



# 応用数学第一

第九回

梶本裕之



## 日程

講義番号	講義日	講義内容
1	10/1	周期関数、フーリエ級数の定義
2	10/8	フーリエ級数の計算例
3	10/15	複素フーリエ級数、直交関数系
-	10/22	体育祭
4	10/29	周期関数のたたみこみ、パーセバルの等式
5	11/5	非周期関数、フーリエ変換の定義・計算例
6	11/12	フーリエ変換の性質
7	11/19	デルタ関数とフーリエ変換、たたみこみのフーリエ変換、パーセバルの等式
-	11/26	中間確認問題（自習）
8	12/3	離散時間信号と離散時間フーリエ変換（教科書外）
9	12/10	離散フーリエ変換（教科書外）
10	12/17	離散フーリエ変換の性質（教科書外）
11	1/7	サンプリング定理
12	1/14	ラプラス変換の定義と性質
13	1/21	線形常微分方程式のラプラス変換による解法
-	1/28	期末テスト準備（自習）
-	2/4	期末確認テスト（全範囲。現在は大学を予定）

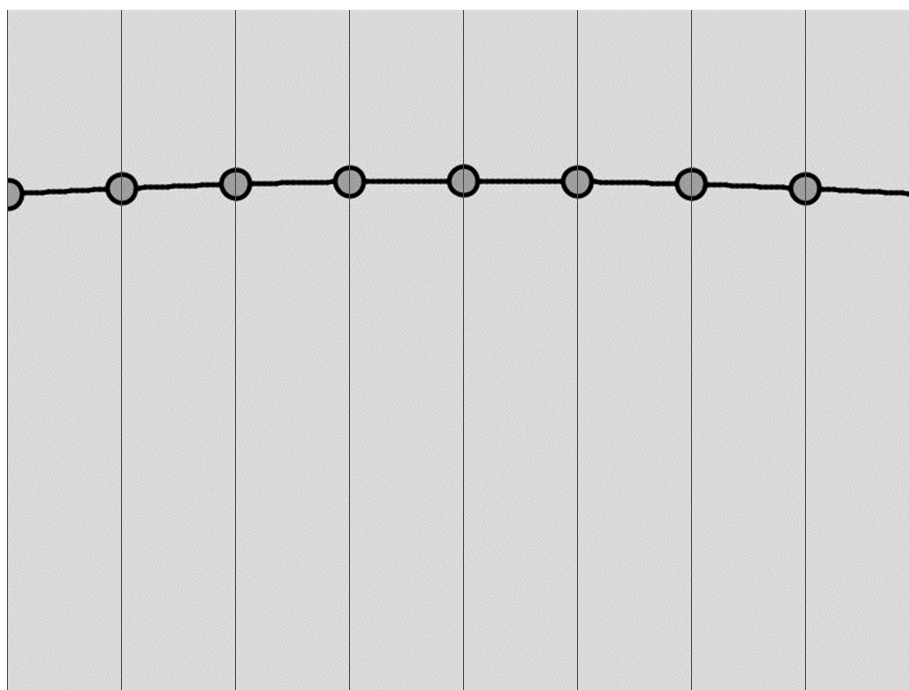


# 今日の目標

フーリエ変換を  
「コンピュータで扱える信号処理」とするための  
最終ステップとして、  
**離散フーリエ変換**を導入する



前回：離散信号



サンプリングによる離散化：

観察：**離散的**な時空間信号の周波数成分は**繰り返し性**を持つ。

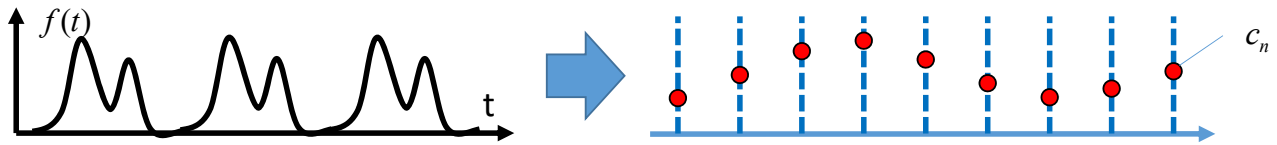


前回：離散時間フーリエ変換（DTFT:Discrete-Time Fourier Transform）

フーリエ級数展開：

**連続かつ周期的な時空間信号を、離散的な周波数信号（フーリエ級数）に変換。**

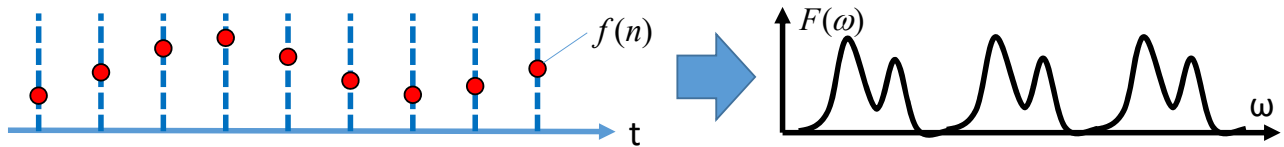
$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j \frac{2n\pi}{T} x) \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \exp(-j \frac{2n\pi}{T} x) dx$$



離散時間フーリエ変換：

**離散的な時空間信号を、連続かつ周期的な周波数信号に変換。**

$$f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega) \exp(j\omega n) d\omega \quad F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \exp(-j\omega n)$$



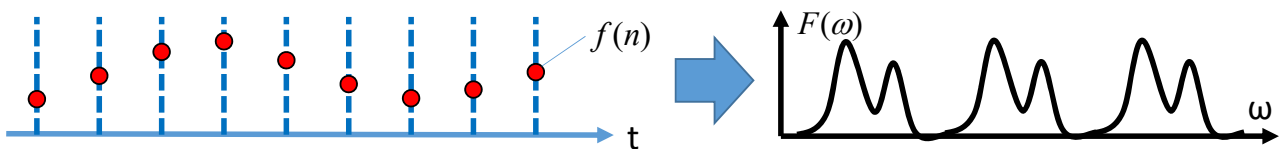
すなわちフーリエ級数展開と離散時間フーリエ変換は逆の関係



離散時間フーリエ変換（DTFT）はコンピュータで扱えるか？



$$f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega) \exp(j\omega n) d\omega \quad F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \exp(-j\omega n)$$



