日程

講義番号	講義日	講義内容	pdf	video	レポート締め切り
1	10/7	周期関数、フーリエ級数の定義	[pdf](2020年版)	video	10/14
2	10/14	フーリエ級数の計算例	[pdf](2020年版)	video	10/21
-	10/21	体育祭			
3	10/28	複素フーリエ級数、直交関数系	[pdf](2020年版)	video	11/4
4	11/4	周期関数のたたみこみ、パーセバルの等式	[pdf](2020年版)	video	11/11
5	11/11	非周期関数、フーリエ変換の定義・計算例	[pdf](2020年版)	video	11/18
6	11/18	フーリエ変換の性質	[pdf]	video	11/25
7	11/25	デルタ関数とフーリエ変換、たたみこみのフーリエ変換、パーセバルの等式	[pdf](2020年版)	video	12/2
-		中間確認テスト用問題集	[pdf](2020年版)		
-	12/2	中間確認テスト（前半。現在は大学を予定）			
8	12/9	離散時間信号と離散時間フーリエ変換（教科書外）	[pdf](2020年版)	video	12/16
9	12/16	離散フーリエ変換（教科書外）	[pdf](2020年版)	video	12/23
10	12/23	離散フーリエ変換の性質（教科書外）	[pdf](2020年版)	video	1/6
11	1/6	サンプリング定理	[pdf](2020年版)	video	1/13
12	1/13	ラプラス変換の定義と性質	[pdf](2020年版)	video	1/20
13	1/20	線形常微分方程式のラプラス変換による解法	[pdf](2020年版)	video	1/27
-		期末テスト用問題集	[pdf](2020年版)		
-	1/27	期末確認テスト（後半。現在は大学を予定）			

今日の目標

フーリエ変換を

「コンピュータで扱える信号処理」とするための

最終ステップとして，

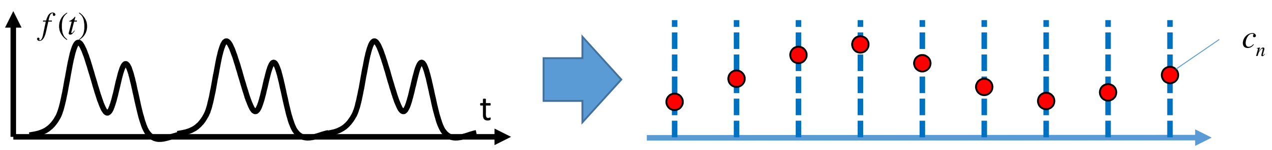
離散フーリエ変換を導入する

前回：離散時間フーリエ変換（DTFT:Discrete-Time Fourier Tranform)

フーリエ級数展開：

連続かつ周期的な時空間信号を，離散的な周波数信号（フーリエ級数）に変換.

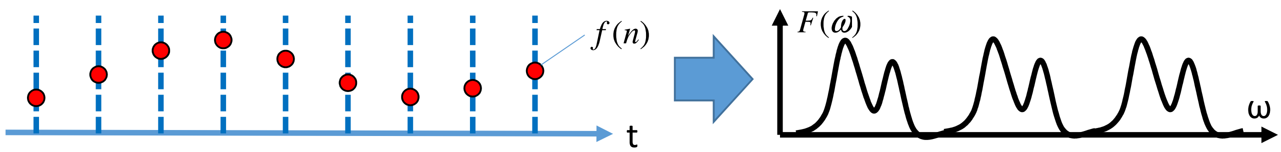
$$f(x) \approx \sum_{n=--\infty}^{\infty} c_n \exp(j\frac{2n\pi}{T}x) \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\exp(-j\frac{2n\pi}{T}x)dx$$



離散時間フーリエ変換：

離散的な時空間信号を，連続かつ周期的な周波数信号に変換.

