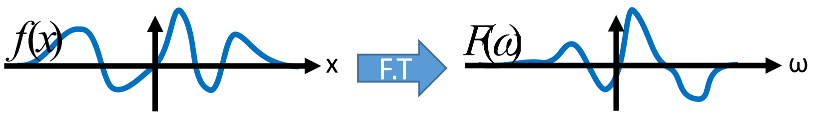
日程

講義番号	講義日	講義内容	pdf	video	レポート締め切り
1	10/6	周期関数、フーリエ級数の定義	[pdf](2022年版)	video	10/13
2	10/13	フーリエ級数の計算例	[pdf](2021年版)	video	10/20
3	10/20	複素フーリエ級数、直交関数系	[pdf](2021年版)	video	10/27
4	10/27	周期関数のたたみこみ、パーセバルの等式	[pdf](2021年版)	video	11/3
-	11/3	文化の日			
5	11/10	非周期関数、フーリエ変換の定義・計算例	[pdf](2021年版)	video	11/17
-	11/17	調布祭準備			
6	11/24	フーリエ変換の性質	[pdf](2021年版)	video	12/1
7	12/1	デルタ関数とフーリエ変換、たたみこみのフーリエ変換、パーセバルの等式	[pdf](2021年版)	video	12/8
-	12/8	中間確認テスト（前半。現在は大学を予定）	中間確認テスト用問題集	[pdf](2021年版)	
8	12/15	離散時間信号と離散時間フーリエ変換（教科書外）	[pdf](2021年版)	video	12/22
9	12/22	離散フーリエ変換（教科書外）	[pdf](2021年版)	video	1/5
10	1/5	離散フーリエ変換の性質（教科書外）	[pdf](2021年版)	video	1/12
11	1/12	サンプリング定理	[pdf](2021年版)	video	1/19
12	1/19	ラプラス変換の定義と性質	[pdf](2021年版)	video	1/26
13	1/26	線形常微分方程式のラプラス変換による解法	[pdf](2021年版)	video	2/2
-	2/2	期末用自習	[pdf](2021年版)		
-	2/9	期末確認テスト（後半。現在は大学を予定）			

前回のまとめ



$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j\omega x)dx \qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega x)d\omega$$

- フーリエ級数展開の**周期を無限大**にすることにより，**非周期的な関数にも対応できるフーリエ変換**を導入した.
- フーリエ変換の意味：内積の意味から，**元の関数のexp(jωt)成分**を計算するもの.
- フーリエ変換の実例から：実対称関数のフーリエ変換は実数となる.
- フーリエ変換が出来るようになった！

（復習）フーリエ変換＝exp(jωt)による内積

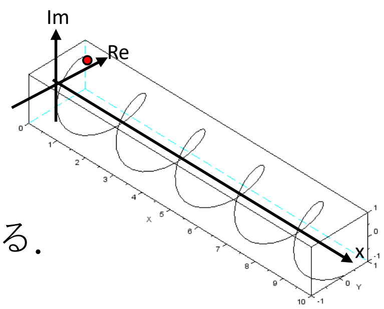
内積は周期関数に限らない

一般に，関数f,gに対して，$(f,g)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\underbrace{\overline{g}(x)}_{\text{共役複素数}}dx$ を，関数fとgの**内積**と呼ぶ

この場合も，内積＝関数同士の類似度，という意味合いは変わらない.

つまり，フーリエ変換

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j\omega x)dx$$



は，元の関数$f(x)$と$\exp(j\omega x)$ の内積であり，
つまり角周波数ωの成分の振幅と位相が計算されている.

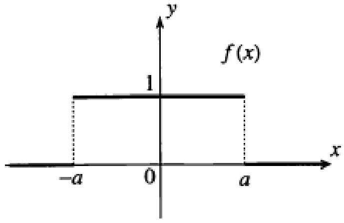
だから，元に戻す計算（逆フーリエ変換）は，

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{F(\omega)}_{\text{角周波数ωの成分の振幅と位相}}\underbrace{\exp(j\omega x)}_{\text{角周波数ωの信号}}d\omega$$

という形をとる.

