応用数学第一　期末確認用自習問題集

解答にあたっては答えのみ書くのではなく，式展開も書くこと．

## 1　離散時間信号と離散時間フーリエ変換

離散時間フーリエ変換は$\mathrm{F}(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)\exp(-j\omega n)$で定義される．また逆離散時間フーリエ変換は$\mathrm{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(\omega)\exp(j\omega n)\,d\omega$で定義される．

(1.1) $\mathrm{f}(n)=\delta(n)$の時の離散時間フーリエ変換を求めよ

(1.2) $\mathrm{f}(n)$が$-\mathrm{N}\le \mathrm{n}\le \mathrm{N}$で 1、それ以外で 0 の時の離散時間フーリエ変換を求めよ

(1.3) $\mathrm{f}(n)$が実関数の時 $\mathrm{F}(\omega)$の実部と虚部がもつ性質を証明とともに述べよ

(1.4) $\mathrm{f}(n)$が偶関数の時 $\mathrm{F}(\omega)$がもつ性質を証明とともに述べよ

(1.5) $\mathrm{f}(n)$が奇関数の時 $\mathrm{F}(\omega)$がもつ性質を証明とともに述べよ

(1.6) $\mathrm{f}(n-M)$(M は定数)の離散時間フーリエ変換を求めよ

(1.7) $\mathrm{f}(-n)$の離散時間フーリエ変換を求めよ

(1.8) $\mathrm{f}(n)\exp(j\omega_0 n)$（$\omega_0$は定数）の離散時間フーリエ変換を求めよ

(1.9) パーセバルの等式$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(\omega)|^2 d\omega=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f(n)|^2$を示せ

## 2　離散フーリエ変換

離散フーリエ変換は$\mathrm{F}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}f(n)\exp(-j\frac{2\pi k}{N}n)$で定義される．

また逆離散フーリエ変換は$\mathrm{f}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}F(k)\exp(j\frac{2\pi n}{N}k)$で定義される．

また離散信号 $\mathrm{f}(n)$，$\mathrm{g}(n)$のたたみ込みは$\mathrm{h}(n)=\sum_{i=0}^{N-1}f(i)g(n-i)$で定義される．

(2.1) 離散フーリエ変換の周期性を示せ

(2.2) 元データが実数であるとき，離散フーリエ変換の結果が対称性を持つことを示せ

(2.3) 時間シフト信号$\mathrm{f}(n-M)$の離散フーリエ変換の結果を示せ

(2.4) データ点数が 2 の場合の離散フーリエ変換および逆離散フーリエ変換を 2x2 行列の形で求め、逆行列の関係にあることを示せ

(2.5) データ点数が 4 の場合の離散フーリエ変換を 4x4 行列の形で求めよ

(2.6) 以下の信号$\mathrm{f}(n)$ $(\mathrm{n}=0\sim3)$について離散フーリエ変換$\mathrm{F}(k)$ $(\mathrm{k}=0\sim3)$を求めよ

$\mathrm{f}(0)=1, f(1)=1, f(2)=-1, f(3)=-1$

(2.7) 以下の信号$\mathrm{g}(n)$ $(\mathrm{n}=0\sim3)$について離散フーリエ変換$\mathrm{G}(k)$ $(\mathrm{k}=0\sim3)$を求めよ

$\mathrm{g}(0)=-1, g(1)=-1, g(2)=1, g(3)=1$

(2.8) (2.6)(2.7)の離散信号 $\mathrm{f}(n)$，$\mathrm{g}(n)$についてたたみ込み$\mathrm{h}(n)$を計算せよ

(2.9) (2.8)で求めたたたみ込み$\mathrm{h}(n)$の離散フーリエ変換$\mathrm{H}(k)$ $(\mathrm{k}=0\sim3)$を求めよ

(2.10)周波数帯域が 20kHz 未満までの音信号をサンプリング（標本化）する際に許容されるサンプリング周波数の下限を求めよ

## 3　ラプラス変換の定義と性質

次の関数のラプラス変換を求めよ

(3.1)  $1$

(3.2)  t

(3.3)  $\exp(at)$

(3.4)  $\cos(\omega t)$

(3.5)  $\mathrm{texp}(at)$

(3.6)  $f(t)$ のラプラス変換が$F(s)$である時の$f'(t)$

(3.7)  $f(t)$ のラプラス変換が$F(s)$である時の$\int_{t=0}^{t} f(t)dt$

(3.8)  $sin(\omega t)$ (ただし(3.4)と(3.6)の結果を用いる)

(3.9)  $sin(\omega t)$ (ただし(3.4)と(3.7)の結果を用いる)

(3.10)$f(t)$ のラプラス変換が$F(s)$である時の$f(t-\tau)$

(3.11)$\delta(t)$

## 4　線形常微分方程式のラプラス変換による解法

ラプラス変換を用いて以下の微分方程式の解を求めよ

(4.1)  $y' + 4y = exp(-t)$　$y(0) = 2$

(4.2)  $y'' + 5y' + 6y = 0$　$y(0) = 0$　$y'(0) = 2$

(4.3)  $y'' + 5y' + 6y = exp(-2t)$　$y(0) = 0$　$y'(0) = 2$

(4.4)  $y'' + 4y = exp(-t)$　$y(0) = 0$　$y'(0) = 0$