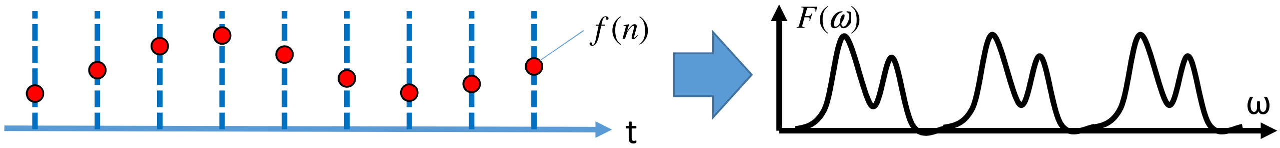
$$f(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)\exp(j\omega n)d\omega \qquad F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n)$$



すなわち**フーリエ級数展開と離散時間フーリエ変換は逆の関係**

離散時間フーリエ変換（DTFT）はコンピュータで扱えるか？

$$f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(\omega)\exp(j\omega n)d\omega \qquad F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)\exp(-j\omega n)$$



未だコンピュータで**扱えない**２つの理由

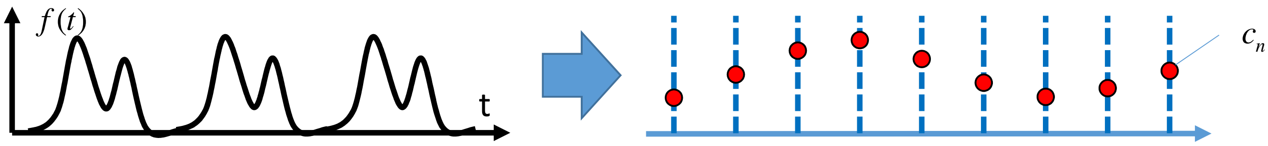
- 元の信号：**無限に長い**
- 周波数信号：**連続信号**である

元の信号はある範囲外の信号をf(n)=0とすればあつかえるが，周波数信号が連続であることはどうしようもなく，**コンピュータに取り込めない**.

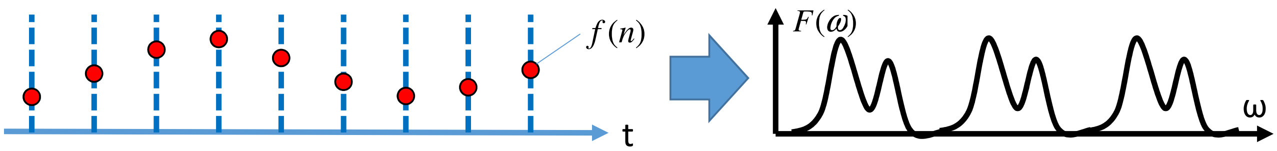
周波数信号を離散化するにはどうしたらよいか

アイデア：フーリエ級数展開＋離散時間フーリエ変換

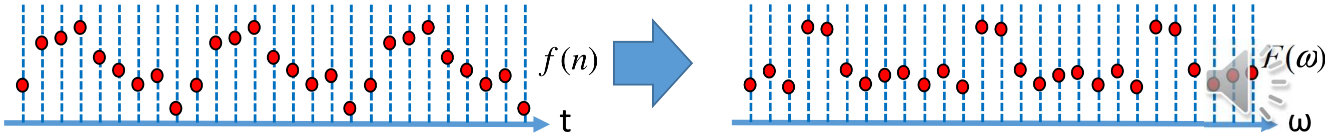
フーリエ級数展開：
周期的な信号→離散的な信号



離散時間フーリエ変換：
離散的な信号→周期的な信号



ということは，**元が離散的かつ周期的な信号であれば，**
離散的かつ周期的な周波数信号に変換されるのではないか

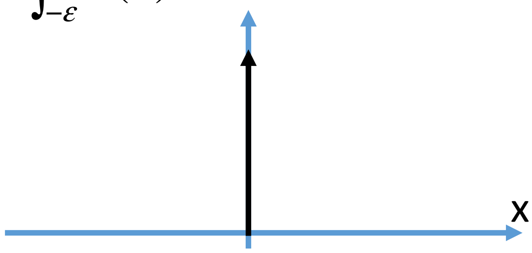


（復習）デルタ（δ）関数

全面積がx=0に集中した仮想的な関数をデルタ関数と呼び，δ(x)と書く．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1$$ 全面積が１

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)dx=1$$ ε：任意正数．つまりどれだけεを小さくしても１



