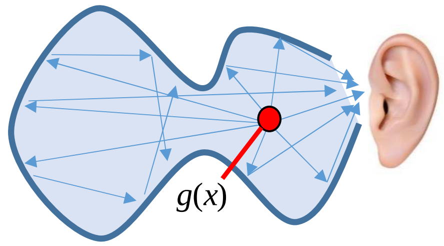
日程

講義番号	講義日	講義内容	pdf	video	レポート締め切り
1	10/5	周期関数、フーリエ級数の定義	[pdf](2022年版)	video	10/12
2	10/12	フーリエ級数の計算例	[pdf](2022年版)	video	10/19
3	10/19	複素フーリエ級数、直交関数系	[pdf](2022年版)	video	10/26
4	10/26	周期関数のたたみこみ、パーセバルの等式	[pdf](2022年版)	video	11/2
5	11/2	非周期関数、フーリエ変換の定義・計算例	[pdf](2021年版)	video	11/9
6	11/9	フーリエ変換の性質	[pdf](2022年版)	video	11/16
7	11/16	デルタ関数とフーリエ変換、たたみこみのフーリエ変換、パーセバルの等式	[pdf](2022年版)	video	11/23
-	11/23	調布祭準備			
-	11/30	休講日（クオーター制との調整による）			
-	12/7	中間確認テストとその解説（前半。現在は大学を予定）	中間確認テスト用問題集	[pdf](2022年版)	
-	12/14	出張による休講			
8	12/21	離散時間信号と離散時間フーリエ変換（教科書外）	[pdf](2022年版)	video	1/4
9	1/4	離散フーリエ変換（教科書外）	[pdf](2022年版)	video	1/11
10	1/11	離散フーリエ変換の性質（教科書外）	[pdf](2022年版)	video	1/18
11	1/18	サンプリング定理	[pdf](2022年版)	video	1/25
12	1/25	ラプラス変換の定義と性質	[pdf](2022年版)	video	2/1
13	2/1	線形常微分方程式のラプラス変換による解法	[pdf](2022年版)	video	2/8
-	2/8	期末確認テストとその解説（後半。現在は大学を予定）	期末テスト用問題集	[pdf](2022年版)	

前回のまとめ

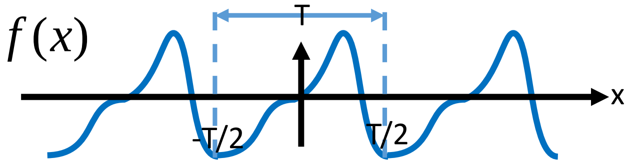


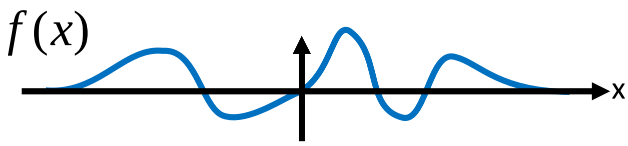
- 一般的な信号を「原音」と「環境による反響」の相互作用とみなし，たたみ込み積分を導入した．
- たたみ込み積分のフーリエ級数展開によって，周波数領域では各周波数の積にすぎないことを理解した．
- 特殊な場合を計算することでパーセバルの等式を導入し，フーリエ級数展開によって「パワー」は変化しないことを見た．

