応用数学第一　期末確認用自習問題集

（2020 年度は中間確認用と期末確認用両方が期末試験の範囲となることに注意）

解答にあたっては答えのみ書くのではなく，式展開も書くこと．

1　離散時間信号と離散時間フーリエ変換

離散時間フーリエ変換は$\mathrm{F}(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-j\omega n)$で定義される．また逆離散時間フーリエ変換は$\mathrm{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)\exp(j\omega n)\,d\omega$で定義される．

(1.1) $\mathrm{f}(n)=\delta(n)$の時の離散時間フーリエ変換を求めよ

(1.2) $\mathrm{f}(n)$が$-\mathrm{N}\leq \mathrm{n}\leq \mathrm{N}$で 1、それ以外で 0 の時の離散時間フーリエ変換を求めよ

(1.3) $\mathrm{f}(n)$が実関数の時 $\mathrm{F}(\omega)$の実部と虚部がもつ性質を証明とともに述べよ

(1.4) $\mathrm{f}(n)$が偶関数の時 $\mathrm{F}(\omega)$がもつ性質を証明とともに述べよ

(1.5) $\mathrm{f}(n)$が奇関数の時 $\mathrm{F}(\omega)$がもつ性質を証明とともに述べよ

(1.6) $\mathrm{f}(n-M)$(M は定数)の離散時間フーリエ変換を求めよ

(1.7) $\mathrm{f}(-n)$の離散時間フーリエ変換を求めよ

(1.8) $\mathrm{f}(n)\exp(j\omega_0 n)$（$\omega_0$は定数）の離散時間フーリエ変換を求めよ

(1.9) パーセバルの等式$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(\omega)|^2 d\omega=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f(n)|^2$を示せ

2　離散フーリエ変換

離散フーリエ変換は$\mathrm{F}(k)=\sum_{n=0}^{N-1} f(n)\exp(-j\frac{2\pi k}{N}n)$で定義される．

また逆離散フーリエ変換は$\mathrm{f}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F(k)\exp(j\frac{2\pi n}{N}k)$で定義される．

また離散信号 $\mathrm{f}(n)$，$\mathrm{g}(n)$のたたみ込みは$\mathrm{h}(n)=\sum_{i=0}^{N-1} f(i)g(n-i)$で定義される．

(2.1) 離散フーリエ変換の周期性を示せ

(2.2) 元データが実数であるとき，離散フーリエ変換の結果が対称性を持つことを示せ

(2.3) 時間シフト信号$\mathrm{f}(n-M)$の離散フーリエ変換の結果を示せ

(2.4) データ点数が 2 の場合の離散フーリエ変換および逆離散フーリエ変換を 2x2 行列の形で求め、逆行列の関係にあることを示せ

(2.5) データ点数が 4 の場合の離散フーリエ変換を 4x4 行列の形で求めよ

(2.6) 以下の信号$\mathrm{f}(n)$（$\mathrm{n}=0\sim 3$)について離散フーリエ変換$\mathrm{F}(k)$（$\mathrm{k}=0\sim 3$)を求めよ

$\mathrm{f}(0)=1, f(1)=1, f(2)=-1, f(3)=-1$

(2.7) 以下の信号$\mathrm{g}(n)$（$\mathrm{n}=0\sim 3$)について離散フーリエ変換$\mathrm{G}(k)$（$\mathrm{k}=0\sim 3$)を求めよ

$\mathrm{g}(0)=-1, g(1)=-1, g(2)=1, g(3)=1$

(2.8) (2.6)(2.7)の離散信号 $\mathrm{f}(n)$，$\mathrm{g}(n)$についてたたみ込み$\mathrm{h}(n)$を計算せよ

(2.9) (2.8)で求めたたたみ込み$\mathrm{h}(n)$の離散フーリエ変換$\mathrm{H}(k)$（$\mathrm{k}=0\sim 3$)を求めよ

(2.10) 周波数帯域が 20kHz までの音信号をサンプリング（標本化）する際に許容されるサンプリング周波数の下限を求めよ

3　ラプラス変換の定義と性質

次の関数のラプラス変換を求めよ

(3.1) 1

(3.2) t

(3.3) $\exp(at)$

(3.4) $\cos(\omega t)$

(3.5) $\mathrm{t}\exp(at)$

(3.6) $f(t)$ のラプラス変換が$F(s)$である時の$f'(t)$

(3.7) $f(t)$ のラプラス変換が$F(s)$である時の$\int_{t=0}^{t} f(t)dt$

(3.8) $sin(\omega t)$ (ただし(3.4)と(3.6)の結果を用いる)

(3.9) $sin(\omega t)$ (ただし(3.4)と(3.7)の結果を用いる)

(3.10) $f(t)$ のラプラス変換が$F(s)$である時の$f(t-\tau)$

(3.11) $\delta(t)$

4　線形常微分方程式のラプラス変換による解法

ラプラス変換を用いて以下の微分方程式の解を求めよ

(4.1) $y' + 4y = exp(-t)$　$y(0) = 2$

(4.2) $y'' + 5y' + 6y = 0$　$y(0) = 0$　$y'(0) = 2$

(4.3) $y'' + 5y' + 6y = exp(-2t)$　$y(0) = 0$　$y'(0) = 2$

(4.4) $y'' + 4y = exp(-t)$　$y(0) = 0$　$y'(0) = 0$