未だコンピュータで扱えない2つの理由

- 元の信号：無限に長い
- 周波数信号：連続信号である

元の信号はある範囲外の信号を  $f(n)=0$  とすればあつかえるが、周波数信号が連続であることはどうしてもなく、コンピュータに取り込めない。

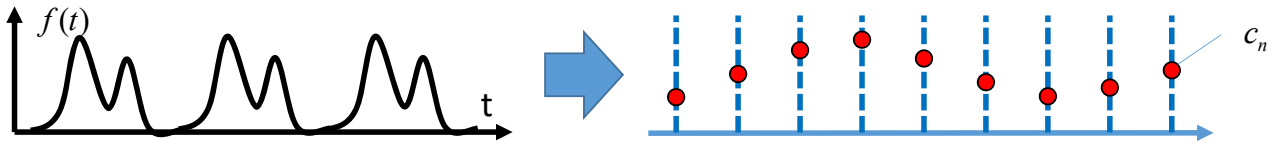
周波数信号を離散化するにはどうしたらよいか



アイデア：フーリエ級数展開 + 離散時間フーリエ変換

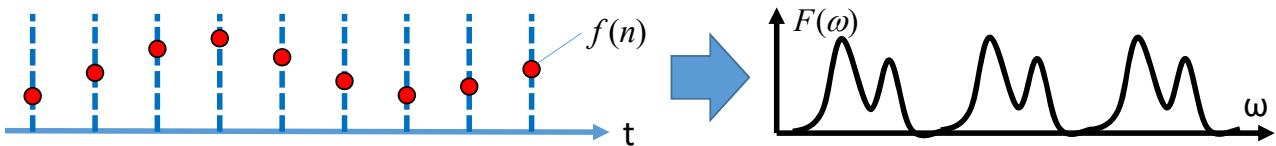
フーリエ級数展開：

周期的な信号 → 離散的な信号

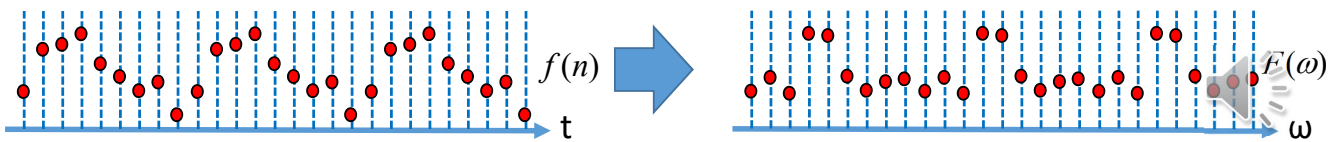


離散時間フーリエ変換：

離散的な信号 → 周期的な信号



ということは、元が離散的かつ周期的な信号であれば、  
離散的かつ周期的な周波数信号に変換されるのではないかと

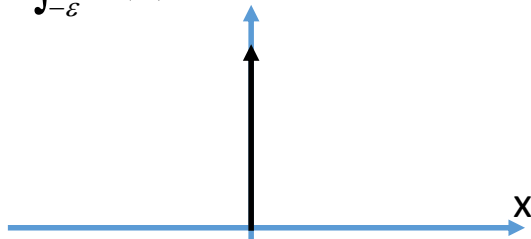


## (復習) デルタ ( $\delta$ ) 関数

全面積が  $x=0$  に集中した仮想的な関数をデルタ関数と呼び、 $\delta(x)$  と書く。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad \text{全面積が 1}$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) dx = 1 \quad \varepsilon: \text{任意正数. つまりどれだけ } \varepsilon \text{ を小さくしても 1}$$