今日の目標

- フーリエ変換を導入し，意味をつかむ．
- フーリエ変換の計算をする．
- フーリエ変換の基本的な性質を知る．

周期関数から非周期関数へ



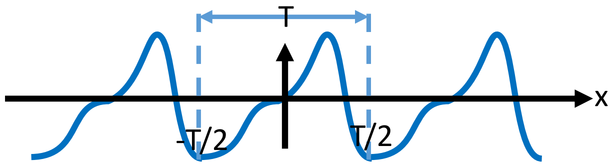


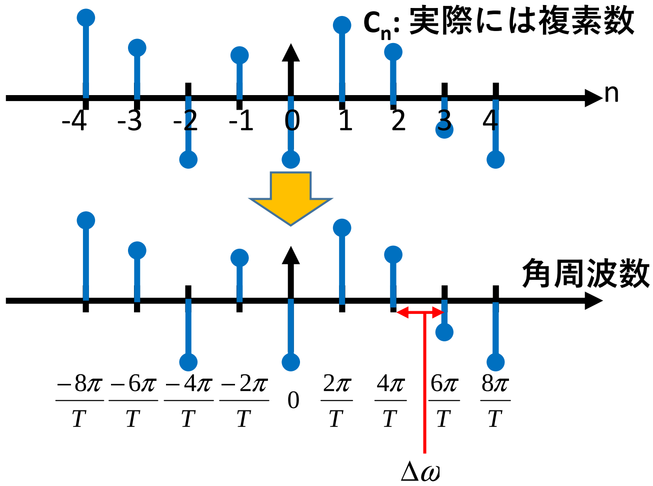
- 元のアイデア：世の中の多くの現象は周期的だから，周期関数と仮定して要素分解しよう．
- 現実：もちろん周期関数とは限らない．周期関数だとしても，一つの周期（とその1/n周期）だけとは限らない．周期も分からない．
- しかし，周波数という考え方は，信号を理解する上で自然かつ直感的だから捨てたくない．（「高い音」「低い音」）

非周期関数でも周波数要素に分解する事はできないか．

フーリエ級数展開と角周波数

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j\frac{2n\pi}{T}x) \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\exp(-j\frac{2n\pi}{T}x)dx$$





$\omega_n = \dfrac{2n\pi}{T}$ とする．角周波数と呼ぶ．

$\Delta\omega =$ 　　角周波数の刻み幅．

$f(x) \approx$ 　　　　　　$\omega_n = \dfrac{2n\pi}{T}$　　$c_n =$

フーリエ級数展開の考え方

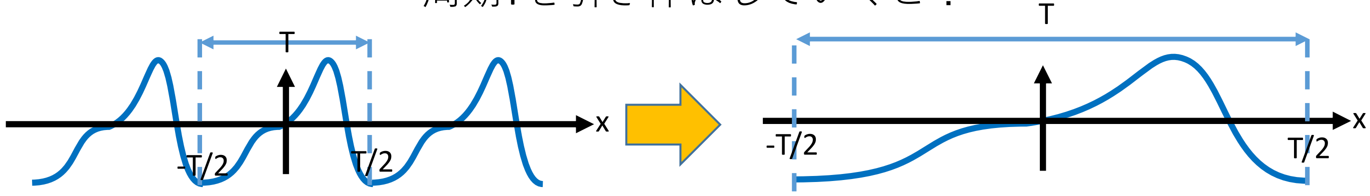
$f(x)$ は角周波数 ω_n の振動の合成で表せる．$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j\omega_n x)$　$\omega_n = \frac{2n\pi}{T}$

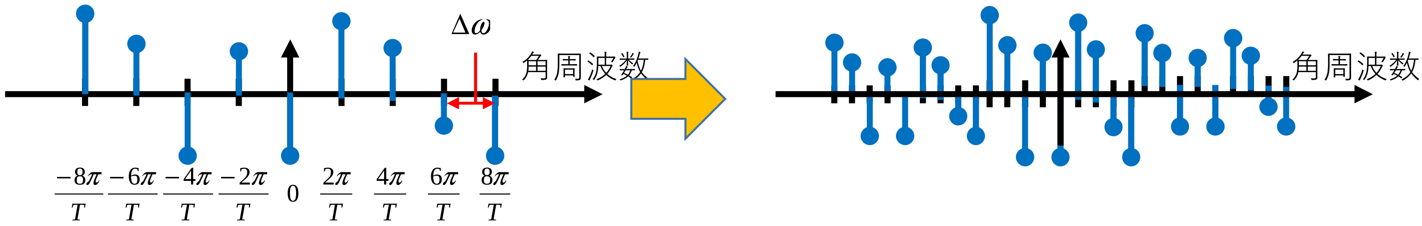
c_n は $f(x)$ に含まれる角周波数 ω_n の成分の大きさ（複素数）を表す．

非周期関数を，周期が非常に長い関数と考える

$$f(x) \approx \sum_{n=--\infty}^{\infty} c_n \exp(j\omega_n x) \qquad \omega_n = \frac{2n\pi}{T} \quad c_n = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\exp(-j\omega_n x)dx$$

