
# 日程

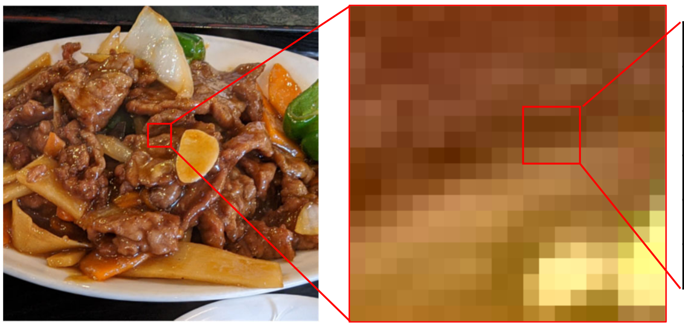
| 講義番号 | 講義日 | 講義内容 | pdf | video | レポート締め切り |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10/6 | 周期関数、フーリエ級数の定義 | [pdf](2022年版) | video | 10/13 |
| 2 | 10/13 | フーリエ級数の計算例 | [pdf](2021年版) | video | 10/20 |
| 3 | 10/20 | 複素フーリエ級数、直交関数系 | [pdf](2021年版) | video | 10/27 |
| 4 | 10/27 | 周期関数のたたみこみ、パーセバルの等式 | [pdf](2021年版) | video | 11/3 |
| - | 11/3 | 文化の日 | | | |
| 5 | 11/10 | 非周期関数、フーリエ変換の定義・計算例 | [pdf](2021年版) | video | 11/17 |
| - | 11/17 | 調布祭準備 | | | |
| 6 | 11/24 | フーリエ変換の性質 | [pdf](2021年版) | video | 12/1 |
| 7 | 12/1 | デルタ関数とフーリエ変換、たたみこみのフーリエ変換、パーセバルの等式 | [pdf](2021年版) | video | 12/8 |
| - | 12/8 | 中間確認テスト（前半。現在は大学を予定） | 中間確認テスト用問題集 | [pdf](2021年版) | |
| 8 | 12/15 | 離散時間信号と離散時間フーリエ変換（教科書外） | [pdf](2021年版) | video | 12/22 |
| 9 | 12/22 | 離散フーリエ変換（教科書外） | [pdf](2021年版) | video | 1/5 |
| 10 | 1/5 | 離散フーリエ変換の性質（教科書外） | [pdf](2021年版) | video | 1/12 |
| 11 | 1/12 | サンプリング定理 | [pdf](2021年版) | video | 1/19 |
| 12 | 1/19 | ラプラス変換の定義と性質 | [pdf](2021年版) | video | 1/26 |
| 13 | 1/26 | 線形常微分方程式のラプラス変換による解法 | [pdf](2021年版) | video | 2/2 |
| - | 2/2 | 期末用自習 | [pdf](2021年版) | | |
| - | 2/9 | 期末確認テスト（後半。現在は大学を予定） | | | |

# 今日の目標

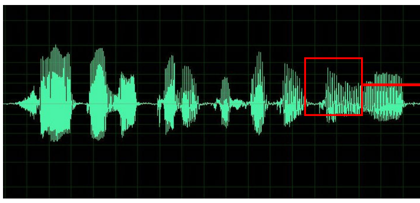
- 離散信号に親しむ
- 離散時間フーリエ変換の導入

---

## 現在（ほとんど）すべての信号は離散的なデータとして扱われる



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 12 | 16 | 35 | 53 | 44 |
| 34 | 68 | 43 | 43 | 57 | 45 |
| 57 | 66 | 12 | 21 | 22 | 66 |
| 55 | 54 | 15 | 45 | 45 | 64 |
| 67 | 54 | 32 | 77 | 83 | 22 |
| 66 | 67 | 21 | 97 | 75 | 34 |



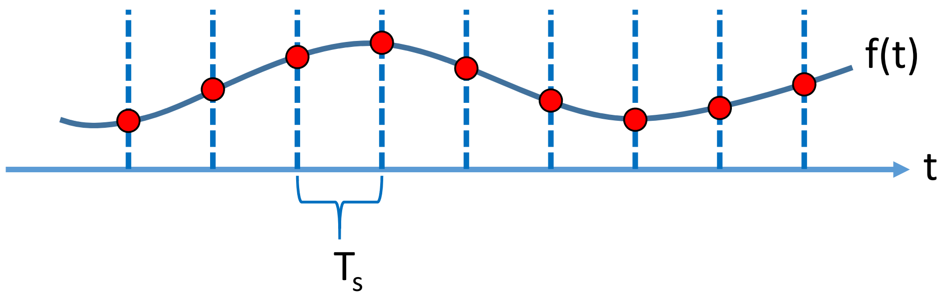
23,65,67,43,22,90,32,21,55,43

ディジタルコンピューティングの圧倒的進化による.

