

応用数学第一

第五回

梶本裕之

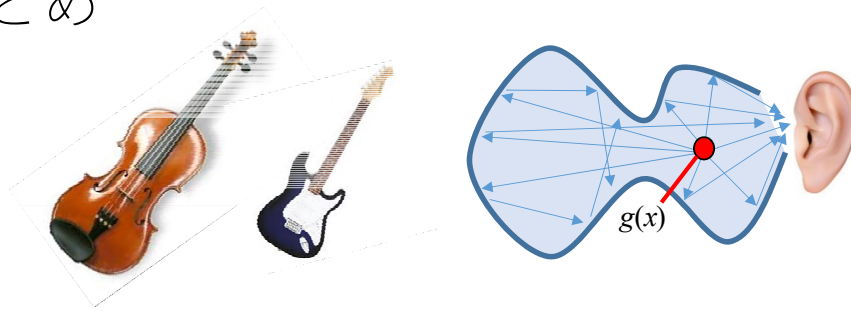


日程

講義番号	講義日	講義内容
1	10/1	周期関数、フーリエ級数の定義
2	10/8	フーリエ級数の計算例
3	10/15	複素フーリエ級数、直交関数系
-	10/22	体育祭
4	10/29	周期関数のたたみこみ、パーセバルの等式
5	11/5	非周期関数、フーリエ変換の定義・計算例
6	11/12	フーリエ変換の性質
-	11/19	中間確認問題（自習）
7	11/26	デルタ関数とフーリエ変換、たたみこみのフーリエ変換、パーセバルの等式
8	12/3	離散時間信号と離散時間フーリエ変換（教科書外）
9	12/10	離散フーリエ変換（教科書外）
10	12/17	離散フーリエ変換の性質（教科書外）
11	1/7	サンプリング定理
12	1/14	ラプラス変換の定義と性質
13	1/21	線形常微分方程式のラプラス変換による解法
-	1/28	期末テスト準備（自習）
-	2/4	期末確認テスト（全範囲。現在は大学を予定）



前回のまとめ



- 一般的な信号を「原音」と「環境による反響」の相互作用とみなし，たたみ込み積分を導入した.
- たたみ込み積分のフーリエ級数展開によって，周波数領域では各周波数の積にすぎないことを理解した.
- 特殊な場合を計算することでパーセバルの等式を導入し，フーリエ級数展開によって「パワー」は変化しないことを見た.

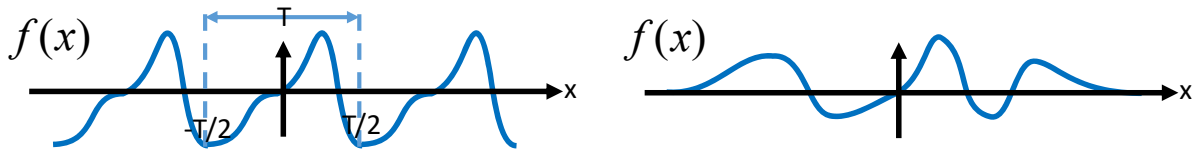


今日の目標

- フーリエ変換を導入し，意味をつかむ.
- フーリエ変換の計算をする.
- フーリエ変換の基本的な性質を知る.