周期Tを引き伸ばしていくと？





角周波数の間隔 $\Delta\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ は小さくなっていく

非周期関数を，周期が非常に長い関数と考える

$$f(x) \approx \sum_{n=--\infty}^{\infty} c_n \exp(j\omega_n x) \qquad \omega_n = \frac{2n\pi}{T} \quad c_n = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\exp(-j\omega_n x)dx$$

$$f(x) \approx \sum_{n=--\infty}^{\infty} c_n \exp(j\omega_n x)$$

$$=$$

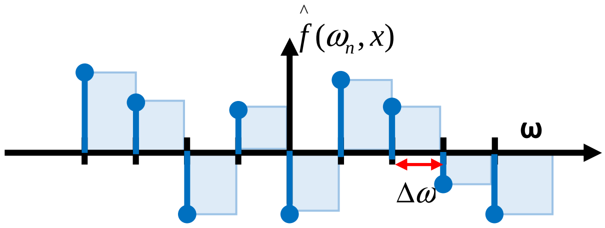
$$=$$

ここで $\hat{f}(\omega_n, x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)\exp(j\omega_n(x-y))dy$ とおくと

$$f(x) \approx$$

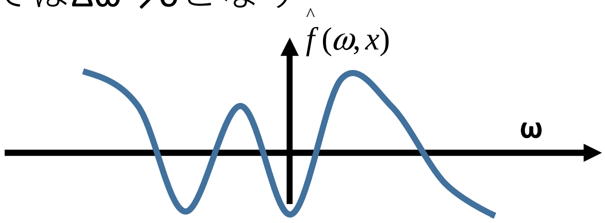
T→∞の極限では…

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega_n, x)\Delta\omega \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \hat{f}(\omega_n, x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)\exp(j\omega_n(x-y))dy$$



$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega_n, x)\Delta\omega$ はこの面積の総和
（実際はxの関数）

T→∞ではΔω→0となり



に収束する
（実際はxの関数）

このとき $\hat{f}(\omega, x) =$

T→∞の極限では…

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega, x)d\omega \quad \hat{f}(\omega, x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\exp(j\omega(x-y))dy$$

まとめて書くと

$f(x) =$ （フーリエ積分公式）

見通しを得るために書き直す

$f(x) =$

{} の中身はyに関する積分で，結果はωの関数になる．これを

$F(\omega) =$

とまとめると，

$f(x) =$

フーリエ変換

ある関数 $f(x)$ に対して，

- ω（周波数）の関数に変換する操作：

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j\omega x)dx$$

これを**フーリエ変換**という．
ωの連続関数を返す

- 元の関数に戻す操作：

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega x)d\omega$$

これを**逆フーリエ変換**という
（フーリエ逆変換とも）

フーリエ級数展開との対比：

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\exp(-j\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

フーリエ変換に対応．積分範囲が異なる．
結果は**離散的な級数．**

$$f(x)\approx\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\exp(j\frac{2n\pi}{T}x)$$

逆フーリエ変換に対応．
積分ではなく**級数の無限和**

フーリエ変換の解釈

ある関数 $f(x)$ に対して，ω（周波数）の関数に変換する操作

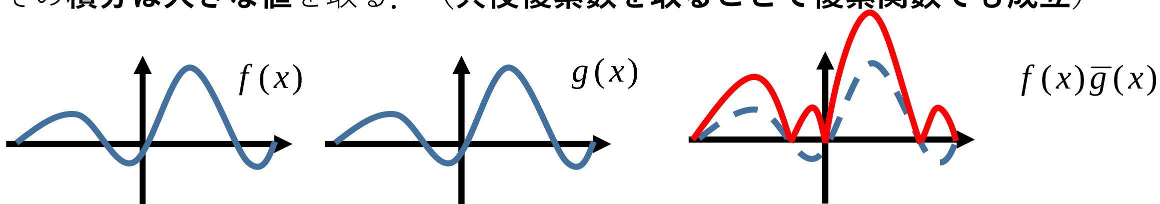
$$\boxed{F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j\omega x)dx}$$

これは何を意味するか？

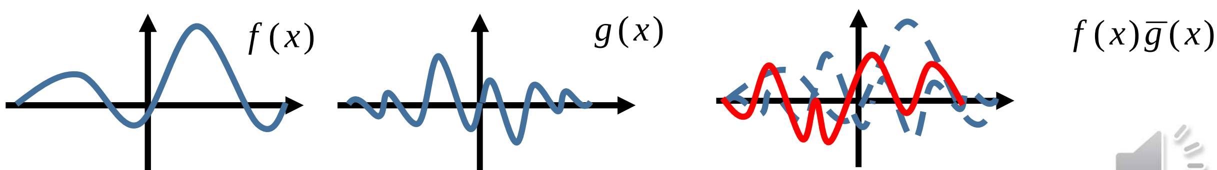
周期関数の復習

一般に，関数f,gに対して，$(f,g)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\underbrace{\overline{g}(x)}_{\text{共役複素数}}dx$ を，関数fとgの**内積**と呼ぶ

