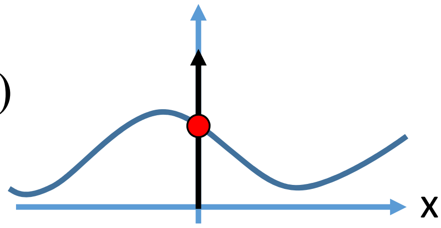
日程

講義番号	講義日	講義内容	pdf	video	レポート締め切り
1	10/6	周期関数、フーリエ級数の定義	[pdf](2022年版)	video	10/13
2	10/13	フーリエ級数の計算例	[pdf](2021年版)	video	10/20
3	10/20	複素フーリエ級数、直交関数系	[pdf](2021年版)	video	10/27
4	10/27	周期関数のたたみこみ、パーセバルの等式	[pdf](2021年版)	video	11/3
-	11/3	文化の日			
5	11/10	非周期関数、フーリエ変換の定義・計算例	[pdf](2021年版)	video	11/17
-	11/17	調布祭準備			
6	11/24	フーリエ変換の性質	[pdf](2021年版)	video	12/1
7	12/1	デルタ関数とフーリエ変換、たたみこみのフーリエ変換、パーセバルの等式	[pdf](2021年版)	video	12/8
-	12/8	中間確認テスト（前半。現在は大学を予定）	中間確認テスト用問題集	[pdf](2021年版)	
8	12/15	離散時間信号と離散時間フーリエ変換（教科書外）	[pdf](2021年版)	video	12/22
9	12/22	離散フーリエ変換（教科書外）	[pdf](2021年版)	video	1/5
10	1/5	離散フーリエ変換の性質（教科書外）	[pdf](2021年版)	video	1/12
11	1/12	サンプリング定理	[pdf](2021年版)	video	1/19
12	1/19	ラプラス変換の定義と性質	[pdf](2021年版)	video	1/26
13	1/26	線形常微分方程式のラプラス変換による解法	[pdf](2021年版)	video	2/2
-	2/2	期末用自習	[pdf](2021年版)		
-	2/9	期末確認テスト（後半。現在は大学を予定）			

前回のまとめ

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j\omega x)dx \qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega x)d\omega$$

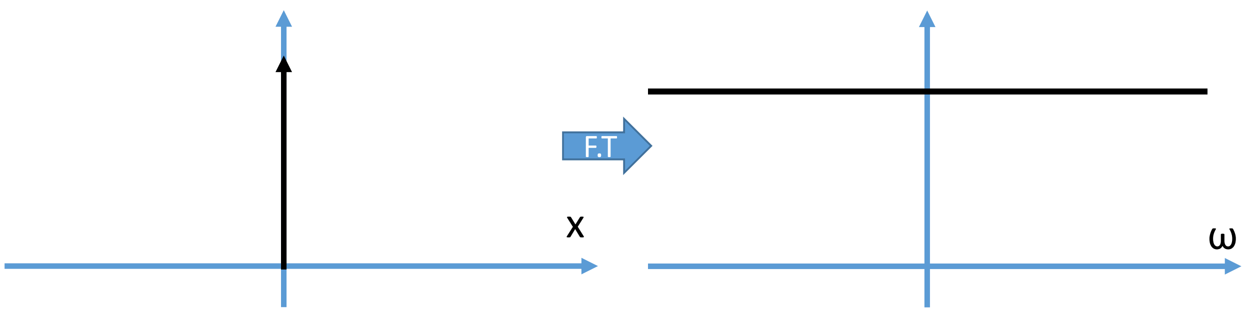
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)f(x)dx=f(0)$$



- フーリエ変換の基本的な性質を求めた.
- 矩形波を面積一定のまま無限に幅を狭めた関数はフーリエ変換が一定値をとることを観察した.
- デルタ関数を導入した.
- デルタ関数を利用して，普通の方法では求められないフーリエ変換を求められる場合を見た.