（復習）フーリエ変換の例：単発矩形波

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<a \\ 0 & |x|>a\end{cases}$$



$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j\omega x)dx$$
$$=\int_{-a}^{a} 1\exp(-j\omega x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{-j\omega}\exp(-j\omega x)\right]_{-a}^{a}$$

ω≠0として

$$=\frac{1}{-j\omega}\left(\exp(-j\omega a)-\exp(j\omega a)\right)$$
$$=\frac{2j\sin(a\omega)}{j\omega}=\frac{2\sin(a\omega)}{\omega}$$

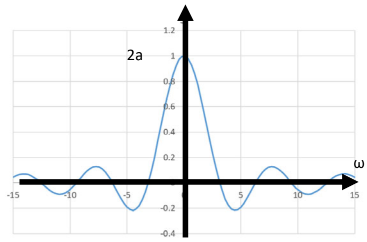
ω=0の場合には,

$$F(\omega)=\int_{-a}^{a} 1dx=2a$$

先の式においても

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{2\sin(a\omega)}{\omega}=2a \quad \because \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

なので，結果的に一致.



$\mathrm{sinc}(\omega)=\dfrac{\sin(\omega)}{\omega}$ をsinc関数と呼ぶ．これを使うと $F(\omega)=2a\,\mathrm{sinc}(a\omega)$

今日の目標

- フーリエ変換の性質を知る.
- δ（デルタ）関数に親しむ.

フーリエ変換の基本的性質（１）線形性

$$\boxed{F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j\omega x)dx \qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega x)d\omega}$$

$$f(x) \xrightarrow{\text{F.T}} F(\omega)$$
$$g(x) \xrightarrow{\text{F.T}} G(\omega)$$

のとき，$af(x)+bg(x)$ のフーリエ変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty}(af(x)+bg(x))\exp(-j\omega x)dx=$$

$$=$$

$$\boxed{af(x)+bg(x) \xrightarrow{\text{F.T}} aF(\omega)+bG(\omega)}$$

よって**フーリエ変換には重ね合わせが成立する**

フーリエ変換の基本的性質（２）相似性

$f(x) \xrightarrow{\text{F.T}} F(\omega)$ 　のとき，$f(cx)$ のフーリエ変換は？

c>0では $\int_{-\infty}^{\infty} f(cx)\exp(-j\omega x)dx$

$=$

$=$ 　**y=cx．積分範囲は∞なので変わらない**

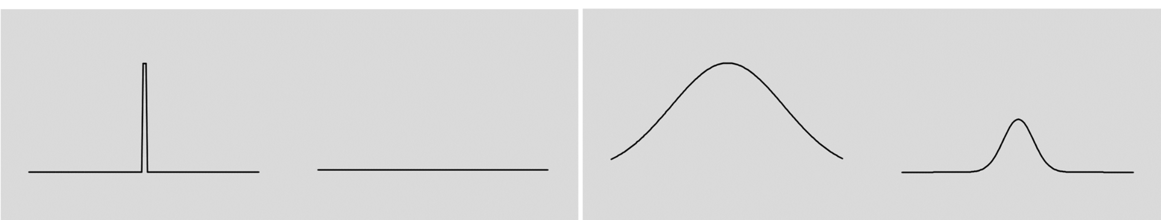
c<0では $\int_{-\infty}^{\infty} f(cx)\exp(-j\omega x)dx$

$=$

$=$ 　**y=cx．積分範囲の正負が入れ替わることに注意**

まとめて書くと $\boxed{f(cx) \xrightarrow{\text{F.T}} \frac{1}{|c|}F(\frac{\omega}{c})}$