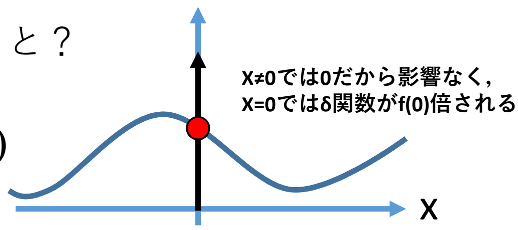
原点で∞という意味で，矢印で表記．

幅が無限に狭く，高さが無限に高くなった矩形波という理解が可能

（復習）デルタ関数の積分

デルタ関数と，一般の関数f(x)の積を積分すると？

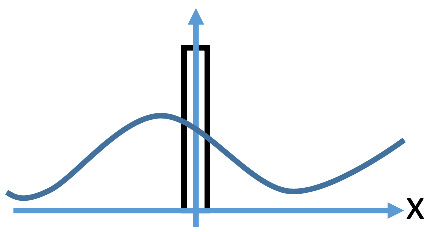
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)dx=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)f(x)dx=f(0)$$



デルタ関数を「矩形波の幅を短くした極限」と考えて理解

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon} & -\varepsilon\le t\le\varepsilon \\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{1}{2\varepsilon}f(x)dx=f(0)$$

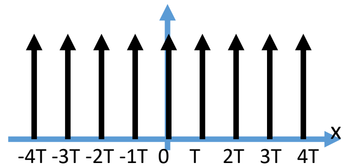


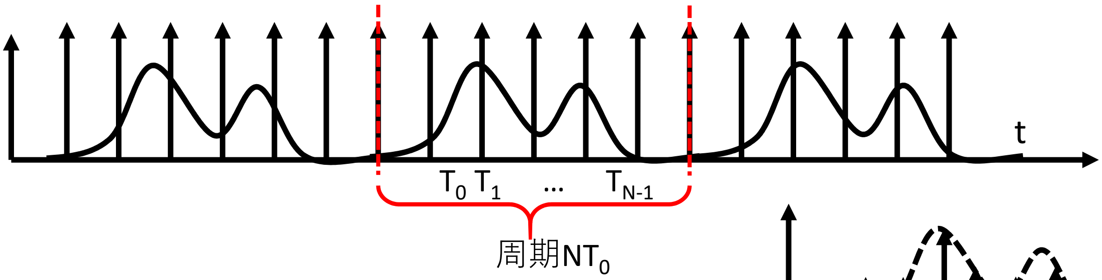
つまり**デルタ関数は，積分操作によってf(0)の値を「取り出す」関数**である
（逆にこの積分操作によって定義されている）

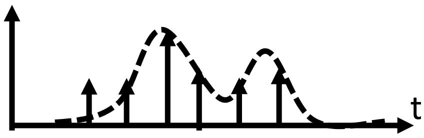
離散かつ周期的な信号を定義する

一周期分をcomb（くし形）関数と元の関数との掛け算で表す

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$







$$f(t)=$$

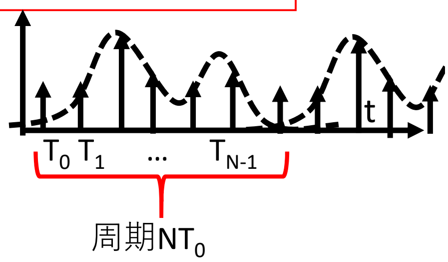
このように定義することで，t=T_0, T_1, …, T_{N-1},でのみ，x(nT_0)の大きさを持つ関数となる．（デルタ関数による値の切り出し）

nの範囲(0～N-1のN個）は慣習的なもの

周期信号ならフーリエ級数展開できるはず

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\exp(-j\frac{2n\pi}{T}x)dx \qquad f(x)\approx\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\exp(j\frac{2n\pi}{T}x)$$

$$f(t)=\sum_{n=0}^{N-1}f(nT_0)\cdot\delta(t-nT_0)$$



$$F_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\exp(-j\frac{2k\pi}{T}t)dt$$

$=$

$=$

$=$ ∵デルタ関数の積分

フーリエ級数展開ができた．

周期性の確認

$$F_k = \frac{1}{NT_0}\sum_{n=0}^{N-1} f(nT_0)\exp(-j\frac{2\pi}{N}kn)$$

$$F_{k+N} =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

つまり係数F_kは確かに**周期性**があり，周期はN.