原点で  $\infty$  という意味で、矢印で表記。



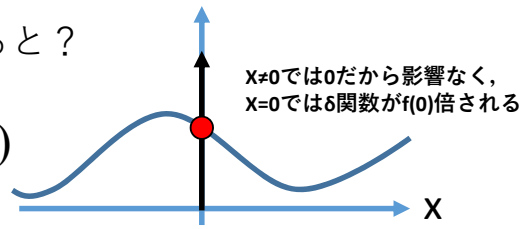
幅が無限に狭く、高さが無限に高くなった矩形波という理解が可能



# (復習) デルタ関数の積分

デルタ関数と、一般の関数 $f(x)$ の積を積分すると？

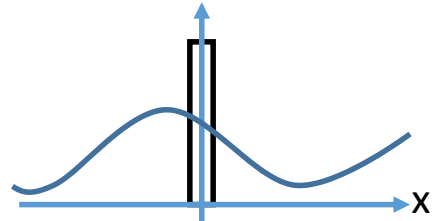
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$



デルタ関数を「矩形波の幅を短くした極限」と考えて理解

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} f(x) dx = f(0)$$



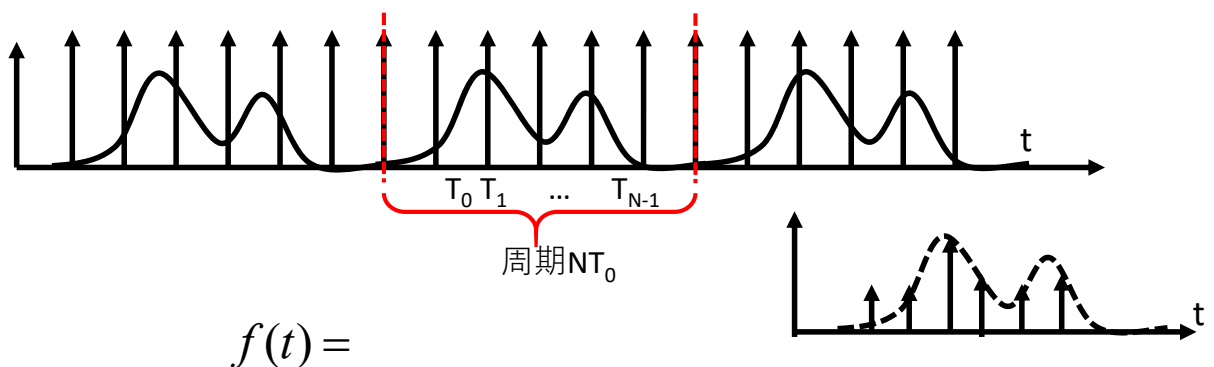
つまりデルタ関数は、積分操作によって $f(0)$ の値を「取り出す」関数である  
(逆にこの積分操作によって定義されている)



離散かつ周期的な信号を定義する

一周期分をcomb (くし形) 関数と元の関数との掛け算で表す

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$



このように定義することで、 $t = T_0, T_1, \dots, T_{N-1}$ でのみ、 $x(nT_0)$ の大きさを持つ関数となる。(デルタ関数による値の切り出し)