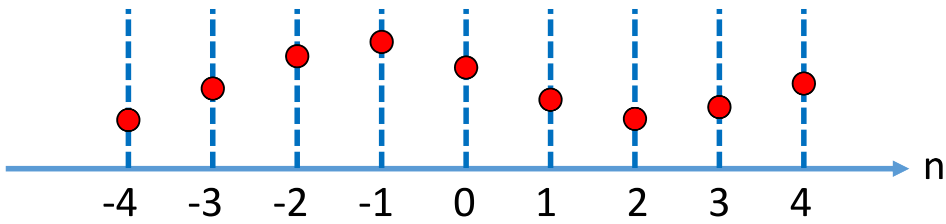
離散的：２つの意味.
- 時間的，空間的な「サンプリング」が離散的
- データのビット数が決まっている（ex. 8bit:-128～127）

これから扱うのは特に**サンプリングが離散的な信号**.

## サンプリング

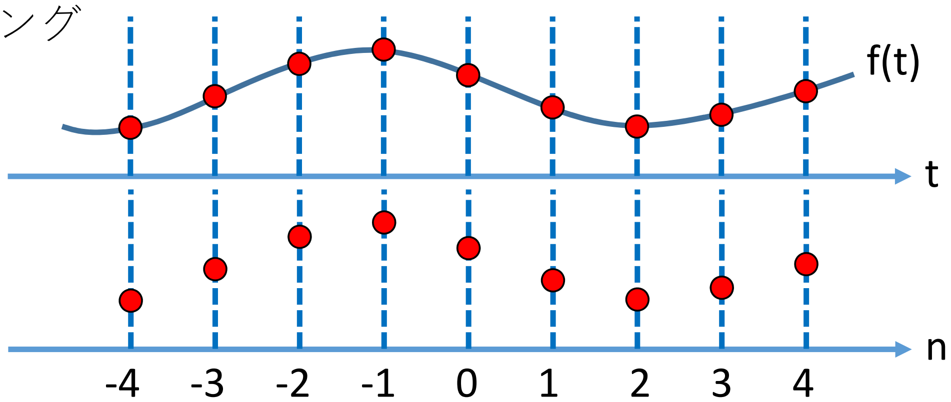


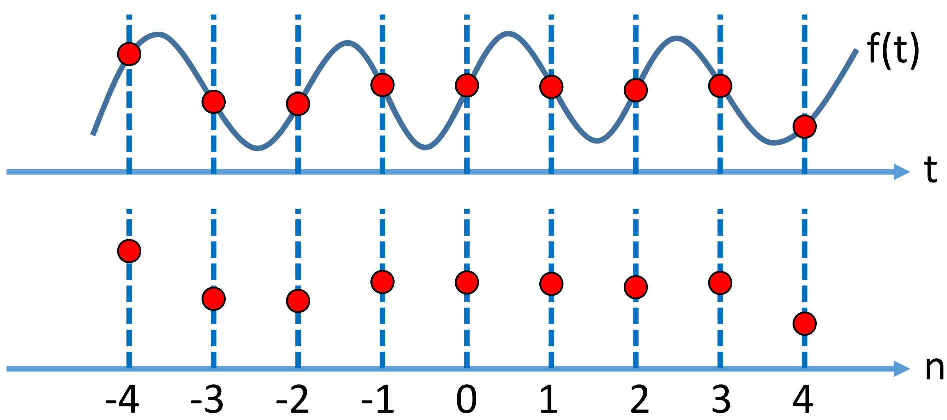

１次元データとしては時間信号が多いので今後tと表記.
一定周期$T_s$（サンプリング周期）で関数の値を取り出す.