周期関数から非周期関数へ

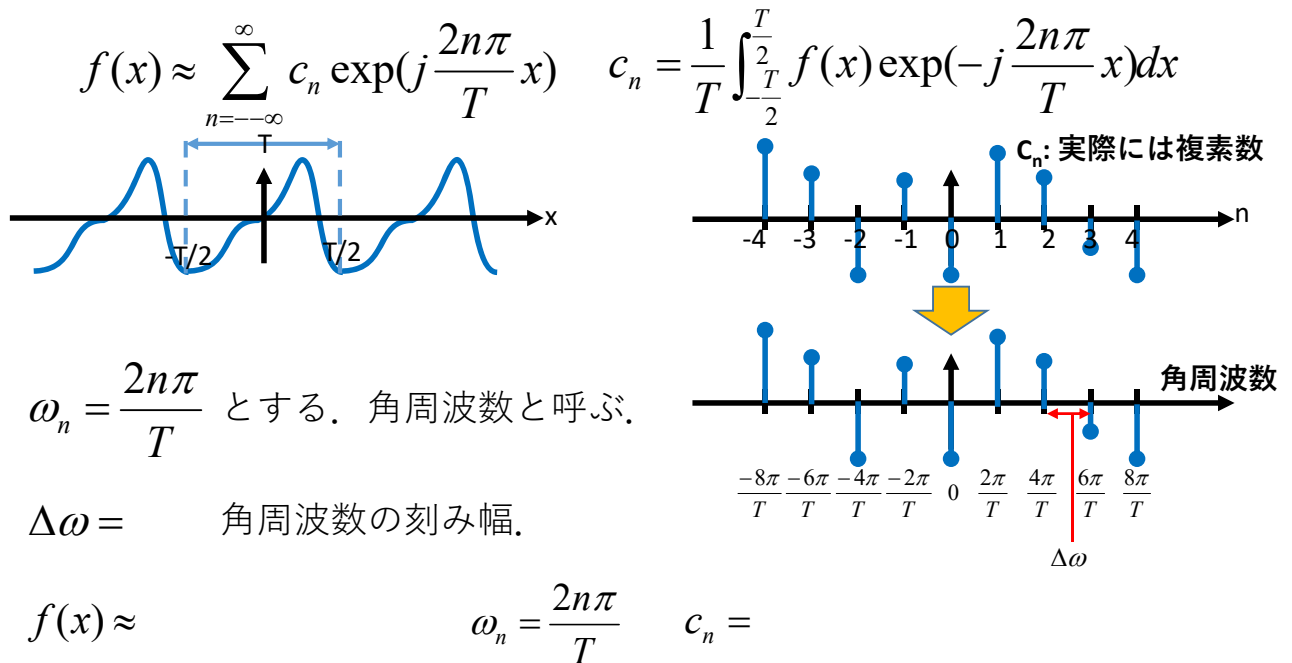


- 元のアイデア：世の中の多くの現象は周期的だから，周期関数と仮定して要素分解しよう。
- 現実：もちろん周期関数とは限らない．周期関数だとしても，一つの周期（とその $1/n$ 周期）だけとは限らない．周期も分からない．
- しかし，周波数という考え方は，信号を理解する上で自然かつ直感的だから捨てたくない．（「高い音」「低い音」）

非周期関数でも周波数要素に分解する事はできないか.



フーリエ級数展開と角周波数



フーリエ級数展開の考え方

$f(x)$ は角周波数 ω_n の振動の合成で表せる． $f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j \omega_n x) \quad \omega_n = \frac{2n\pi}{T}$

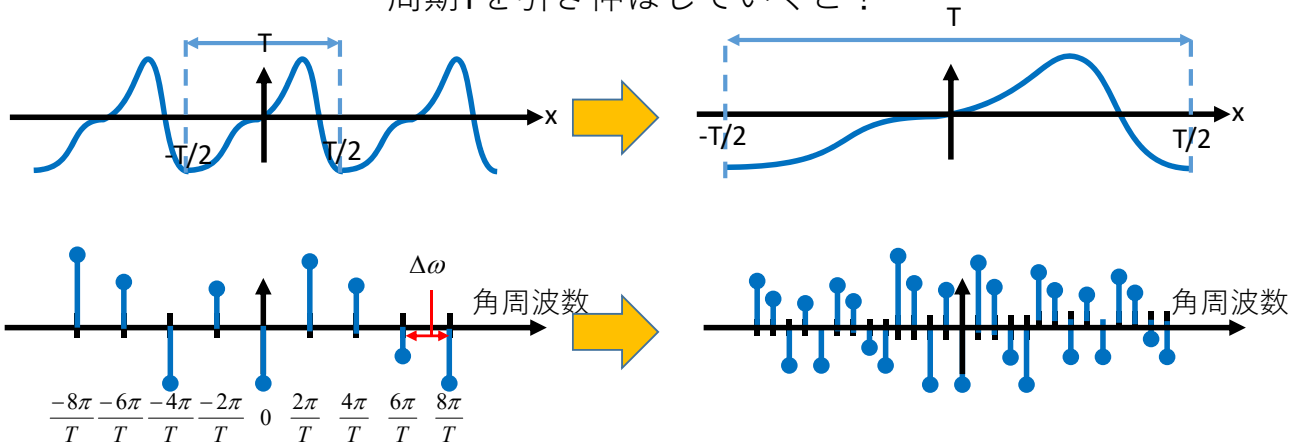
c_n は $f(x)$ に含まれる角周波数 ω_n の成分の大きさ（複素数）を表す．