よって**元関数の軸が伸び・縮むと，フーリエ変換は縮む・伸びる**（すでに例を見た）



フーリエ変換の基本的性質（3）周波数シフトと変数シフト

$f(x) \xrightarrow{\text{F.T}} F(\omega)$ のとき，$f(x)\exp(j\omega_0 x)$ のフーリエ変換は？

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(j\omega_0 x)\exp(-j\omega x)dx =$$

$$=$$

$$\boxed{f(x)\exp(j\omega_0 x) \xrightarrow{\text{F.T}} F(\omega-\omega_0)}$$

よって**元関数に$\exp(j\omega_0 t)$をかける操作は周波数ずらしに相当**

では逆に，元関数の変数ずらしは？

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0)\exp(-j\omega x)dx =$$

$$=$$

$$\boxed{f(x-x_0) \xrightarrow{\text{F.T}} F(\omega)\exp(-j\omega x_0)}$$

よって**元関数の変数をずらすと，フーリエ変換結果は$\exp(-j\omega x_0)$がかかる**

（参考）周波数シフトとAM変調

$$\boxed{f(x)\exp(j\omega_0 x) \xrightarrow{\text{F.T}} F(\omega-\omega_0)}$$

元の波形に周波数ω0の正弦波をかけると，周波数をずらすことが出来る．

実数の正弦波での理解

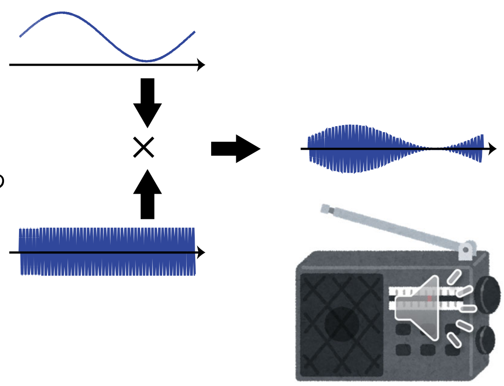
$$f(t)=\sin(2\pi f t)$$

$$f(t)\cdot\sin(2\pi f_0 t)=$$

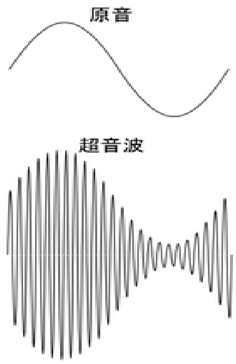
$$=$$

もとの周波数fが，$\pm f_0$だけシフトした．

AMラジオ等に用いられるAM変調では，元信号（音声信号：高々数kHz）に搬送信号（局によって異なる．ニッポン放送1242kHz等）を掛けて，周波数を搬送信号付近に移動して送信する．



大学院講義（インタラクティブシステム特論）より：パラメトリックスピーカ



フーリエ変換の基本的性質（４）微分

$f(x) \xrightarrow{\text{F.T}} F(\omega)$　のとき，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ のフーリエ変換は？

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} f(x) \exp(-j\omega x) dx$$

$=$

$=$　　**f(x)がx→±∞で0に収束する関数であるとする（絶対可積分）**

$$\boxed{\frac{d}{dx} f(x) \xrightarrow{\text{F.T}} j\omega F(\omega)}$$

よって**元関数の微分のフーリエ変換はjωを掛けたものになる**

N階微分でも成立する

$$\boxed{\frac{d^n}{dx^n} f(x) \xrightarrow{\text{F.T}} (j\omega)^n F(\omega)}$$

フーリエ変換の基本的性質（５）対称性

$f(x) \xrightarrow{\text{F.T}} F(\omega)$ のとき，変数を入れ替える．$f(\omega)$ と $F(x)$ の間の関係は？

起点は逆フーリエ変換の式： $f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega x)d\omega$

変数を次のように置き換える

$$\begin{cases} x & \rightarrow & -\omega \\ \omega & \rightarrow & x \end{cases}$$

$f(-\omega) =$

$2\pi \cdot f(-\omega) =$

これは，関数 $F(x)$ のフーリエ変換が
であることを意味する．

変数を次のように置き換える

$$\begin{cases} x & \rightarrow & \omega \\ \omega & \rightarrow & -x \end{cases}$$