$f(-2T_s), f(-1T_s), f(0T_s), f(1T_s), f(2T_s)$,　を取り出す.
時間を整数に正規化し，$f(-4), f(-3), \ldots, f(3), f(4)$ と表記

## サンプリング




**サンプリングが明らかにうまく行かない場合がある．なぜか**

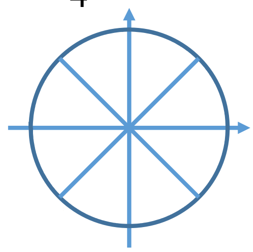
正弦波のサンプリング：元の関数が正弦波の場合

$$f(n) = \cos(\omega n)$$

$\omega = \dfrac{\pi}{4}$ の時

$$f(n) = \ldots, \cos(-\pi), \cos(-\frac{3\pi}{4}), \cos(-\frac{\pi}{2}), \cos(-\frac{\pi}{4}), \cos(0), \cos(\frac{\pi}{4}), \cos(\frac{\pi}{2}), \cos(\frac{3\pi}{4}), \cos(\pi), \ldots$$

$$= \cdots \qquad \cdots$$



書いてみよう

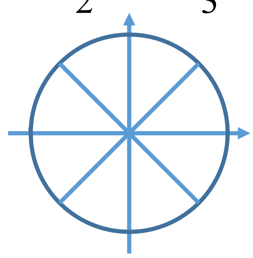
正弦波のサンプリング：元の関数が正弦波の場合

$$f(n) = \cos(\omega n)$$

$\omega = \dfrac{\pi}{6}$ の時

$$f(n) = \ldots, \cos(-\frac{2\pi}{3}), \cos(-\frac{\pi}{2}), \cos(-\frac{\pi}{3}), \cos(-\frac{\pi}{6}), \cos(0), \cos(\frac{\pi}{6}), \cos(\frac{\pi}{3}), \cos(\frac{\pi}{2}), \cos(\frac{2\pi}{3}),.$$

$$= \cdots \qquad \cdots$$



書いてみよう

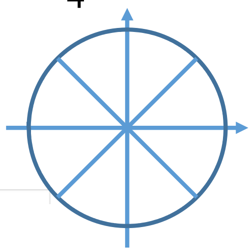
正弦波のサンプリング：元の関数が正弦波の場合

$$f(n) = \cos(\omega n)$$

$\omega = \dfrac{3\pi}{4}$ の時

$$f(n) = \ldots, \cos(-3\pi), \cos(-\frac{9\pi}{4}), \cos(-\frac{3\pi}{2}), \cos(-\frac{3\pi}{4}), \cos(0), \cos(\frac{3\pi}{4}), \cos(\frac{3\pi}{2}), \cos(\frac{9\pi}{4}), \cos(3\pi), \ldots$$

$= \cdots \qquad \cdots$



書いてみよう

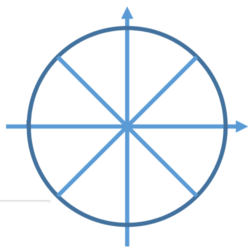
正弦波のサンプリング：元の関数が正弦波の場合

$$f(n) = \cos(\omega n)$$

$\omega = \pi$ の時

$$f(n) = \ldots, \cos(-4\pi), \cos(-3\pi), \cos(-2\pi), \cos(-\pi), \cos(0), \cos(\pi), \cos(2\pi), \cos(3\pi), \cos(4\pi), \ldots$$

$= \cdots \qquad \cdots$



書いてみよう

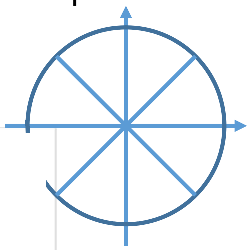
## 正弦波のサンプリング：元の関数が正弦波の場合

$$f(n)=\cos(\omega n)$$

$\omega=\dfrac{5\pi}{4}$ の時

$$f(n)=\ldots,\cos(-5\pi),\cos(-\frac{15\pi}{4}),\cos(-\frac{5\pi}{2}),\cos(-\frac{5\pi}{4}),\cos(0),\cos(\frac{5\pi}{4}),\cos(\frac{5\pi}{2}),\cos(\frac{15\pi}{4}),\cos(5\pi),\ldots$$