関数fとgが同一の場合，$f(x)\overline{g}(x)$ は $f(x)^2$ に等しく，**常に正値**をとる．
よってその**積分は大きな値**を取る．（**共役複素数を取ることで複素関数でも成立**）



関数fとgが無関係かずれていると，$f(x)\overline{g}(x)$ は正負に振れる．
よってその**積分は小さな値**を取る．

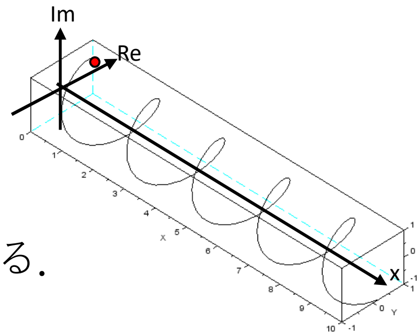


関数f,gの内積は，関数fにgの成分がどれだけ含まるかを，正負も含めて定量化する

フーリエ変換＝exp(jωt)による内積

フーリエ変換

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(\underline{-j\omega x})dx$$



は，元の関数$f(x)$と$\underline{\exp(j\omega x)}$ の内積であり，
つまり角周波数ωの成分の振幅と位相が計算されている.

だから，元に戻す計算（逆フーリエ変換）は，

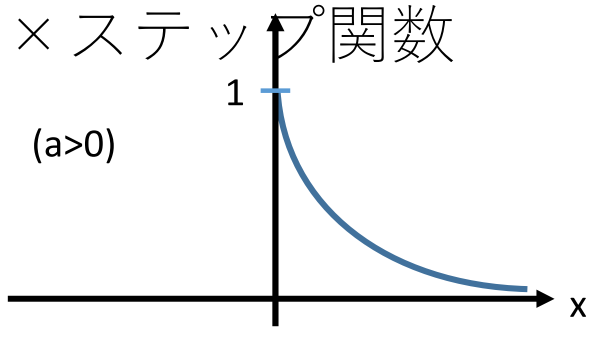
$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{F(\omega)}_{\text{角周波数ωの成分の振幅と位相}}\underbrace{\exp(j\omega x)}_{\text{角周波数ωの信号}}d\omega$$

という形をとる.

フーリエ変換の例：指数関数×ステップ関数

$$f(x)=\exp(-ax)u(x)=\begin{cases}\exp(-ax) & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

(a>0)



$$u(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

ステップ（階段）
関数と呼ぶ

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j\omega x)dx$$

$=$

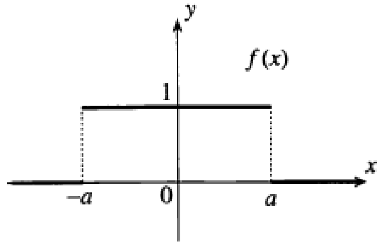
$=$

$=$

書いてみよう.

フーリエ変換の例：単発矩形波（矩形関数）

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$$



$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j\omega x)dx$$

$$=$$

$$=$$

ω≠0として

$$=$$

$$=$$

ω=0の場合には,

$$F(\omega)=$$

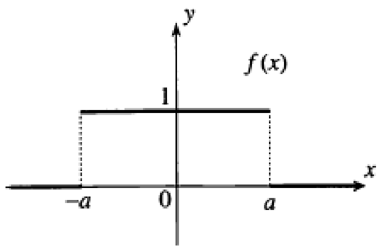
先の式においても

なので，結果的に一致.