非周期関数を，周期が非常に長い関数と考える

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j\omega_n x) \quad \omega_n = \frac{2n\pi}{T} \quad c_n = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \exp(-j\omega_n x) dx$$

周期Tを引き伸ばしていくと？



角周波数の間隔 $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ は小さくなっていく



非周期関数を，周期が非常に長い関数と考える

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j\omega_n x) \quad \omega_n = \frac{2n\pi}{T} \quad c_n = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \exp(-j\omega_n x) dx$$

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j\omega_n x)$$

=

=

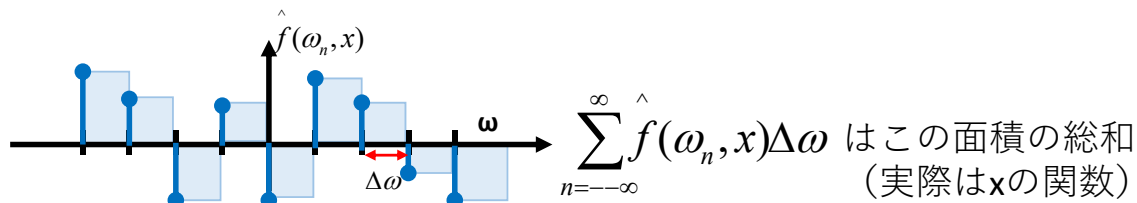
ここで $\hat{f}(\omega_n, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y) \exp(j\omega_n(x-y)) dy$ とおくと

$$f(x) \approx$$

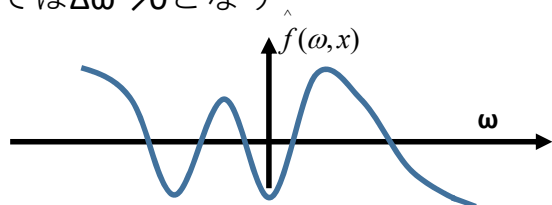


$T \rightarrow \infty$ の極限では...

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega_n, x) \Delta\omega \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \hat{f}(\omega_n, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y) \exp(j\omega_n(x-y)) dy$$



$T \rightarrow \infty$ では $\Delta\omega \rightarrow 0$ となり



に収束する
(実際はxの関数)

このとき $\hat{f}(\omega, x) =$



$T \rightarrow \infty$ の極限では...

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega, x) d\omega \quad \hat{f}(\omega, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp(j\omega(x-y)) dy$$

まとめて書くと

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp(j\omega(x-y)) dy \right] \exp(-j\omega x) d\omega \quad (\text{フーリエ積分公式})$$

見通しを得るために書き直す

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp(j\omega(x-y)) dy \right] \exp(-j\omega x) d\omega$$

{ } の中身はyに関する積分で、結果はωの関数になる。これを

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp(j\omega(x-y)) dy$$

とまとめると、

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(-j\omega x) d\omega$$



フーリエ変換

ある関数 $f(x)$ に対して、

- ω (周波数) の関数に変換する操作：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-j\omega x) dx$$

これをフーリエ変換という。
 ω の連続関数を返す

- 元の関数に戻す操作：

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega x) d\omega$$

これを逆フーリエ変換という
(フーリエ逆変換とも)

フーリエ級数展開との対比：

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \exp(-j\frac{2n\pi}{T}x) dx$$

フーリエ変換に対応。積分範囲が異なる。
結果は離散的な級数。

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j\frac{2n\pi}{T}x)$$

逆フーリエ変換に対応。
積分ではなく級数の無限和



フーリエ変換の解釈

ある関数 $f(x)$ に対して、 ω (周波数) の関数に変換する操作

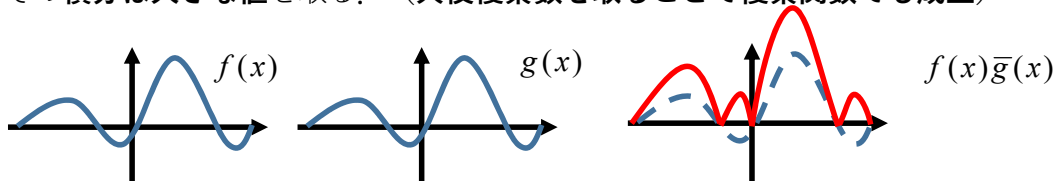
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-j\omega x) dx$$