離散フーリエ変換（DFT: Discrete Fourier Transform)

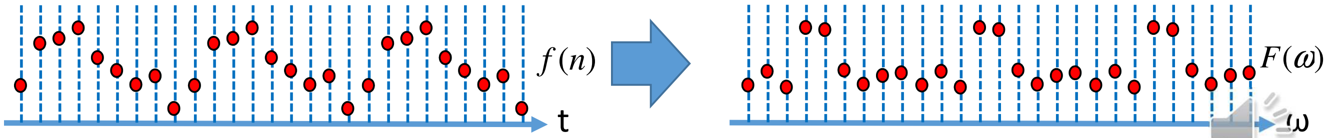
$$F_k = \frac{1}{NT_0}\sum_{n=0}^{N-1} f(nT_0)\exp(-j\frac{2\pi}{N}kn)$$

慣習的にはサンプリング間隔を1とし，係数$1/NT_0$を取り除き

$$\boxed{F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\exp(-j\frac{2\pi}{N}kn)}$$

周期的・離散（時間，空間）信号を，

周期的・離散（周波数）信号に変換出来た.



ということは，

DFTとは，

あるN個の数値データがあったら，

その数値データが「無限に繰り返す」と（勝手に）仮定して，

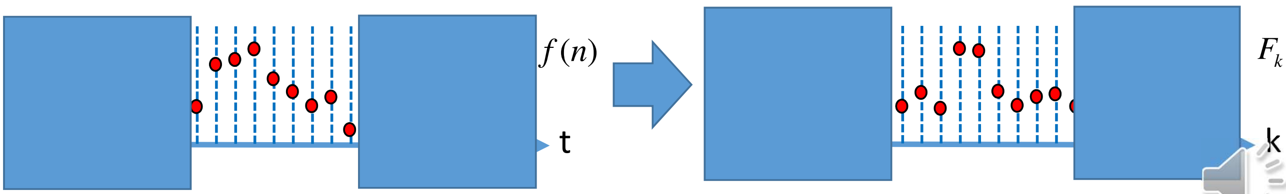
N個の周波数データに変換する操作である．

もとの信号が周期的かどうかはもはやどうでもよく，

N個の離散データ→N個の離散周波数データ

の変換器となる．

つまりコンピュータで扱える！



具体例：元が４個のデータの場合

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\exp(-j\frac{2\pi}{N}kn)$$

$$F_k = \sum_{n=0}^{3} f(n)\exp(-j\frac{2\pi}{4}kn)$$

＝

$W_N = \exp(-j\frac{2\pi}{N})$ と置くと

＝

元が4個のデータの場合（続き）

$$F_k = f(0)W_4^{k\cdot 0} + f(1)W_4^{k\cdot 1} + f(2)W_4^{k\cdot 2} + f(3)W_4^{k\cdot 3}$$

ただし $W_N = \exp(-j\dfrac{2\pi}{N})$

$${W_4}^0 = 1$$

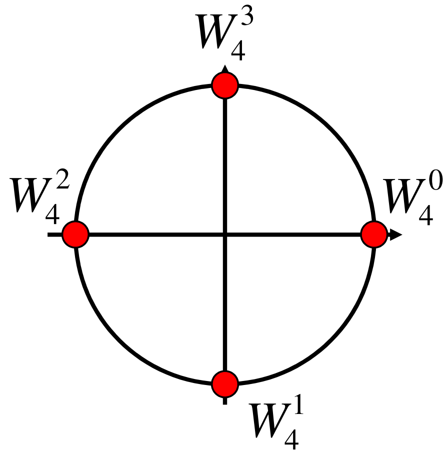
$${W_4}^1 = \exp(-j\frac{2\pi}{4}) =$$

$${W_4}^2 = \exp(-j\frac{4\pi}{4}) =$$

$${W_4}^3 = \exp(-j\frac{6\pi}{4}) =$$

$${W_4}^4 = \exp(-j\frac{8\pi}{4}) =$$

$$\vdots$$



W_N^0 から W_N^N で複素単位円を一周する.