$=\cdots$ $\cdots$



書いてみよう

**元の波形は異なるにも関わらず，サンプリングデータは $\omega=\dfrac{3\pi}{4}$ の時と等しい**

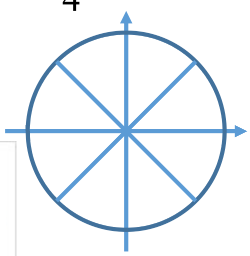
## 正弦波のサンプリング：元の関数が正弦波の場合

$$f(n)=\cos(\omega n)$$

$\omega=\dfrac{11\pi}{4}$ の時

$$f(n)=\ldots,\cos(-11\pi),\cos(-\frac{33\pi}{4}),\cos(-\frac{11\pi}{2}),\cos(-\frac{11\pi}{4}),\cos(0),\cos(\frac{11\pi}{4}),\cos(\frac{11\pi}{2}),\cos(\frac{33\pi}{4}),\cos(11\pi),\ldots$$

$=\cdots$ $\cdots$

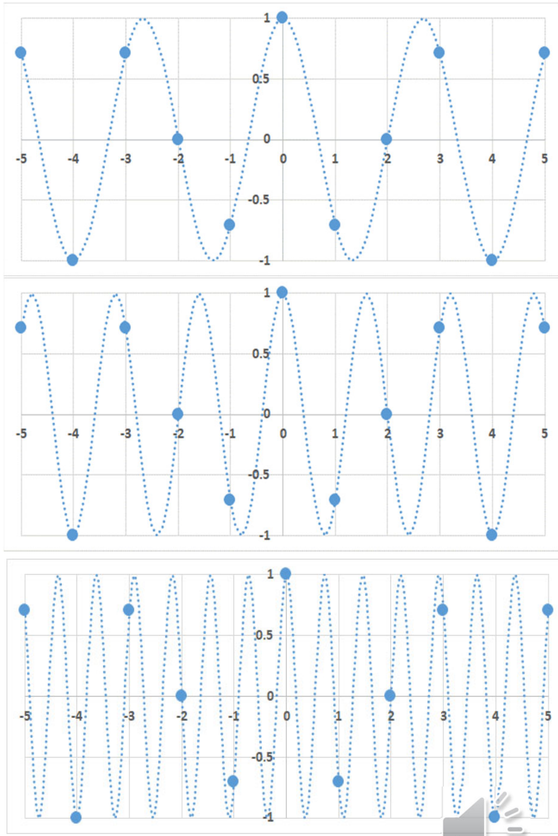


**元の波形は異なるにも関わらず，サンプリングデータは $\omega=\dfrac{3\pi}{4}$ の時と等しい**

## $f(n)=\cos(\omega n)$のサンプリング：元の関数が正弦波の場合

$\omega=\dfrac{3\pi}{4}$　$\omega=\dfrac{5\pi}{4}$　$\omega=\dfrac{11\pi}{4}$

は，すべて同じサンプリング結果.