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

フーリエ変換の例：単発矩形波（矩形関数）

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$$



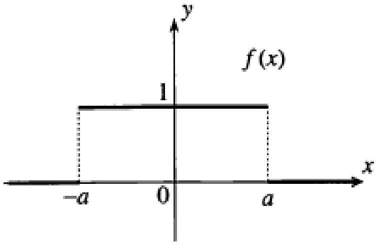
$$F(\omega)=\frac{2\sin(a\omega)}{\omega}$$

$\mathrm{sinc}(\omega)=\dfrac{\sin(\omega)}{\omega}$ をsinc関数と呼ぶ．これを使うと $F(\omega)=2a\,\mathrm{sinc}(a\omega)$

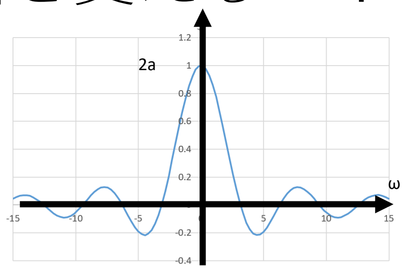
書いてみよう.

フーリエ変換の例：単発矩形波：幅を変えると？

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<a \\ 0 & |x|>a\end{cases}$$



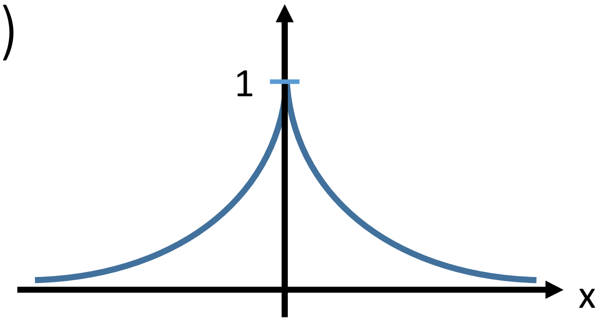
$$F(\omega)=\frac{2\sin(a\omega)}{\omega}$$



単発矩形波の幅が狭くなると，フーリエ変換結果は幅が広くなる．

フーリエ変換の例：exp(-a|x|)

$$f(x)=\exp(-a|x|) \qquad \text{(a>0)}$$



$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j\omega x)dx$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

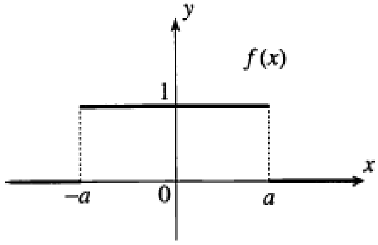
$$=$$

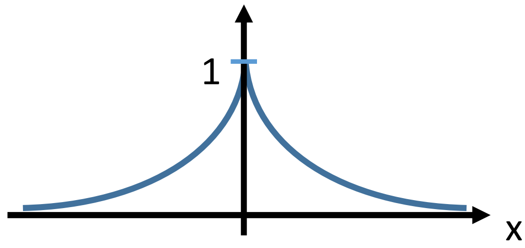
書いてみよう．

なぜ矩形関数とexp(-a|x|)のフーリエ変換は実関数になったか

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$$

$$f(x)=\exp(-a|x|)$$





関数 $f(x)$ が実数関数の時,

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j\omega x)dx$$

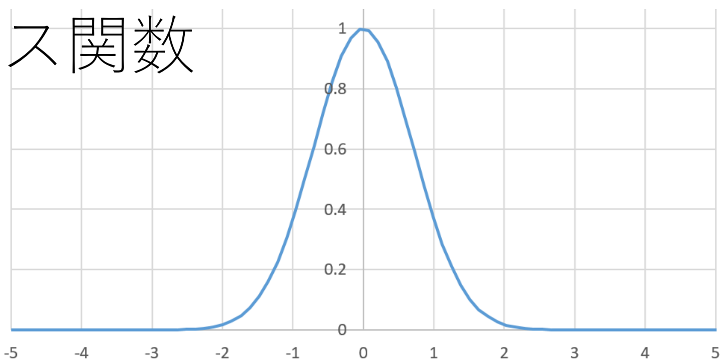
$$=$$

$$=$$

もし関数 $f(x)$ が偶関数なら虚部の積分が消える

元の関数が実・偶関数であれば，フーリエ変換は実関数となる.

フーリエ変換の例：ガウス関数



$$f(x)=\exp(-ax^2) \qquad \text{(a>0)}$$

ガウス関数，ガウシアンと呼ぶ
統計，画像処理等に多出.

まず準備としてこの関数自体の積分値を求めておく.