これは何を意味するか？

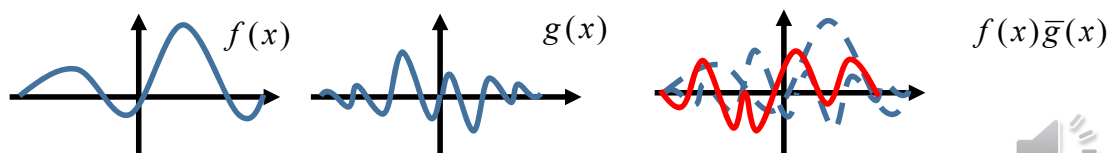
周期関数の復習

一般に、関数 f, g に対して、 $(f, g) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \bar{g}(x) dx$ を、関数 f と g の内積と呼ぶ
共役複素数

関数 f と g が同一の場合、 $f(x) \bar{g}(x)$ は $f(x)^2$ に等しく、常に正値をとる。
よってその積分は大きな値を取る。(共役複素数を取ることで複素関数でも成立)



関数 f と g が無関係かずれていると、 $f(x) \bar{g}(x)$ は正負に振れる。
よってその積分は小さな値を取る。



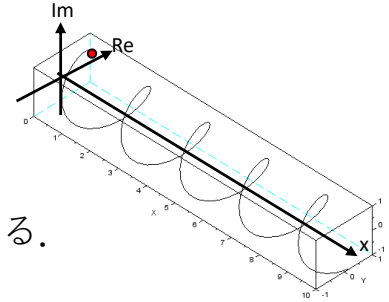
関数 f, g の内積は、関数 f に g の成分がどれだけ含まれるかを、正負も含めて定量化する



フーリエ変換 = $\exp(j\omega t)$ による内積

フーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-j\omega x) dx$$



は、元の関数 $f(x)$ と $\exp(j\omega x)$ の内積であり、つまり角周波数 ω の成分の振幅と位相が計算されている。

だから、元に戻す計算（逆フーリエ変換）は、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega x) d\omega$$

という形をとる。

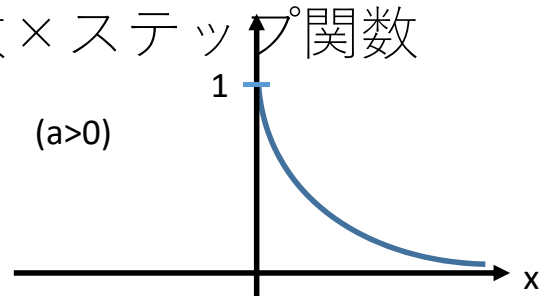
角周波数 ω の成分の振幅と位相 角周波数 ω の信号



フーリエ変換の例：指数関数 × ステップ関数

$$f(x) = \exp(-ax)u(x) = \begin{cases} \exp(-ax) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (a > 0)$$

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{ステップ (階段)} \\ \text{関数と呼ぶ} \end{array}$$



$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-j\omega x) dx$$

=

=

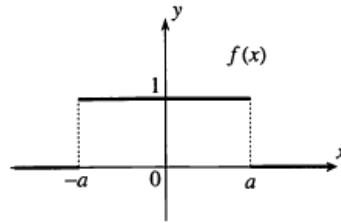
=

書いてみよう。



フーリエ変換の例：単発矩形波（矩形関数）

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$



$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-j\omega x) dx$$

$\omega=0$ の場合には,

=

$$F(\omega) =$$

=

$\omega \neq 0$ として

先の式においても

=

なので、結果的に一致。

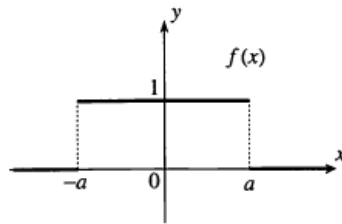
=

$$\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$



フーリエ変換の例：単発矩形波（矩形関数）

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \quad F(\omega) = \frac{2 \sin(a\omega)}{\omega}$$

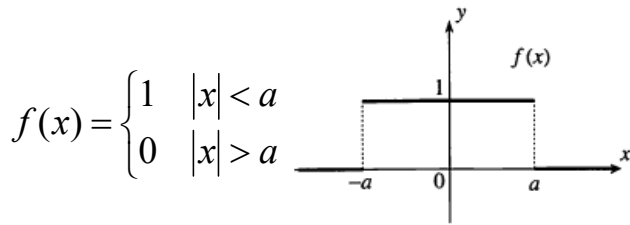


$$\text{sinc}(\omega) = \frac{\sin(\omega)}{\omega} \text{ を sinc 関数と呼ぶ. これを使うと } F(\omega) = 2a \text{sinc}(a\omega)$$