（復習）デルタ関数のフーリエ変換

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j\omega x)dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\exp(-j\omega x)dx\\&=\exp(0)\\&=1\end{aligned}$$



つまり矩形波のフーリエ変換（Sinc関数）で観察されていたように，
デルタ関数のフーリエ変換は一定値１となる

（復習）
δ関数を使うと普通はできないフーリエ変換が出来る：cosとsin

$$\cos(\omega_0 x) = \frac{1}{2}\{\exp(j\omega_0 x) + \exp(-j\omega_0 x)\}$$

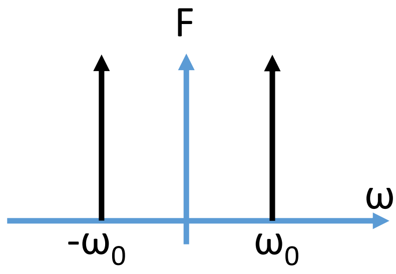
書いてみよう

複素単振動のフーリエ変換の結果より

$$\exp(j\omega_1 x) \xrightarrow{\text{F.T}} 2\pi\delta(\omega - \omega_1)$$

だから,

$$\cos(\omega_0 x) \xrightarrow{\text{F.T}} \pi\{\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\}$$



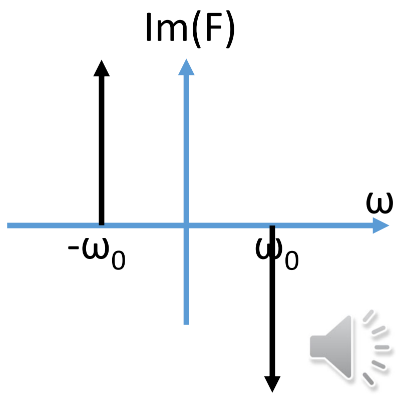
書いてみよう

同様にsinについては

$$\sin(\omega_0 x) = \frac{1}{2j}\{\exp(j\omega_0 x) - \exp(-j\omega_0 x)\}$$

だから,

$$\sin(\omega_0 x) \xrightarrow{\text{F.T}} j\pi\{\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)\}$$

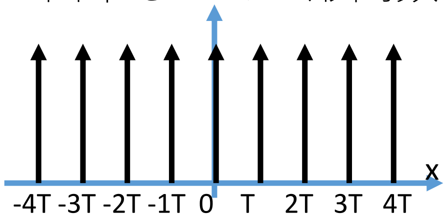


今日の目標

- δ（デルタ）関数に親しむ，の続き
- たたみ込み積分とフーリエ変換
- パーセバルの等式

δ関数を使うと普通はできないフーリエ変換が出来る：くし形関数

$$\delta_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT)$$



くし形(comb)関数とよぶ．デジタル信号処理に重要．

これが周期Tの周期関数であることに着目すると，
フーリエ級数展開できるはず．

$$\boxed{f(x) \approx \sum_{n=--\infty}^{\infty} c_n \exp(j\frac{2n\pi}{T}x) \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\exp(-j\frac{2n\pi}{T}x)dx}$$

$c_n =$

$=$

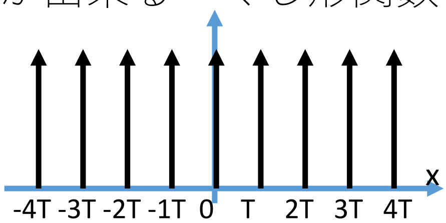
n=0：δ(x)に対してはX=0のところだけ抜き出されるδ関数の性質より積分結果はexp(0)=1
n≠0： δ(x-nT)に対しては-T/2～T/2の積分範囲ではδ(x-nT)=0なので無視できる．

結局　$f(x) \approx$

δ関数を使うと普通はできないフーリエ変換が出来る：くし形関数

くし形関数はフーリエ級数展開の形で表せる

$$f(x) \approx \sum_{n=--\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\exp(j\frac{2n\pi}{T}x)$$



これをフーリエ変換する

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j\omega x)dx$$

書いてみよう

$=$

$=$

個々の積分は複素単振動のフーリエ変換だから

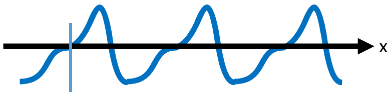
$\exp(j\omega_1 x) \xrightarrow{F.T} 2\pi\delta(\omega - \omega_1)$ より，