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-ax^2)dx$$

技巧としてこの自乗を求める.

$$I^2=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$\therefore$$

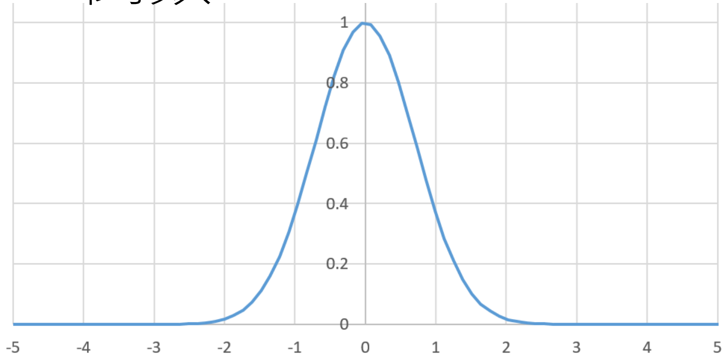
$$x=r\cos(\theta)$$
$$y=r\sin(\theta)$$
$$x^2+y^2=r^2$$
$$J=\det\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -r\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & r\cos(\theta)\end{bmatrix}$$
$$=r(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))=r$$

（おそらく微分積分学第二で習った重積分）

フーリエ変換の例：ガウス関数

$$f(x) = \exp(-ax^2) \quad \text{(a>0)}$$

実際のフーリエ変換に移る



$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j\omega x)dx$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

これをIとおく.

$$I =$$

フーリエ変換の例：ガウス関数

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)\cos(\omega x)dx$$

ωで微分する

$$\frac{d}{d\omega} I =$$

$$=$$

$$=$$

$$\therefore$$

フーリエ変換の例：ガウス関数

$$\frac{dI}{d\omega} = -\frac{\omega}{2a} I$$

定数Dを求めるためω=0の時を考える

$$I =$$

$$=$$

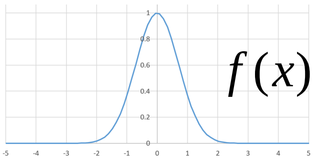
$$D\exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right) =$$

予め求めておいた

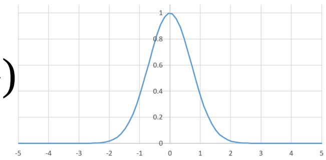
これが等しいから，

$$D =$$

$$\therefore I =$$

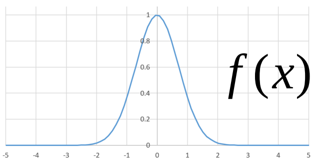


$$f(x) = \exp(-ax^2) \quad (a>0) \xrightarrow{\text{F.T}} F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right)$$