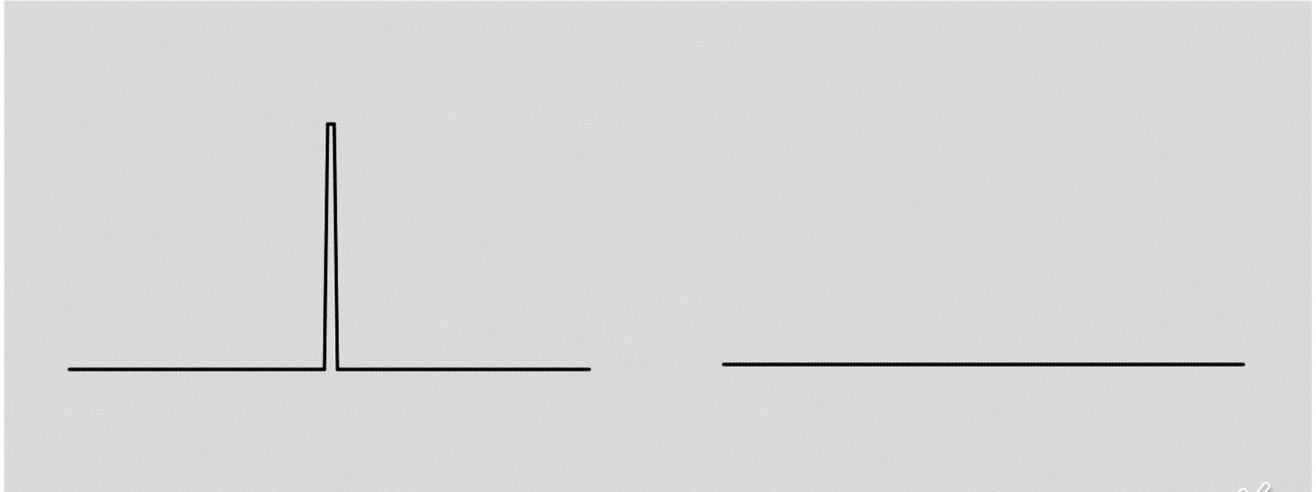
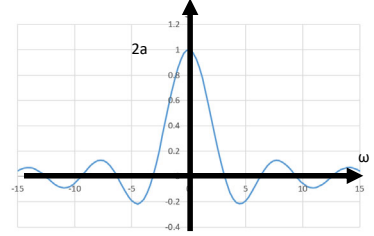
書いてみよう.



フーリエ変換の例：単発矩形波：幅を変えると？



$$F(\omega) = \frac{2\sin(a\omega)}{\omega}$$



単発矩形波の幅が狭くなると、フーリエ変換結果は幅が広がる。

フーリエ変換の例： $\exp(-a|x|)$

$$f(x) = \exp(-a|x|) \quad (a>0)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-j\omega x) dx$$

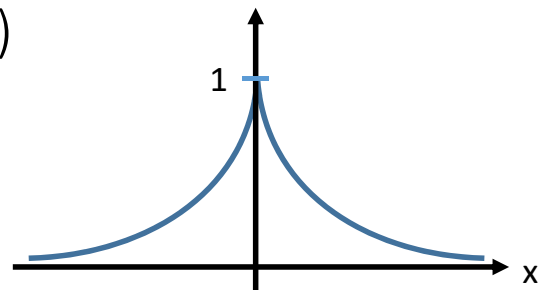
=

=

=

=

=



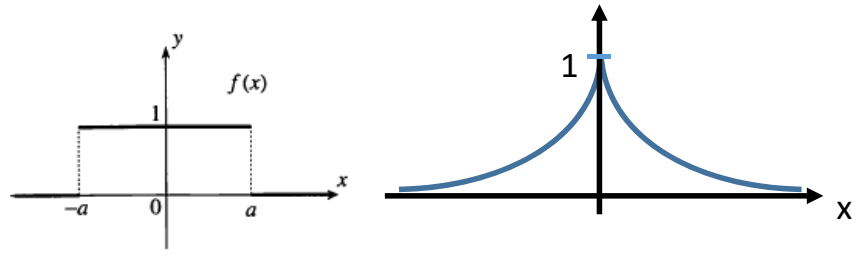
書いてみよう。



なぜ矩形関数と $\exp(-a|x|)$ のフーリエ変換は実関数になったか

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

$$f(x) = \exp(-a|x|)$$



関数 $f(x)$ が実関数の時,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-j\omega x) dx$$