$f(\omega) =$

$2\pi \cdot f(\omega) =$

これは，関数 $F(-x)$ のフーリエ変換が
であることを意味する

フーリエ変換の基本的性質（６－１）共役性

$f(x) \xrightarrow{\text{F.T}} F(\omega)$ のとき，共役関数 $\overline{f(x)}$ のフーリエ変換は？

元のフーリエ変換の式： $F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j\omega x)dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\exp(-j\omega x)dx =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

よって　$\overline{f(x)} \xrightarrow{\text{F.T}} \overline{F(-\omega)}$

フーリエ変換の基本的性質（６－２）共役性

$f(x) \xrightarrow{\text{F.T}} F(\omega)$ のとき，共役関数 $\overline{f(-x)}$ のフーリエ変換は？

元のフーリエ変換の式： $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j\omega x)dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(-x)}\exp(-j\omega x)dx =$$

変数変換．-x=y

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

よって $\overline{f(-x)} \xrightarrow{\text{F.T}} \overline{F(\omega)}$

単発矩形波（矩形関数）を「面積一定」で変化させる

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon} & -\varepsilon \le t \le \varepsilon \\ 0 & otherwise\end{cases}$$

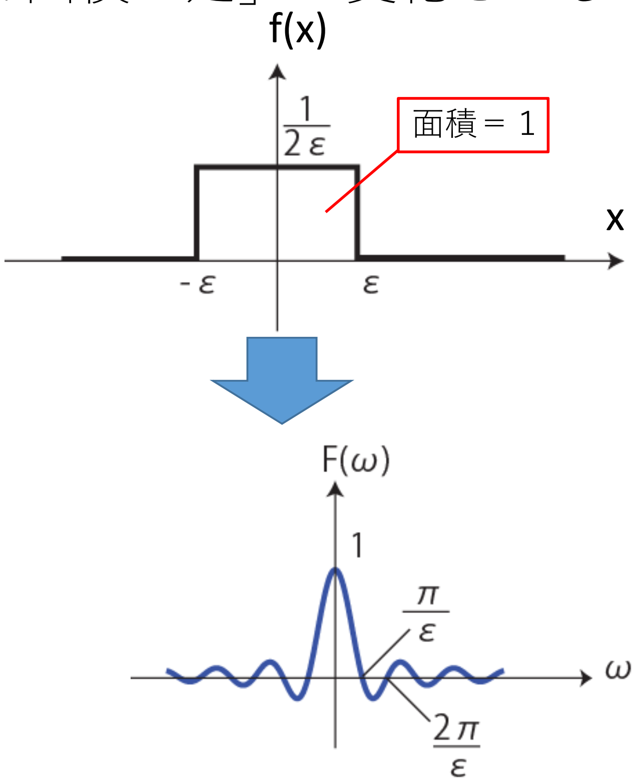
$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j\omega x)dx$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$= \qquad\qquad =$$