$=$　　$T = 2\pi$ のときは

つまり**くし形関数のフーリエ変換は，くし形関数になる．**

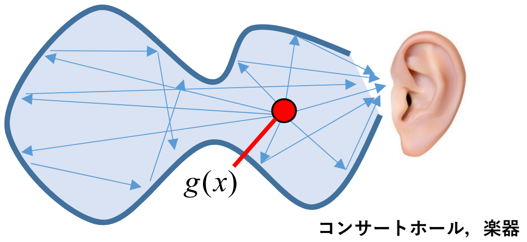
（復習）信号＝原音＋響き（残響，反響）

原音　$g(x)$

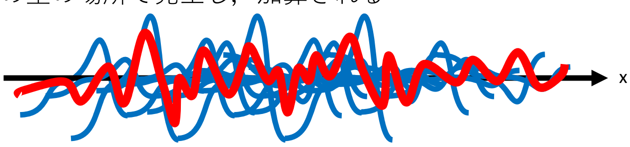


壁のある場所で反射した音

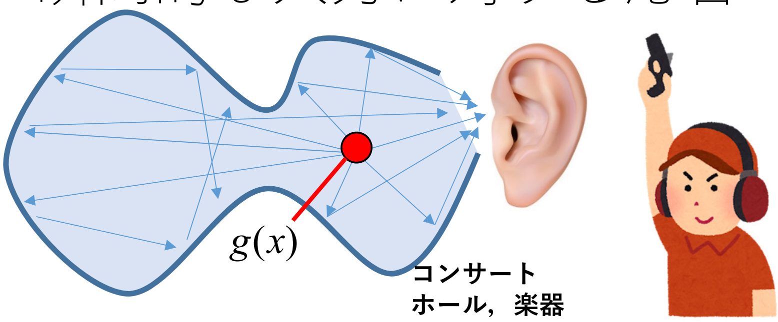
τだけ**遅れ**て，**振幅も変化**した波となる



これらがすべての壁の場所で発生し，加算される

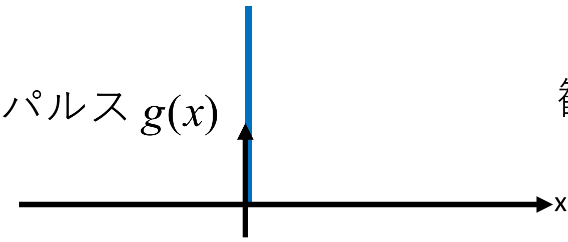


（復習）反響＝瞬間的な入力に対する応答



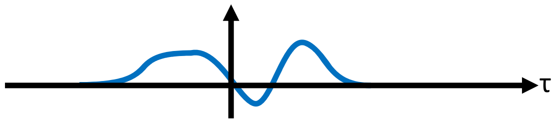
反響を表す関数は，コンサートホール，楽器等に固有の値であり，入力波形とは独立である．
直感的には「**瞬間的な入力（インパルス）**」**に対して返ってくる波**となる（**インパルス：デルタ関数に他ならない**）

インパルス $g(x)$



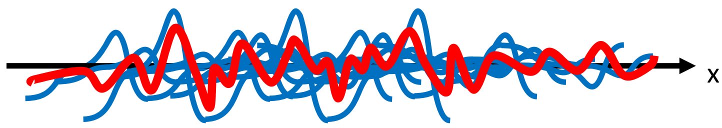
原点で∞の強さを持つ．拍手のような入力

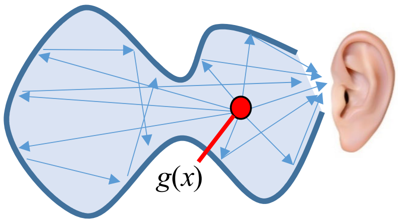
観測される反響 $f(\tau)$



遅れτは音響では非負だが，一般化して正負の関数とする

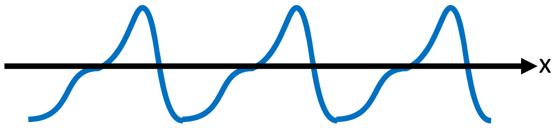
（復習）原音と響きの定式化



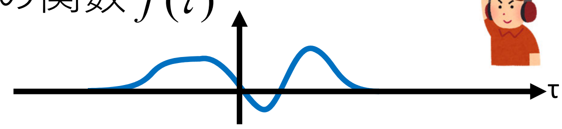


「遅れ時間τに対して振幅がどれだけか」の反響の関数があるなら，

原音　$g(x)$



反響の関数 $f(\tau)$



τだけ遅れた反響音成分は

遅れτに対応した反響の強さ　τだけ遅れた原信号

これらが**すべてのτで発生し，加算される**から，最終的な信号は

これを**関数f(x)とg(x)のたたみ込み積分**とよぶ

たたみ込み積分

$$\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau \qquad f*g(x)\ \text{と表記}$$