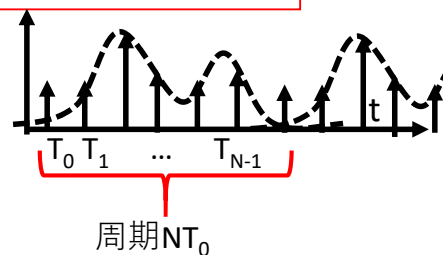
$n$ の範囲(0~ $N-1$ の $N$ 個)は慣習的なもの

周期信号ならフーリエ級数展開できるはず

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \exp(-j \frac{2n\pi}{T} x) dx \quad f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j \frac{2n\pi}{T} x)$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_0) \cdot \delta(t - nT_0)$$

$$F_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \exp(-j \frac{2k\pi}{T} t) dt$$



=

=

=

∵デルタ関数の積分

フーリエ級数展開ができた。



周期性の確認

$$F_k = \frac{1}{NT_0} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_0) \exp(-j \frac{2\pi}{N} kn)$$

$$F_{k+N} =$$

=

=

=

つまり係数 $F_k$ は確かに**周期性**があり，周期は $N$ 。





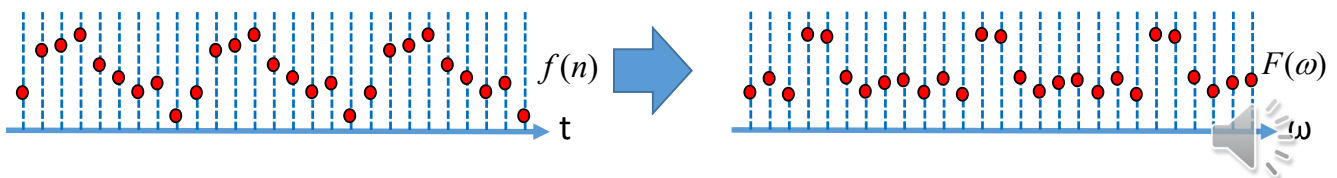
# 離散フーリエ変換 (DFT: Discrete Fourier Transform)

$$F_k = \frac{1}{NT_0} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_0) \exp(-j \frac{2\pi}{N} kn)$$

慣習的にはサンプリング間隔を1とし、係数 $1/NT_0$ を取り除き

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp(-j \frac{2\pi}{N} kn)$$

**周期的・離散** (時間, 空間) 信号を,  
**周期的・離散** (周波数) 信号に変換出来た。



ということは,

DFTとは,

あるN個の数値データがあったら,

**その数値データが「無限に繰り返す」と (勝手に) 仮定して,**

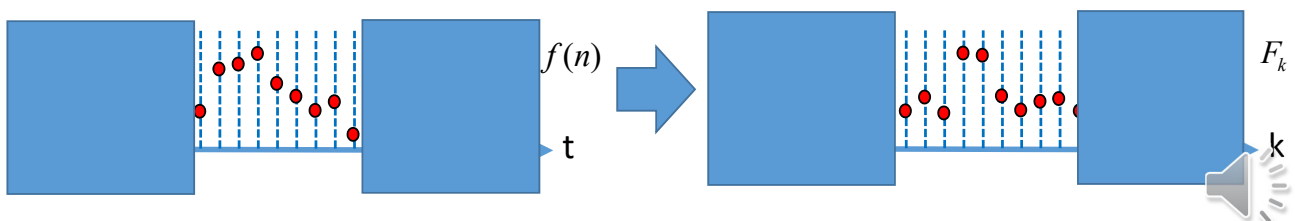
N個の周波数データに変換する操作である。

もとの信号が周期的かどうかはもはやどうでもよく,

N個の離散データ → N個の離散周波数データ

の変換器となる。

つまりコンピュータで扱える！



具体例：元が4個のデータの場合

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp(-j \frac{2\pi}{N} kn)$$

$$F_k = \sum_{n=0}^3 f(n) \exp(-j \frac{2\pi}{4} kn)$$

=

$$W_N = \exp(-j \frac{2\pi}{N}) \text{ と置くと}$$

=



元が4個のデータの場合（続き）

$$F_k = f(0)W_4^{k \cdot 0} + f(1)W_4^{k \cdot 1} + f(2)W_4^{k \cdot 2} + f(3)W_4^{k \cdot 3}$$