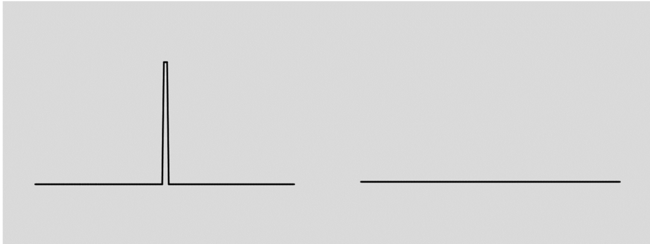


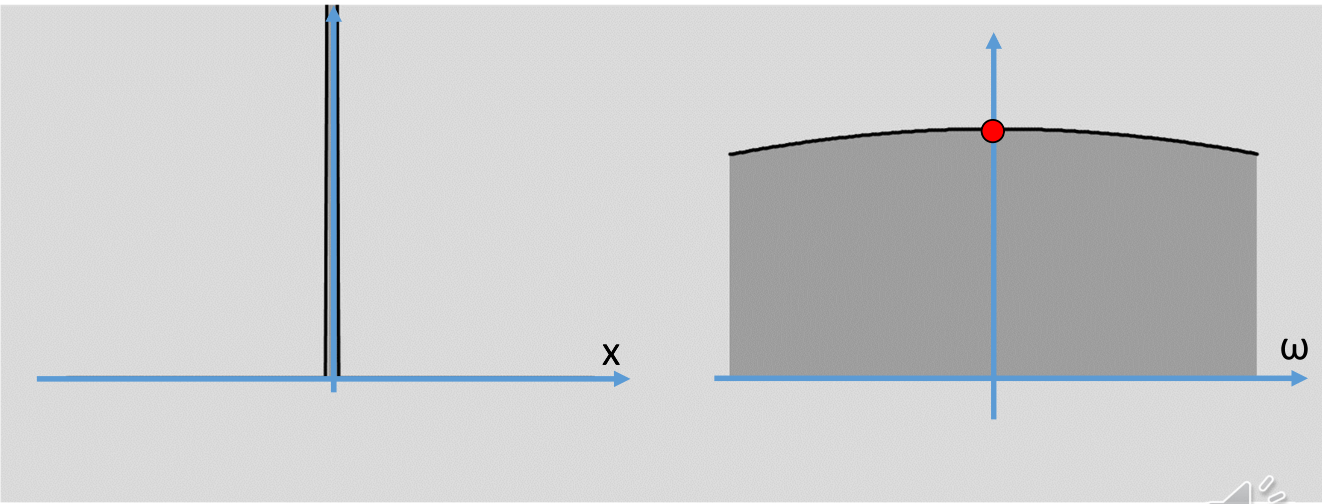
前回とは異なり，ω=0で1をキープ

面積を保ったまま幅を究極まで狭めると？

$$\begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \xrightarrow{\text{F.T}} \frac{2\sin(a\omega)}{\omega}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} & -\varepsilon \le t \le \varepsilon \\ 0 & otherwise \end{cases} \xrightarrow{\text{F.T}} \frac{\sin(\varepsilon\omega)}{\varepsilon\omega}$$