理由：

$$f(n)=\cos(\frac{3\pi}{4}n)$$

$=$　　　　　$=$

$=$

$=$

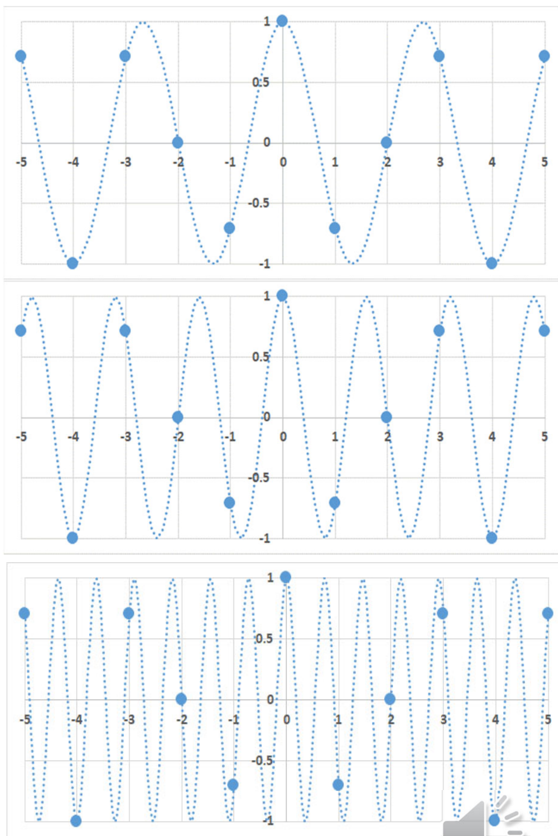
$=$

## サンプリング：元の関数が周期関数の場合

一般に周波数ωをもつ波形（cos, sin,exp）は

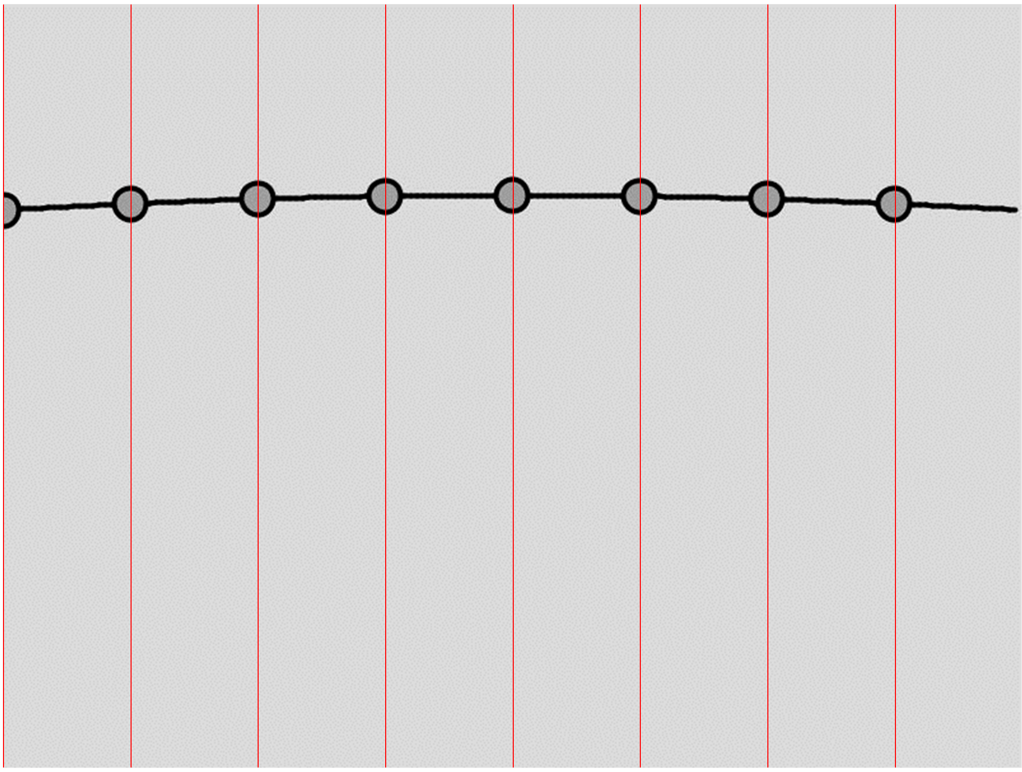
$$f(n)=\begin{cases}\cos(\omega n)\\ \sin(\omega n)\\ \exp(-j\omega n)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\\ \\ \\ \end{cases}$$