$$\text{ただし } W_N = \exp(-j \frac{2\pi}{N})$$

$$W_4^0 = 1$$

$$W_4^1 = \exp(-j \frac{2\pi}{4}) =$$

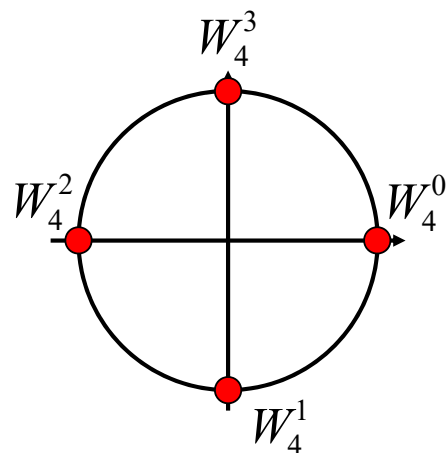
$$W_4^2 = \exp(-j \frac{4\pi}{4}) =$$

$$W_4^3 = \exp(-j \frac{6\pi}{4}) =$$

$$W_4^4 = \exp(-j \frac{8\pi}{4}) =$$

⋮

$W_N^0$  から  $W_N^N$  で複素単位円を一周する。





元が4個のデータの場合（続き）

$$F_k = f(0)W_4^{k \cdot 0} + f(1)W_4^{k \cdot 1} + f(2)W_4^{k \cdot 2} + f(3)W_4^{k \cdot 3}$$

全部書き出す

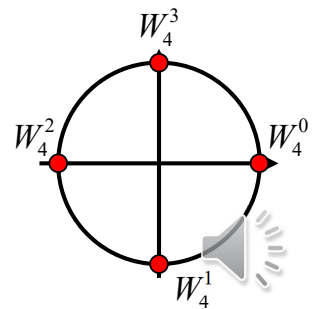
$$F_0 = f(0)W_4^{0 \cdot 0} + f(1)W_4^{0 \cdot 1} + f(2)W_4^{0 \cdot 2} + f(3)W_4^{0 \cdot 3}$$

$$F_1 = f(0)W_4^{1 \cdot 0} + f(1)W_4^{1 \cdot 1} + f(2)W_4^{1 \cdot 2} + f(3)W_4^{1 \cdot 3}$$

$$F_2 =$$

$$F_3 =$$

$F_4$ は $F_0$ と等しい（周期性）ので、これで終わり。  
4個のデータ( $f$ )を4個のデータ( $F$ )に変換している



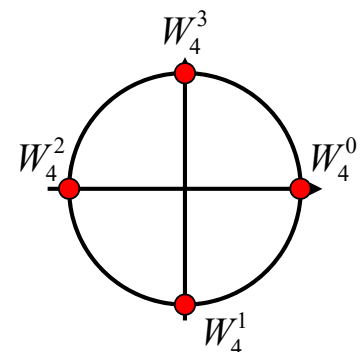
元が4個のデータの場合（続き）

行列の形に書きなおすと

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^{0 \cdot 0} & W_4^{0 \cdot 1} & W_4^{0 \cdot 2} & W_4^{0 \cdot 3} \\ W_4^{1 \cdot 0} & W_4^{1 \cdot 1} & W_4^{1 \cdot 2} & W_4^{1 \cdot 3} \\ W_4^{2 \cdot 0} & W_4^{2 \cdot 1} & W_4^{2 \cdot 2} & W_4^{2 \cdot 3} \\ W_4^{3 \cdot 0} & W_4^{3 \cdot 1} & W_4^{3 \cdot 2} & W_4^{3 \cdot 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix}$$

具体的には

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix}$$

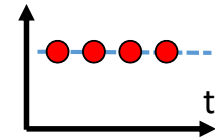


N個のデータに対するDFTは、 $N \times N$ 行列とNベクトルの乗算そのものとなる

元が4個のデータの場合（続き）

元データが  $\mathbf{f} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$  だと

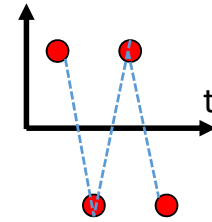
$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$