原音の性質g(x)と，環境の性質f(τ)で信号を決める，信号の理解には欠かせないもの．意味的には多くの場合，τ は-∞～∞

以前は，フーリエ級数展開の範囲で考えるために，f(τ)もg(x)も同じ**周期Tの周期関数**である場合のたたみ込み積分を考えた．

以降では，**フーリエ変換においても，フーリエ級数展開で得られたたたみ込み積分の性質が維持される**ことを見ていく．

たたみ込み積分のフーリエ変換

$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau$$ をフーリエ変換する.

$H(\omega)=$

$=$

$=$

$=$

$=$

よって， $H(\omega)=F(\omega)G(\omega)$ となり，たたみ込み積分のフーリエ変換は元の関数のフーリエ変換同士の掛け算になる.

たたみ込み積分のフーリエ変換：逆フーリエ変換による確認

$H(\omega)=F(\omega)G(\omega)$ を逆フーリエ変換する.

$h(x)=$

$=$

$=$

$=$

フーリエ変換同士の掛け算は元の関数のたたみ込み積分に相当

逆は成り立つか：フーリエ変換のたたみ込み積分

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\tau)G(\omega-\tau)d\tau$$ を逆フーリエ変換する.

$h(t)=$

$=$

$=$

$=$

$=$

よって， $h(x)=2\pi f(x)g(x)$ となり，たたみ込み積分のフーリエ変換は元の関数のフーリエ変換同士の掛け算になる.

フーリエ変換とたたみ込み積分まとめ

$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(x-\tau)d\tau$$ のとき,

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\tau)G(\omega-\tau)d\tau$$ のとき,

それぞれ，明らかに**交換則**が成り立つ.

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(x-\tau)d\tau=$$

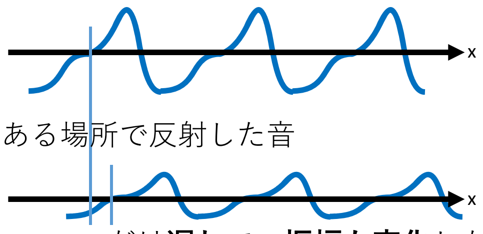
$$\int_{-\infty}^{\infty}F(\tau)G(\omega-\tau)d\tau=$$

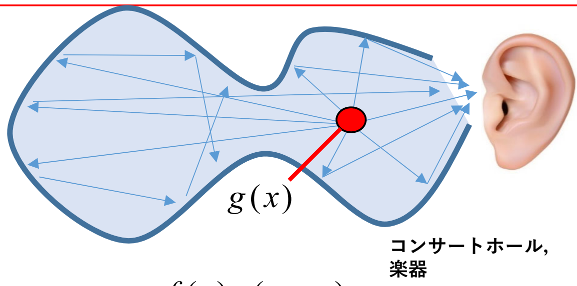
フーリエ変換とたたみ込み積分：意味

$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau \Leftrightarrow H(\omega)=F(\omega)G(\omega)$$

原音　$g(x)$

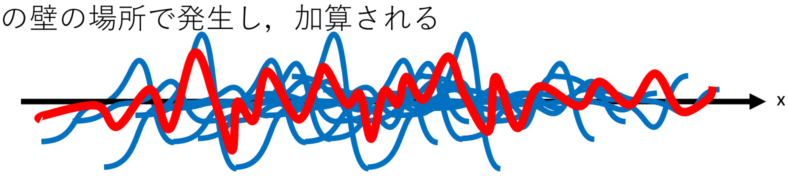
壁のある場所で反射した音





τだけ**遅れ**て，**振幅も変化**した波となる：$f(\tau)g(x-\tau)$

これらがすべての壁の場所で発生し，加算される



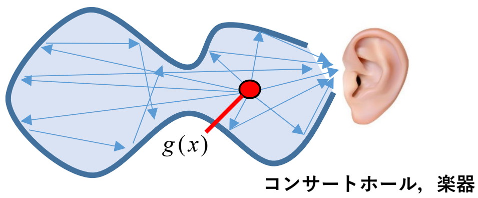
原音g(x)と，反響特性f(τ)が与えられた時，**結果としての信号の周波数成分は，原音の周波数成分G(ω)と反響特性の周波数成分F(ω)の積になる．**