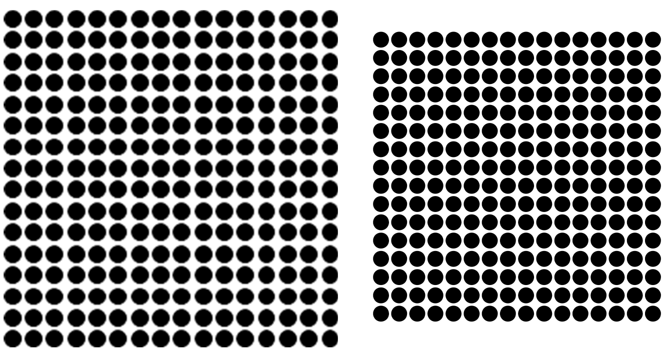

**つまり周波数成分は2π周期の繰り返し波形となる.**

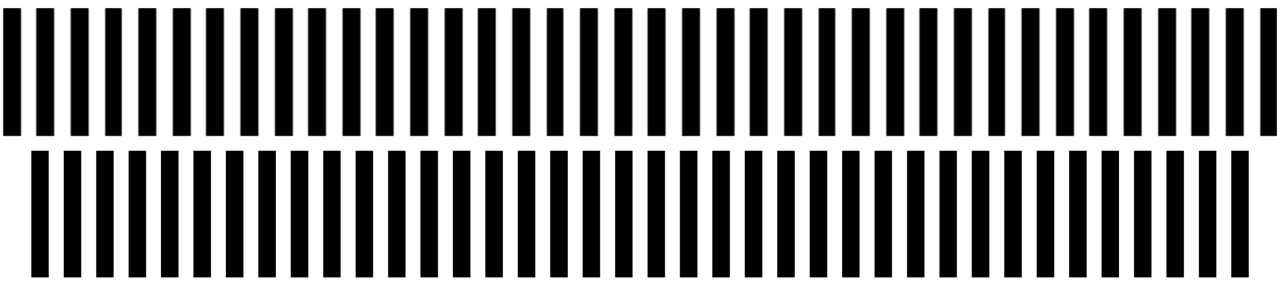
## 動画



**元の波形が正弦波の場合，サンプリングされたデータも正弦波となる**
**ただし元の波形の周波数が高い場合，サンプリングデータの周波数は元の周波数と一致しない．**

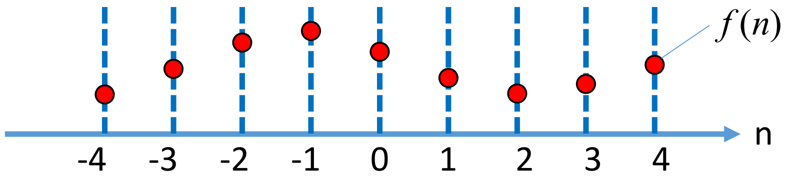
## 参考：モアレ（モワレ，moire）現象





少し空間周波数の異なる縞同士を重ねると，本来とは異なる周波数が出現する
**モアレ（モワレ，moire）とよぶ．**
**縞の隙間から離散的に観察するので，サンプリングと同義**であり，このために生じる現象．

## サンプリングデータに対するフーリエ変換



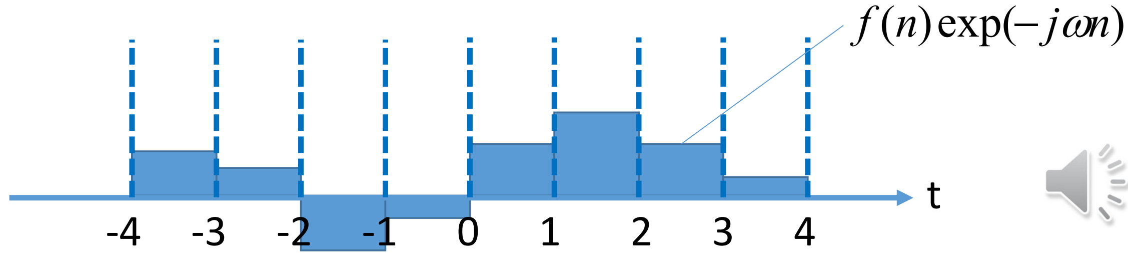

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j\omega x)dx$$

今，f(x)は離散的な場所でしか値を持たず，積分出来ない．

そこで近似的に，$f(x)\exp(-j\omega x)$ がn<x<n+1の間一定値として，

$$F(\omega)\approx\cdots+f(-2)\exp(-j\omega(-2))+f(-1)\exp(-j\omega(-1))$$
$$+f(0)\exp(-j\omega(0))+f(1)\exp(-j\omega(1))+f(2)\exp(-j\omega(2))+\cdots$$