つまり  $F_0$  だけが成分を持つ。  
**直流成分** だけであることを意味している。

元データが  $\mathbf{f} = [1 \ -1 \ 1 \ -1]^T$  だと

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$



つまり  $F_2$  だけが成分を持つ。  
**ある高い周波数成分** だけであることを意味している。



元が8個のデータだと？

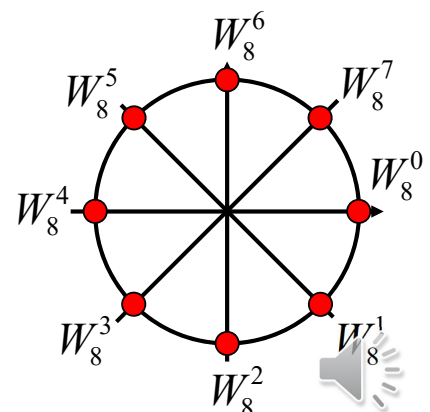
$$F_k = f(0)W_8^{k \cdot 0} + f(1)W_8^{k \cdot 1} + \dots + f(7)W_8^{k \cdot 7}$$

全部書き出す

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_8^{0 \cdot 0} & W_8^{0 \cdot 1} & \dots & W_8^{0 \cdot 7} \\ W_8^{1 \cdot 0} & W_8^{1 \cdot 1} & \ddots & W_8^{1 \cdot 7} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ W_8^{7 \cdot 0} & W_8^{7 \cdot 1} & \dots & W_8^{7 \cdot 7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(7) \end{bmatrix}$$

$$W_N = \exp(-j \frac{2\pi}{N}) \quad \text{なので,}$$

$W_N^0$  から  $W_N^N$  で複素単位円を一周する。



元データが2個の場合（最も基本的な場合）

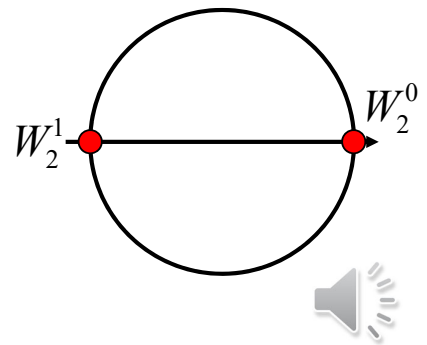
$$F_k = f(0)W_2^{k \cdot 0} + f(1)W_2^{k \cdot 1}$$

全部書き出す

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$W_N = \exp(-j\frac{2\pi}{N}) \text{ なので,}$$

$$W_2 = \exp(-j\frac{2\pi}{2}) = \exp(-j\pi) = -1$$



元データが2個の場合（続き）

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_2^{0 \cdot 0} & W_2^{0 \cdot 1} \\ W_2^{1 \cdot 0} & W_2^{1 \cdot 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \end{bmatrix}$$

これはつまり、 $F_0$  は**元データの和（平均）**、 $F_1$  は**差**を見ていることを意味する。

周波数の言葉で言えば、それぞれ

**直流（低周波）成分と変動（高周波）成分**

を算出していることに相当する。

たった2個の行列演算だが、立派な離散フーリエ変換



## 逆離散フーリエ変換

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp(-j \frac{2\pi}{N} kn) \text{ に対して, } f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k \cdot \exp(j \frac{2\pi}{N} kn)$$

(ここでは導出はせず証明のみ行う)

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k \cdot \exp(j \frac{2\pi}{N} kn)$$

=

=



## 逆離散フーリエ変換 (続き)

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k \cdot \exp(j \frac{2\pi}{N} kn) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f(m) \sum_{k=0}^{N-1} \exp(j \frac{2\pi}{N} k(n-m))$$

$$n=m \text{ のとき } \sum_{k=0}^{N-1} \exp(j \frac{2\pi}{N} k(n-m)) =$$

$$n \neq m \text{ のとき, } \sum_{k=0}^{N-1} \exp(j \frac{2\pi}{N} k(n-m)) =$$

これは等比数列

∴等比級数の和の公式

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

よって,

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k \cdot \exp(j \frac{2\pi}{N} kn) =$$

以上により, 確かに逆離散フーリエ変換で元の数値列に戻る.