原音がデルタ関数だったら？

$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau$$

$=$

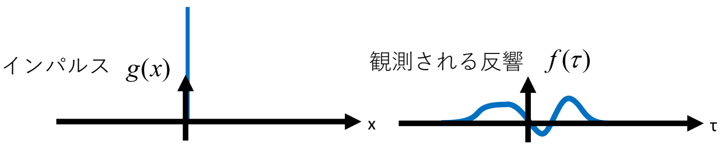
$=$



すなわち，**デルタ関数の入力に対しては，反響特性がそのまま反響となる**

$H(\omega)=$

$=$　　　∵G(ω)=1



すなわち，**デルタ関数（＝周波数成分が常に１）に対する出力は，ホールの反響特性のフーリエ変換となる．**

実際，ホールの音響特性の測定に破裂音（≒インパルス）は多用される

たたみ込み積分： g(x)がf(-x)の共役複素関数の場合

$$g(x) = \overline{f(-x)}$$

$$h(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad =$$

x=0のとき，

$$h(0) = \qquad\qquad\qquad =$$

一方で，　$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp(-j\omega x) dx$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

たたみ込み積分： g(x)がf(-x)の共役複素関数の場合

$$H(\omega) = \qquad\qquad =$$

だから，両辺を逆フーリエ変換すると，

$$h(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =$$

x=0のとき，

$$h(0) = \qquad\qquad\qquad\qquad =$$

先の結果と合わせると，

$\therefore$ 　　　　　　　　　　　　　　　　パーセバルの等式

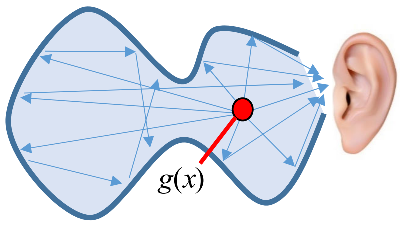
パーセバルの等式

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

- 左辺：実信号の自乗の積分
- 右辺：周波数成分の自乗の積分

この 2 つが（係数を除けば）等しいことを意味する.
つまりフーリエ変換によってエネルギーは保存される

今日のまとめ



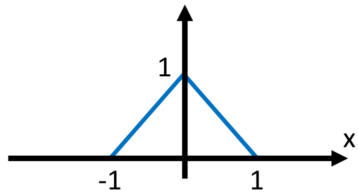
- δ（デルタ）関数に親しんだ.
- 周期関数のフーリエ級数展開にて導入した「たたみ込み積分」を再度導入し，たたみ込み積分が周波数領域では各周波数の積にすぎないことを理解した.
- デルタ関数入力に対する出力が反響特性そのものを表すことを理解した.
- 特殊な場合を計算することでパーセバルの等式を導入し，フーリエ変換によって「パワー」は変化しないことを見た.

中間確認の後、離散信号（デジタル）へ

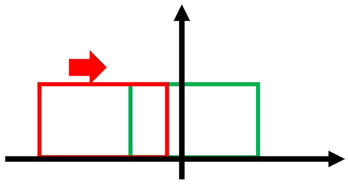
今日のレポート

右図のような単発の三角波のフーリエ変換が、

$\frac{4}{\omega^2}\sin^2(\frac{\omega}{2})$となることを示せ



なおこの問題はまずは定義通りに計算することを勧めるが、「単発の三角波が単発の矩形波2つの畳み込み積分である」ことを考えると、そのフーリエ変換が、sinc関数の二乗の形になっているのは今日学んだ性質から当然と言える。



レポートは紙に書いたものを写真にとり、指定のフォームからアップロードする。Googleアカウントによりアップロードするので、大学が提供しているアカウントを使用すること。画像ファイルは5MB以下に抑えること。

提出締め切り：講義日から一週間以内