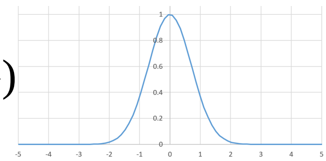


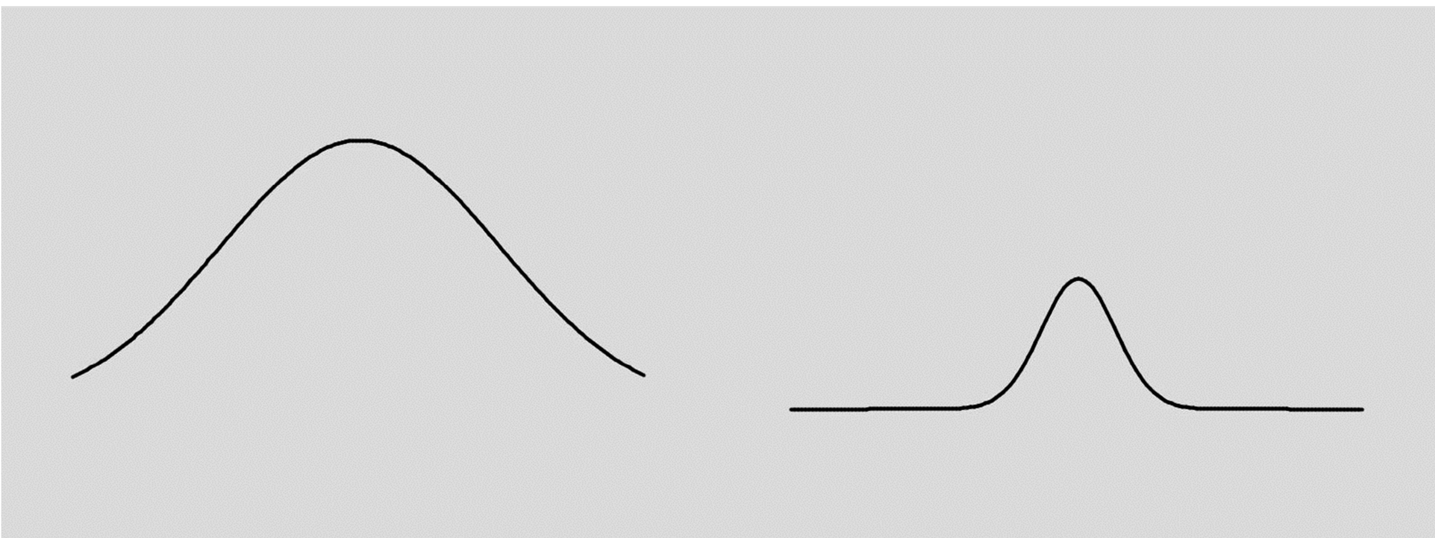
すなわちガウス関数のフーリエ変換は，同じガウス関数になる．

フーリエ変換の例：ガウス関数：幅を変えると？



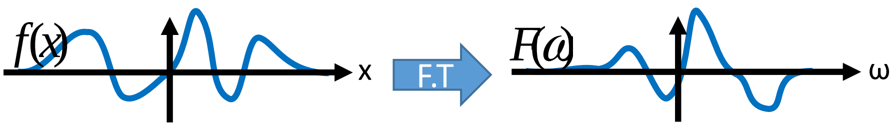
$$f(x) = \exp(-ax^2) \quad (a>0) \xrightarrow{\text{F.T}} F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right)$$





ガウス関数の幅が狭くなると，フーリエ変換結果は幅が広くなる．

今日のまとめ

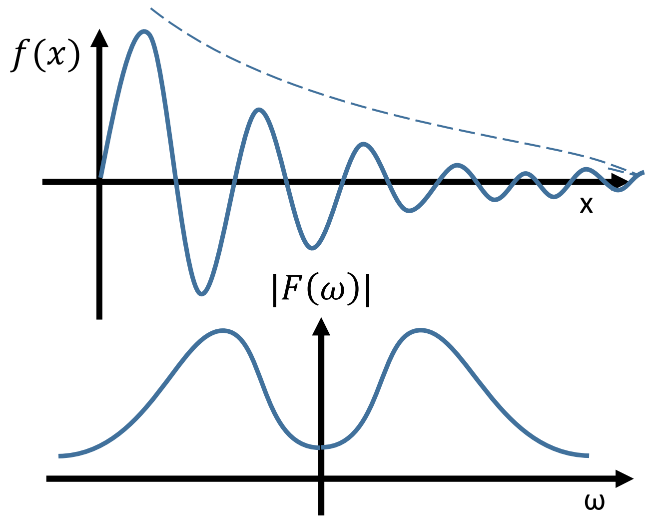


- フーリエ級数展開の**周期を無限大**にすることにより，**非周期的な関数にも対応できるフーリエ変換**を導入した．
- フーリエ変換の意味：内積の意味から，**元の関数のexp(jωt)成分**を計算するもの．
- フーリエ変換の実例から：実偶関数のフーリエ変換は実数となる．
- フーリエ変換ができるようになった！

次回はフーリエ変換の性質と，δ関数．

今日のレポート

(フーリエ変換)
$f(x) = u(x)\exp(-ax)\sin(bx)$ のフーリエ変換が、 $\mathrm{F}(\omega) = \frac{b}{(a+j\omega)^2+b^2}$となることを示せ。ただし $u(x)$は ステップ関数を表し、$a > 0$とする。



なおこの関数は**減衰正弦波**(decaying sinusoid)と呼ばれ、実際の物理現象に頻出する。例えば下記は物体を叩いた際の振動を減衰正弦波で近似し、触覚提示装置で再現を試みた論文
https://www.researchgate.net/publication/260330579_Reality-based_models_for_vibration_feedback_in_virtual_environments

レポートは紙に書いたものを写真にとり、指定のフォームからアップロードする。Googleアカウントによりアップロードするので、大学が提供しているアカウントを使用すること。画像ファイルは5MB以下に抑えること。

提出締め切り：講義日から一週間以内