元が4個のデータの場合（続き）

$$F_k = f(0)W_4^{k\cdot 0} + f(1)W_4^{k\cdot 1} + f(2)W_4^{k\cdot 2} + f(3)W_4^{k\cdot 3}$$

全部書き出す

$$F_0 = f(0)W_4^{0\cdot 0} + f(1)W_4^{0\cdot 1} + f(2)W_N^{0\cdot 2} + f(3)W_N^{0\cdot 3}$$

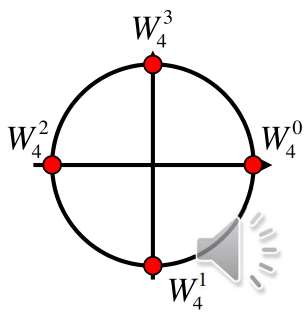
$$F_1 = f(0)W_4^{1\cdot 0} + f(1)W_4^{1\cdot 1} + f(2)W_4^{1\cdot 2} + f(3)W_4^{1\cdot 3}$$

$$F_2 =$$

$$F_3 =$$

F_4はF_0と等しい（周期性）ので，これで終わり．

4個のデータ(f)を4個のデータ(F)に変換している



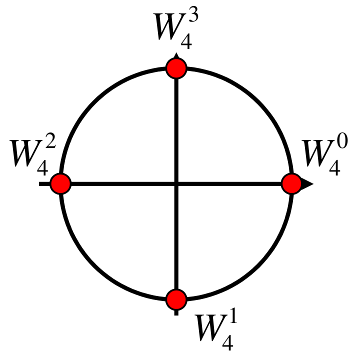
元が4個のデータの場合（続き）

行列の形に書きなおすと

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^{0\cdot 0} & W_4^{0\cdot 1} & W_4^{0\cdot 2} & W_4^{0\cdot 3} \\ W_4^{1\cdot 0} & W_4^{1\cdot 1} & W_4^{1\cdot 2} & W_4^{1\cdot 3} \\ W_4^{2\cdot 0} & W_4^{2\cdot 1} & W_4^{2\cdot 2} & W_4^{2\cdot 3} \\ W_4^{3\cdot 0} & W_4^{3\cdot 1} & W_4^{3\cdot 2} & W_4^{3\cdot 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix}$$

具体的には

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix}$$

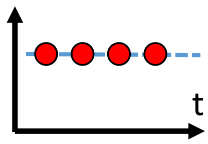


N個のデータに対するDFTは，NxN行列とNベクトルの乗算そのものとなる

元が4個のデータの場合（続き）

元データが $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ だと

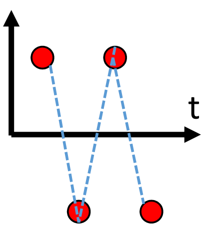
$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$



つまり F_0 だけが成分を持つ．**直流成分**だけであることを意味している．

元データが $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ だと

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$



つまり F_2 だけが成分を持つ．**ある高い周波数成分**だけであることを意味している．

元が8個のデータだと？

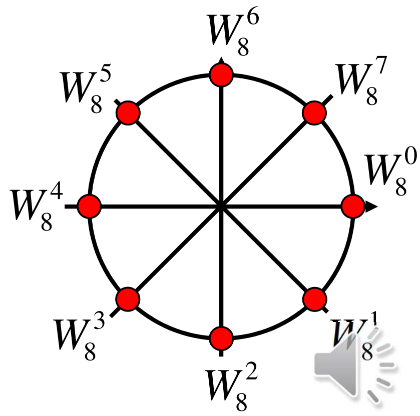
$$F_k = f(0)W_8^{k\cdot 0} + f(1)W_8^{k\cdot 1} + \cdots + f(7)W_8^{k\cdot 7}$$

全部書き出す

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_8^{0\cdot 0} & W_8^{0\cdot 1} & \cdots & W_8^{0\cdot 7} \\ W_8^{1\cdot 0} & W_8^{1\cdot 1} & \ddots & W_8^{1\cdot 7} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ W_8^{7\cdot 0} & W_8^{7\cdot 1} & \cdots & W_8^{7\cdot 7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(7) \end{bmatrix}$$

$W_N = \exp(-j\dfrac{2\pi}{N})$　なので,

W_N^0　から W_N^N で複素単位円を一周する.