=

=

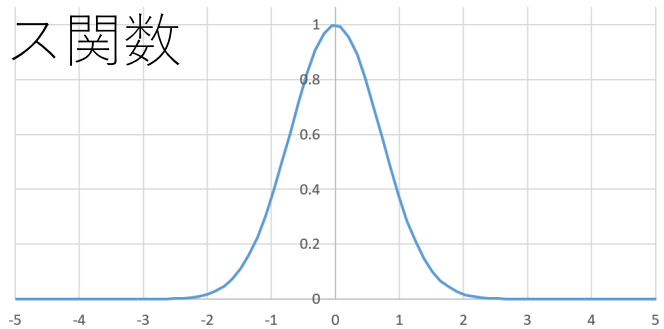
もし関数 $f(x)$ が偶関数なら虚部の積分が消える

元の関数が実・偶関数であれば、フーリエ変換は実関数となる。

フーリエ変換の例：ガウス関数

$$f(x) = \exp(-ax^2) \quad (a>0)$$

ガウス関数、ガウシアンと呼ぶ
統計、画像処理等に多出。



まず準備としてこの関数自体の積分値を求めておく。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx$$

技巧としてこの自乗を求める。

$$I^2 =$$

=

=

=

=

∴

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \sin(\theta) \\ x^2 + y^2 &= r^2 \\ J &= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{bmatrix} \\ &= r(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = r \end{aligned}$$

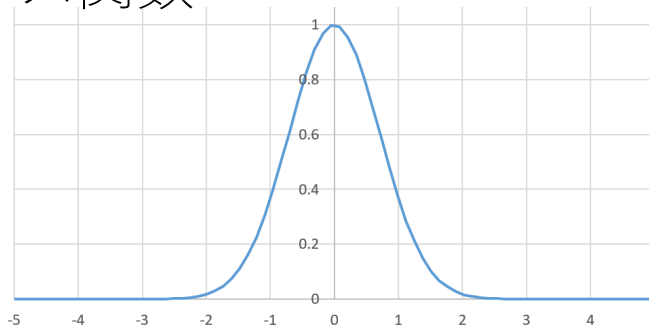
(おそらく微分積分学第二で習った重積分)



フーリエ変換の例：ガウス関数

$$f(x) = \exp(-ax^2) \quad (a>0)$$

実際のフーリエ変換に移る



$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-j\omega x) dx$$

=

=

=

これをIとおく.

$$I =$$



フーリエ変換の例：ガウス関数

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) \cos(\omega x) dx$$

ω で微分する

$$\frac{d}{d\omega} I =$$

=

=

\therefore



フーリエ変換の例：ガウス関数

$$\frac{dI}{d\omega} = -\frac{\omega}{2a} I$$

定数Dを求めるため $\omega=0$ の時を考える

$$I =$$

$$=$$

$$D \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right) =$$

予め求めておいた

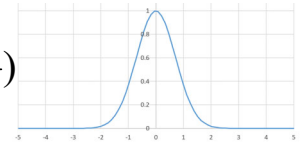
これが等しいから、

$$D =$$

$$\therefore I =$$



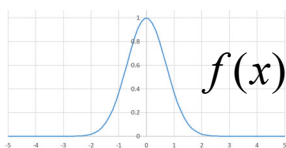
$$f(x) = \exp(-ax^2) \quad (a > 0) \xrightarrow{\text{F.T.}} F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right)$$