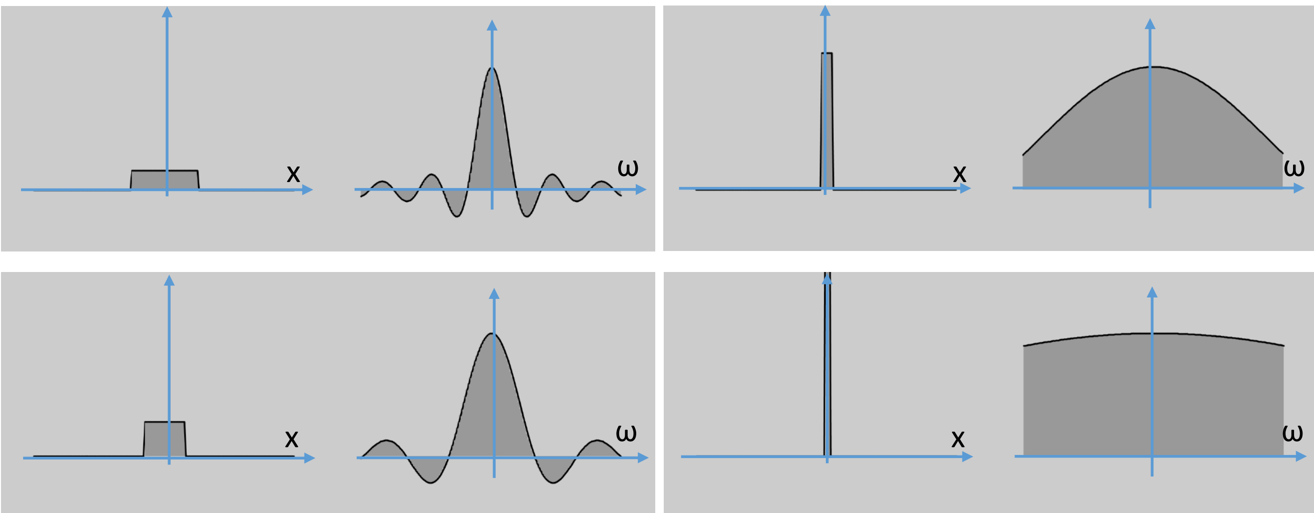




面積を保ったまま幅を狭めると，フーリエ変換結果は一定値１になる？

「インパルス」に対するフーリエ変換

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} & -\varepsilon \le t \le \varepsilon \\ 0 & otherwise \end{cases} \xrightarrow{\text{F.T}} \frac{\sin(\varepsilon\omega)}{\varepsilon\omega}$$



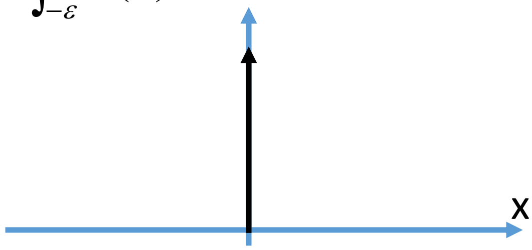
面積を保ったまま幅を狭めると，フーリエ変換結果は一定値１になる？
→インパルスはあらゆる周波数成分を同じ大きさで含む？
確かに「拍手」に高い音も低い音もない，気がする．

デルタ（δ）関数の導入

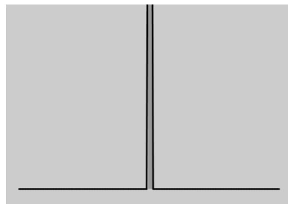
全面積がx=0に集中した仮想的な関数をデルタ関数と呼び，δ(x)と書く.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$ 全面積が 1

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)dx = 1$$ ε：任意正数．つまりどれだけεを小さくしても 1



原点で∞という意味で，矢印で表記.

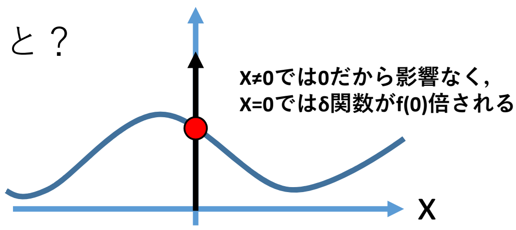


幅が無限に狭く，高さが無限に高くなった矩形波という理解が可能

デルタ関数の積分

デルタ関数と，一般の関数f(x)の積を積分すると？

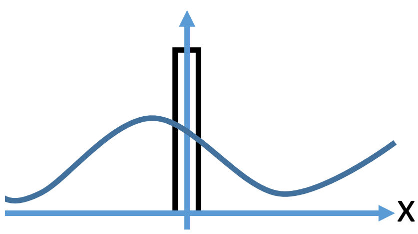
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)dx = \qquad =$$



デルタ関数を「矩形波の幅を短くした極限」と考えて理解

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} & -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)dx = \qquad =$$



つまり**デルタ関数は，積分操作によってf(0)の値を「取り出す」関数**である
（逆にこの積分操作によって定義されている）

なおデルタ関数は偶関数である：$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-x) f(x)dx = \qquad =$