逆DFT：N=4の場合

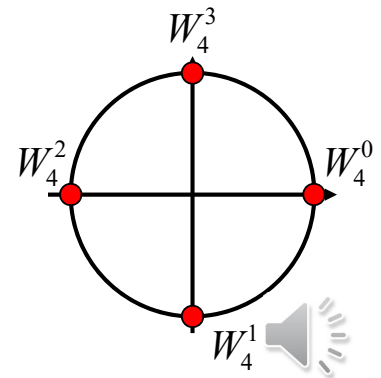
$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp(-j \frac{2\pi}{N} kn) \text{ に対して, } f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k \cdot \exp(j \frac{2\pi}{N} kn)$$

$$f(n) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 F_k \exp(j \frac{2\pi}{4} kn)$$

=

$$W_N = \exp(-j \frac{2\pi}{N}) \text{ と置くと}$$

=



行列形式で表現すると

$$W_N = \exp(-j \frac{2\pi}{N})$$

$$f(n) = \frac{1}{4} \left\{ F_0 W_4^{-n \cdot 0} + F_1 W_4^{-n \cdot 1} + F_2 W_4^{-n \cdot 2} + F_3 W_4^{-n \cdot 3} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} W_4^{-0 \cdot 0} & W_4^{-0 \cdot 1} & W_4^{-0 \cdot 2} & W_4^{-0 \cdot 3} \\ W_4^{-1 \cdot 0} & W_4^{-1 \cdot 1} & W_4^{-1 \cdot 2} & W_4^{-1 \cdot 3} \\ W_4^{-2 \cdot 0} & W_4^{-2 \cdot 1} & W_4^{-2 \cdot 2} & W_4^{-2 \cdot 3} \\ W_4^{-3 \cdot 0} & W_4^{-3 \cdot 1} & W_4^{-3 \cdot 2} & W_4^{-3 \cdot 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

ところで我々はすでにDFTを行列形式で表現していた

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^{0 \cdot 0} & W_4^{0 \cdot 1} & W_4^{0 \cdot 2} & W_4^{0 \cdot 3} \\ W_4^{1 \cdot 0} & W_4^{1 \cdot 1} & W_4^{1 \cdot 2} & W_4^{1 \cdot 3} \\ W_4^{2 \cdot 0} & W_4^{2 \cdot 1} & W_4^{2 \cdot 2} & W_4^{2 \cdot 3} \\ W_4^{3 \cdot 0} & W_4^{3 \cdot 1} & W_4^{3 \cdot 2} & W_4^{3 \cdot 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix}$$

この2つが成立するという事は、2つの行列は逆行列の関係にあるはず！

逆DFTが逆行列であること：部分的な検証

$$W_N = \exp(-j \frac{2\pi}{N})$$

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} W_4^{0.0} & W_4^{0.1} & W_4^{0.2} & W_4^{0.3} \\ W_4^{1.0} & W_4^{1.1} & W_4^{1.2} & W_4^{1.3} \\ W_4^{2.0} & W_4^{2.1} & W_4^{2.2} & W_4^{2.3} \\ W_4^{3.0} & W_4^{3.1} & W_4^{3.2} & W_4^{3.3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_4^{-0.0} & W_4^{-0.1} & W_4^{-0.2} & W_4^{-0.3} \\ W_4^{-1.0} & W_4^{-1.1} & W_4^{-1.2} & W_4^{-1.3} \\ W_4^{-2.0} & W_4^{-2.1} & W_4^{-2.2} & W_4^{-2.3} \\ W_4^{-3.0} & W_4^{-3.1} & W_4^{-3.2} & W_4^{-3.3} \end{bmatrix}$$

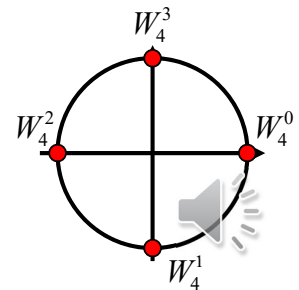
2,2成分：

4,3成分：

=

=

確かに対角成分が1, それ以外が0になっており,  
逆行列の関係にある (一般の場合の証明は省略)



## 今日のまとめ

- コンピュータで扱えるデータ処理にするために、有限長のデータ列を周期関数とみなしてフーリエ変換する、離散フーリエ変換 (DFT: Discrete Fourier Transform) を導入した。
- DFTは正方行列による変換と見なせた。
- 逆離散フーリエ変換 (IDFT: Inverse DFT) を導入した。
- IDFTがDFTの逆行列であることを確認した。

次回はDFTの性質



# 今日のレポート

**N=4**の場合のIDFTの、**4x4**行列表現を具体的に求め、DFTの**4x4**行列表現と互いに逆行列の関係にあることを示せ。

レポートは紙に書いたものを写真にとり、下記からアップロードする。  
Googleアカウントによりアップロードするので、大学が提供しているアカウントを使用すること。画像ファイルは5MB以下に抑えること。

<https://forms.gle/tovLwBV1eaiuoAVA>

提出締め切り：講義日から一週間以内