元データが２個の場合（最も基本的な場合）

$$F_k = f(0)W_2^{k\cdot 0} + f(1)W_2^{k\cdot 1}$$

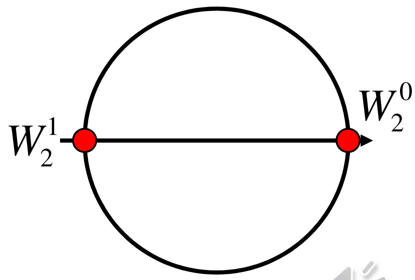
全部書き出す

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \end{bmatrix}$$

$W_N = \exp(-j\dfrac{2\pi}{N})$ なので,

$$W_2 = \exp(-j\frac{2\pi}{2}) = \exp(-j\pi) = -1$$



元データが２個の場合（続き）

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_2^{0\cdot 0} & W_2^{0\cdot 1} \\ W_2^{1\cdot 0} & W_2^{1\cdot 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \end{bmatrix}$$

これはつまり，F_0 は**元データの和（平均）**，F_1 は**差**

を見ていることを意味する．

周波数の言葉で言えば，それぞれ

直流（低周波）成分と変動（高周波）成分

を算出していることに相当する．

たった２個の行列演算だが，立派な離散フーリエ変換

逆離散フーリエ変換

$$\boxed{F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\exp(-j\frac{2\pi}{N}kn) \text{ に対して，} f(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_k \cdot \exp(j\frac{2\pi}{N}kn)}$$

（ここでは導出はせず証明のみ行う）

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_k \cdot \exp(j\frac{2\pi}{N}kn)$$

$$=$$

$$=$$

逆離散フーリエ変換（続き）

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}F_k\cdot\exp(j\frac{2\pi}{N}kn)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}f(m)\sum_{k=0}^{N-1}\exp(j\frac{2\pi}{N}k(n-m))$$

n=mのとき　$\sum_{k=0}^{N-1}\exp(j\frac{2\pi}{N}k(n-m))=$　　　$=$

n≠mのとき，　$\sum_{k=0}^{N-1}\exp(j\frac{2\pi}{N}k(n-m))=$

これは等比数列

∵等比級数の和の公式

$=$　　　$=$

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

よって，　$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}F_k\cdot\exp(j\frac{2\pi}{N}kn)=$

以上により，確かに逆離散フーリエ変換で元の数値列に戻る．

逆DFT：N=4の場合

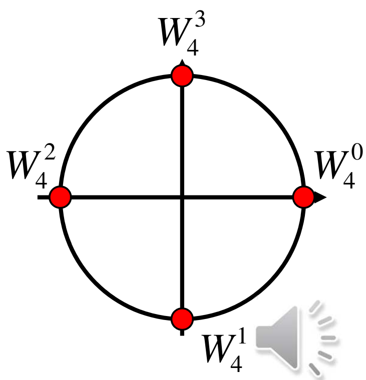
$F_k=\sum_{n=0}^{N-1}f(n)\exp(-j\frac{2\pi}{N}kn)$ に対して，$f(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}F_k\cdot\exp(j\frac{2\pi}{N}kn)$

$$f(n)=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}F_k\exp(j\frac{2\pi}{4}kn)$$