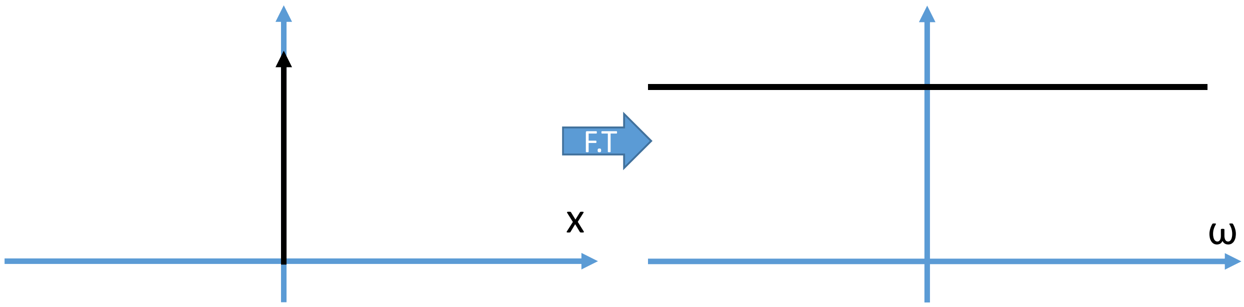
デルタ関数のフーリエ変換

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j\omega x)dx$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$



つまり矩形波のフーリエ変換（Sinc関数）で観察されていたように，
デルタ関数のフーリエ変換は一定値１となる

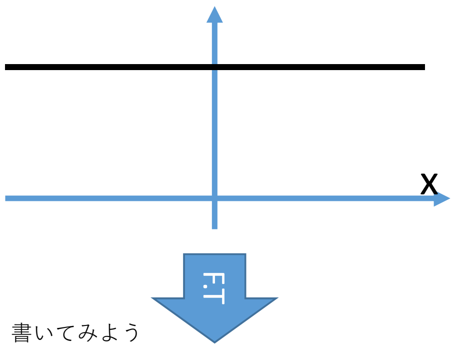
δ関数を使うと普通はできないフーリエ変換が出来る：定数

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j\omega x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} 1\exp(-j\omega x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{j\omega}\exp(-j\omega x)\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$=??$$



フーリエ変換の性質「対称性」より，

$f(x) \xrightarrow{\text{F.T}} F(\omega)$ のとき，$F(x) \xrightarrow{\text{F.T}} 2\pi f(-\omega)$

よって，デルタ関数のフーリエ変換が定数１だから，

$\delta(x) \xrightarrow{\text{F.T}}$ 　　のとき，　$\xrightarrow{\text{F.T}}$

(∵デルタ関数は偶関数)

つまり**「定数」のフーリエ変換はデルタ関数となる.**

一定振幅の波形＝周波数0の直流成分しか無い，と考えれば妥当

δ関数を使うと普通はできないフーリエ変換が出来る：複素単振動

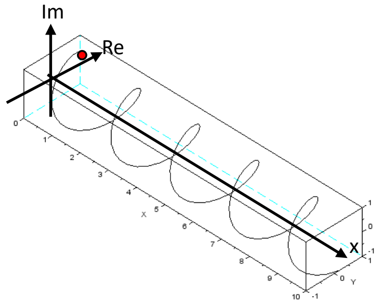
$$f(x) = \exp(j\omega_1 x)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j\omega x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\omega_1 x)\exp(-j\omega x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{j(\omega_1 - \omega)}\exp(j(\omega_1 - \omega)x)\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= ??$$