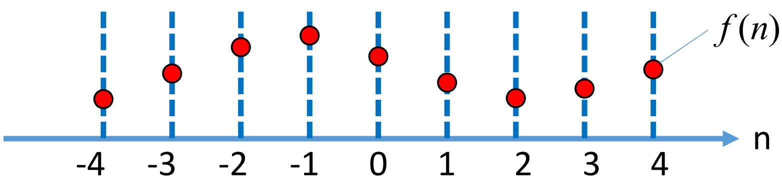
=




## 離散時間フーリエ変換(Discrete-Time Fourier Transform, DTFT)

離散信号f(n)に対して，

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n)$$

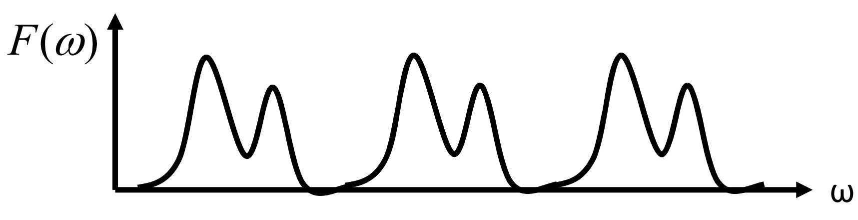



**を離散時間フーリエ変換(Discrete-Time Fourier Transform, DTFT)**とよぶ．

連続性： $F(\omega)$ はωの連続な関数である．

周期性： $F(\omega)$ はωの周期的な関数であり，その基本周期は2πである．

$\because F(\omega+2\pi)=$ =

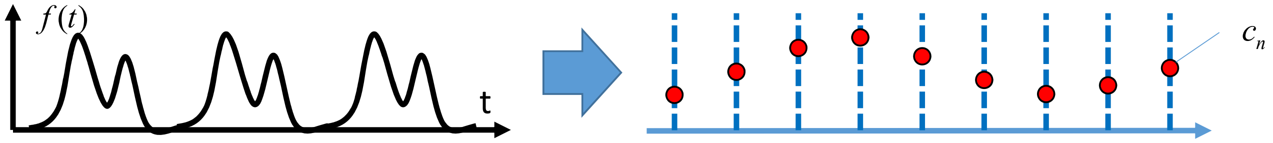


## 離散時間フーリエ変換とフーリエ級数展開の対応関係

フーリエ級数展開：

**連続かつ周期的な時空間信号を，離散的な周波数信号（フーリエ級数）に変換.**

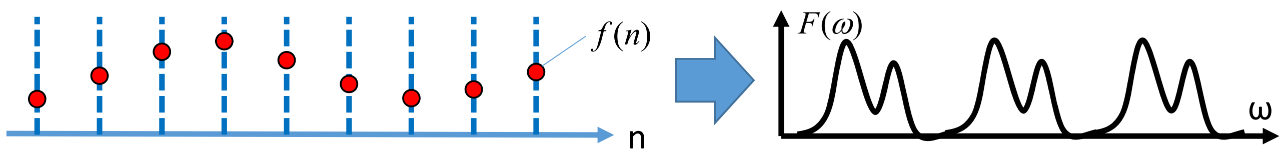
$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j\frac{2n\pi}{T}x) \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\exp(-j\frac{2n\pi}{T}x)dx$$




離散時間フーリエ変換：

**離散的な時空間信号を，連続かつ周期的な周波数信号に変換.**

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n)$$




離散時間フーリエ変換はフーリエ級数展開と逆の関係

---

## 逆DTFT

フーリエ級数展開：

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j\frac{2n\pi}{T}x) \quad c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\exp(-j\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

離散時間フーリエ変換：

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n)$$

フーリエ級数展開との類推から，

$$f(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)\exp(j\omega n)d\omega$$

となると予想される.

逆DTFT

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)\exp(j\omega n)d\omega =$$

$$=$$

n≠mのとき $\int_{-\pi}^{\pi}\exp(j\omega(n-m))d\omega =$

$$= \qquad\qquad = 0$$

n=mのとき $\int_{-\pi}^{\pi}\exp(j\omega(n-m))d\omega =$

よって $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)\exp(j\omega n)d\omega =$

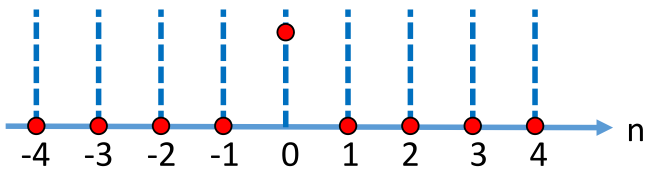
逆DTFTが示された

# DTFTの例(1)：δ(n)

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n) \qquad f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)\exp(j\omega n)d\omega$$

離散信号のデルタ関数を考える。

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & otherwise\end{cases}$$




$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n)$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

**つまりDTFTにおいてもδ関数の変換は1となる。**
**これも周期2πの周期関数となっている。**

# DTFTの例(2)：矩形関数

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n) \qquad f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)\exp(j\omega n)d\omega$$

離散信号の矩形関数を考える。

$$rect(n)=\begin{cases}1 & -N \le n \le N \\ 0 & otherwise\end{cases}$$

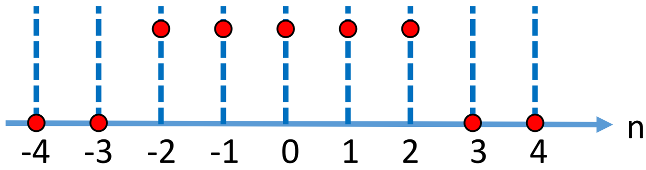
$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n)$$

$$=\sum_{n=-N}^{N}\exp(-j\omega n)$$

=

=

=




=

**つまりDTFTにおいてはsinc関数「のような」関数になる。**
**やはり周期2πの周期関数である。**

# DTFTの基本的性質（１）線形性

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n) \qquad f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)\exp(j\omega n)d\omega$$

$$f(n) \xrightarrow{\text{F.T}} F(\omega)$$
$$g(n) \xrightarrow{\text{F.T}} G(\omega)$$