$=$

$W_N=\exp(-j\frac{2\pi}{N})$ と置くと

$=$



行列形式で表現すると

$$W_N = \exp(-j\frac{2\pi}{N})$$

$$f(n) = \frac{1}{4}\left\{F_0 W_4^{-n\cdot 0} + F_1 W_4^{-n\cdot 1} + F_2 W_4^{-n\cdot 2} + F_3 W_4^{-n\cdot 3}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} W_4^{-0\cdot 0} & W_4^{-0\cdot 1} & W_4^{-0\cdot 2} & W_4^{-0\cdot 3} \\ W_4^{-1\cdot 0} & W_4^{-1\cdot 1} & W_4^{-1\cdot 2} & W_4^{-1\cdot 3} \\ W_4^{-2\cdot 0} & W_4^{-2\cdot 1} & W_4^{-2\cdot 2} & W_4^{-2\cdot 3} \\ W_4^{-3\cdot 0} & W_4^{-3\cdot 1} & W_4^{-3\cdot 2} & W_4^{-3\cdot 3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

ところで我々はすでにDFTを行列形式で表現していた

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^{0\cdot 0} & W_4^{0\cdot 1} & W_4^{0\cdot 2} & W_4^{0\cdot 3} \\ W_4^{1\cdot 0} & W_4^{1\cdot 1} & W_4^{1\cdot 2} & W_4^{1\cdot 3} \\ W_4^{2\cdot 0} & W_4^{2\cdot 1} & W_4^{2\cdot 2} & W_4^{2\cdot 3} \\ W_4^{3\cdot 0} & W_4^{3\cdot 1} & W_4^{3\cdot 2} & W_4^{3\cdot 3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix}$$

この２つが成立するということは，２つの行列は逆行列の関係にあるはず！

逆DFTが逆行列であること：部分的な検証

$$W_N = \exp(-j\frac{2\pi}{N})$$

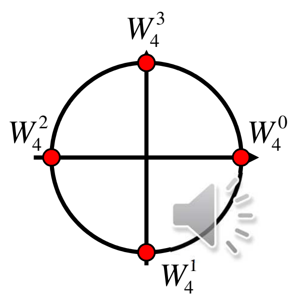
$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} W_4^{0\cdot 0} & W_4^{0\cdot 1} & W_4^{0\cdot 2} & W_4^{0\cdot 3} \\ \boxed{W_4^{1\cdot 0} \quad W_4^{1\cdot 1} \quad W_4^{1\cdot 2} \quad W_4^{1\cdot 3}} \\ W_4^{2\cdot 0} & W_4^{2\cdot 1} & W_4^{2\cdot 2} & W_4^{2\cdot 3} \\ \boxed{W_4^{3\cdot 0} \quad W_4^{3\cdot 1} \quad W_4^{3\cdot 2} \quad W_4^{3\cdot 3}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_4^{-0\cdot 0} & W_4^{-0\cdot 1} & W_4^{-0\cdot 2} & W_4^{-0\cdot 3} \\ W_4^{-1\cdot 0} & W_4^{-1\cdot 1} & W_4^{-1\cdot 2} & W_4^{-1\cdot 3} \\ W_4^{-2\cdot 0} & W_4^{-2\cdot 1} & W_4^{-2\cdot 2} & W_4^{-2\cdot 3} \\ W_4^{-3\cdot 0} & W_4^{-3\cdot 1} & W_4^{-3\cdot 2} & W_4^{-3\cdot 3} \end{bmatrix}$$

2,2成分：

$=$

4,3成分：

$=$ $\qquad$ $=$



確かに対角成分が1，それ以外が0になっており，

逆行列の関係にある（一般の場合の証明は省略）

今日のまとめ

- コンピュータで扱えるデータ処理にするために，有限長のデータ列を周期関数とみなしてフーリエ変換する，離散フーリエ変換（DFT: Discrete Fourier Transform）を導入した．
- DFTは正方行列による変換と見なせた．
- 逆離散フーリエ変換（IDFT: Inverse DFT）を導入した．
- IDFTがDFTの逆行列であることを確認した．

次回はDFTの性質

今日のレポート

N=4の場合のIDFTの、4x4行列表現を具体的に求め、DFTの4x4行列表現と互いに逆行列の関係にあることを示せ。

レポートは紙に書いたものを写真にとり、下記からアップロードする。
Googleアカウントによりアップロードするので、大学が提供しているアカウントを使用すること。画像ファイルは5MB以下に抑えること。
https://forms.gle/YWvwdqxwYT1WsiDD9
提出締め切り：講義日から一週間以内