F.T

書いてみよう

フーリエ変換の性質「周波数シフト」より，

$$f(x)\exp(j\omega_0 x) \xrightarrow{\text{F.T}} F(\omega - \omega_0)$$

よって，定数１のフーリエ変換が $2\pi\delta(\omega)$ なので，

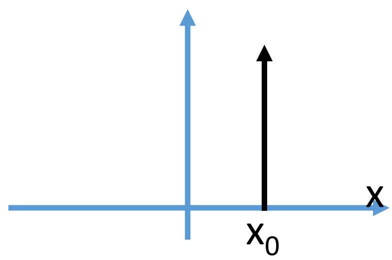
$\xrightarrow{\text{F.T}}$

つまり**複素単振動のフーリエ変換は，周波数だけずれたデルタ関数となる．**

単一周波数の波形＝周波数は１つだけと考えれば妥当

δ関数を使うと普通はできないフーリエ変換が出来る：ずらしたδ関数

$$f(x) = \delta(x - x_0)$$



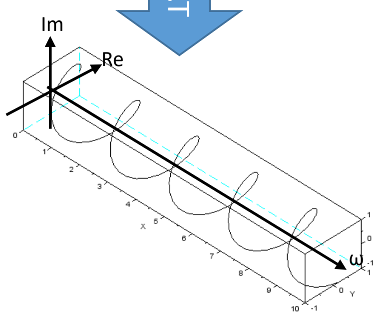
フーリエ変換の性質「時間シフト」より，

$$f(x - x_0) \xrightarrow{\text{F.T}} F(\omega)\exp(-j\omega x_0)$$

よって，δ関数のフーリエ変換が1なので，

$\xrightarrow{\text{F.T}}$

F.T



x_0は定数なので，これはωの関数であることに注意

x_0は，螺旋状に進んでいく「速さ」を表す．

時間ずれのあるδ関数は，周波数領域の複素単振動となる．

δ関数を使うと普通はできないフーリエ変換が出来る：δ関数の微分

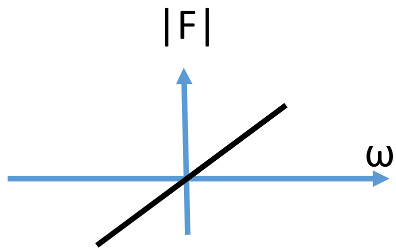
$$f(x)=\frac{d}{dx}\delta(x)$$

フーリエ変換の性質「微分」より,

$$\frac{d}{dx}f(x) \xrightarrow{\text{F.T}} j\omega F(\omega)$$

よって，δ関数のフーリエ変換が1なので,

$$\xrightarrow{\text{F.T}}$$



同様にn回微分については

$$\xrightarrow{\text{F.T}}$$

δ関数を使うと普通はできないフーリエ変換が出来る：cosとsin

$$\cos(\omega_0 x)=$$

書いてみよう

複素単振動のフーリエ変換の結果より

$$\exp(j\omega_1 x) \xrightarrow{\text{F.T}} 2\pi\delta(\omega-\omega_1)$$

だから,

$$\cos(\omega_0 x) \xrightarrow{\text{F.T}}$$

書いてみよう

同様にsinについては

$$\sin(\omega_0 x)=$$

だから,

$$\sin(\omega_0 x) \xrightarrow{\text{F.T}}$$

なおcosとsinは互いに微分の関係なので、微分に関するフーリエ変換の性質(jωをかければ良い)を使えば、片方のフーリエ変換結果からもう片方のフーリエ変換を導くことも出来る。

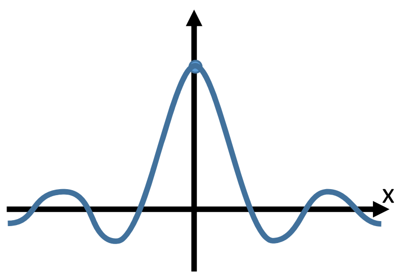
今日のまとめ

- フーリエ変換の基本的な性質を求めた.
- 矩形波を面積一定のまま無限に幅を狭めた関数はフーリエ変換が一定値をとることを観察した.
- デルタ関数を導入した.
- デルタ関数を利用して，普通の方法では求められないフーリエ変換を求められる場合を見た.

次回はフーリエ変換におけるたたみ込み，パーセバルの等式

今日のレポート

フーリエ変換の対称性を利用し、$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ のフーリエ変換が矩形関数となることを示せ



これは、実信号としてのsinc関数が周波数領域では理想的な低域限定信号であることを意味する。低域通過（ローパス）フィルタとして重要。

レポートは紙に書いたものを写真にとり、指定のフォームからアップロードする。Googleアカウントによりアップロードするので、大学が提供しているアカウントを使用すること。画像ファイルは5MB以下に抑えること。

提出締め切り：講義日から一週間以内