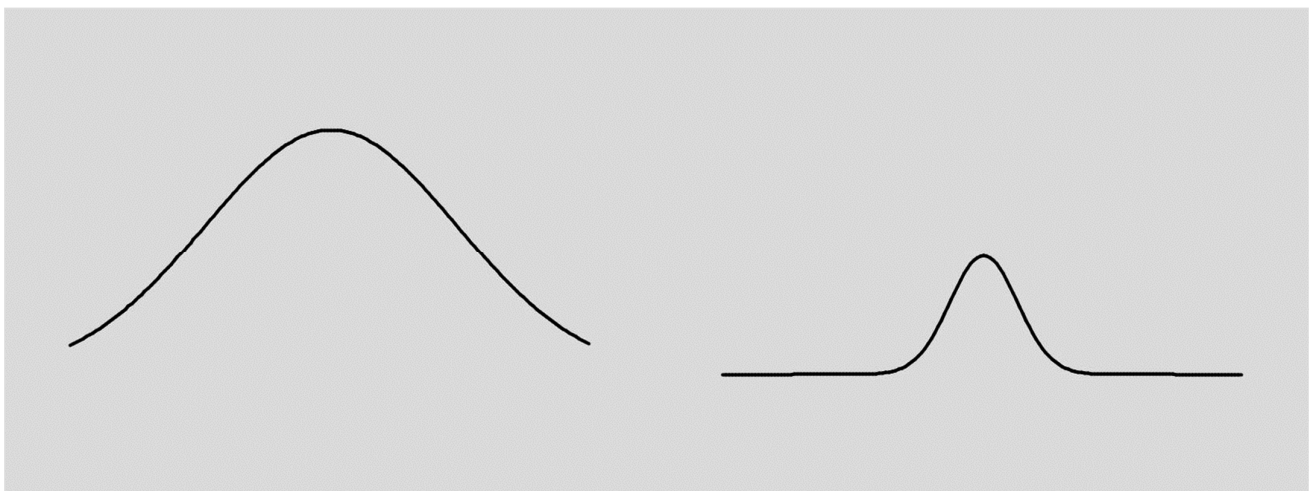
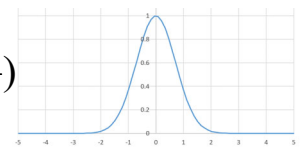
すなわちガウス関数のフーリエ変換は、同じガウス関数になる。



フーリエ変換の例：ガウス関数：幅を変えると？



$$f(x) = \exp(-ax^2) \quad (a > 0) \xrightarrow{\text{F.T.}} F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right)$$



ガウス関数の幅が狭くなると、フーリエ変換結果は幅が広がる。



今日のまとめ



- フーリエ級数展開の**周期を無限大**にすることにより，**非周期的な関数にも対応できるフーリエ変換**を導入した。
- フーリエ変換の意味：内積の意味から，**元の関数のexp(jwt)成分**を計算するもの。
- フーリエ変換の実例から：実偶関数のフーリエ変換は実数となる。
- フーリエ変換ができるようになった！

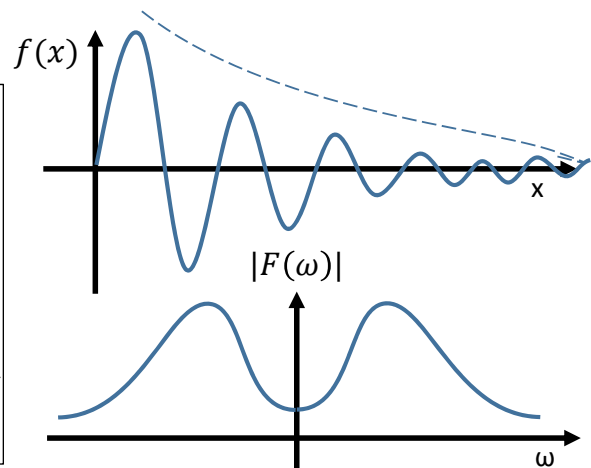
次回はフーリエ変換の性質と， δ 関数。



今日のレポート

(フーリエ変換)

$f(x) = u(x) \exp(-ax) \sin(bx)$ のフーリエ変換が、 $F(\omega) = \frac{b}{(a+j\omega)^2+b^2}$ となることを示せ。ただし $u(x)$ は ステップ関数を表し、 $a > 0$ とする。



なおこの関数は**減衰正弦波(decaying sinusoid)**と呼ばれ、実際の物理現象に頻出する。例えば下記は物体を叩いた際の振動を減衰正弦波で近似し、触覚提示装置で再現を試みた論文

https://www.researchgate.net/publication/260330579_Reality-based_models_for_vibration_feedback_in_virtual_environments



レポートは紙に書いたものを写真にとり、下記からアップロードする。
Googleアカウントによりアップロードするので、大学が提供しているアカウントを使用すること。画像ファイルは5MB以下に抑えること。

<https://forms.gle/tovLwBV1eauiuoAVA>

提出締め切り：講義日から一週間以内