のとき,

$$\boxed{af(n)+bg(n) \xrightarrow{\text{F.T}} aF(\omega)+bG(\omega)}$$

**DTFTには重ね合わせが成立する**

# DTFTの基本的性質（２）実関数

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n) \qquad f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)\exp(j\omega n)d\omega$$

$f(n)$ が実関数の時,

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\{\cos(\omega n)-j\sin(\omega n)\}$$

$$\mathrm{Re}(F(\omega))= \qquad = \qquad =$$

$$\mathrm{Im}(F(\omega))= \qquad = \qquad =$$

よって$F(\omega)$の実部は偶関数，虚部は奇関数となる.

また$|F(\omega)|$は偶関数, $\angle F(\omega)$ は奇関数となる（証明省略）.

# DTFTの基本的性質（３）偶奇関数

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n) \qquad f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)\exp(j\omega n)d\omega$$

$f(n)$ が偶関数の時,

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\{\cos(\omega n)-j\sin(\omega n)\}=$$

よって$F(\omega)$は偶関数となる.

もし$f(n)$ が実偶関数なら，$F(\omega)$ は実偶関数になる（証明省略）.

$f(n)$ が実奇関数の時,

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\{\cos(\omega n)-j\sin(\omega n)\}=$$

よって$F(\omega)$は純虚関数となる.

# DTFTの基本的性質（４）時間推移と時間反転

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)\exp(-j\omega n) \qquad f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(\omega)\exp(j\omega n)d\omega$$

Mだけ時間のずれた $f(n-M)$ のDTFT

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n-M)\exp(-j\omega n)=$$

$$=$$

時間の反転した $f(-n)$ のDTFT

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(-n)\exp(-j\omega n)=$$

$$=$$

# DTFTの基本的性質（５）周波数シフト

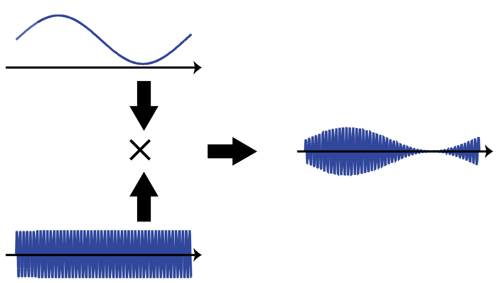
$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)\exp(-j\omega n) \qquad f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(\omega)\exp(j\omega n)d\omega$$

$f(n)\exp(j\omega_0 n)$ のDTFTは？

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)\exp(j\omega_0 n)\exp(-j\omega n)=$$

$$=$$

よって**元関数に$\exp(j\omega_0 t)$をかける操作によって周波数をずらせる（AM変調）**




# DTFTの基本的性質（６）パーセバルの等式

２つの関数f(n),g(n)に対してDTFTが計算されるとき

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n) \qquad f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)\exp(j\omega n)d\omega$$

$$G(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)\exp(-j\omega n) \qquad g(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(\omega)\exp(j\omega n)d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)\overline{G(\omega)}d\omega =$$

$$=$$

$$=$$

f(n),g(n)が等しい時, $=$

よって**DTFTにおいてもパーセバルの等式が成り立ち，**
**DTFTにおいて「エネルギー」は保存される**

# 今日のまとめ

- 離散信号に親しんだ
- 離散時間フーリエ変換を導入し，その性質を確認した.

次回は**離散**フーリエ変換（離散**時間**フーリエ変換とは異なる）

# 今日のレポート

$a^n u(n)$ のDTFTが$\mathrm{F}(\omega) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$ となることを示し、

これが周期2πの周期関数であることを示せ。

ただし$|a| < 1$とし、$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$ とする

レポートは紙に書いたものを写真にとり、指定のフォームからアップロードする。Googleアカウントによりアップロードするので、大学が提供しているアカウントを使用すること。画像ファイルは5MB以下に抑えること。

提出締め切り：講義日から一週間以内