応用数学第一　中間確認用問題集

答えのみでなく必要十分な式展開を書くこと.

1　フーリエ級数展開

以下の周期 2π の周期関数をフーリエ級数展開せよ.

(1.1) -π から π の範囲で $\mathrm{f}(x)=x$

(1.2) -π から π の範囲で $\mathrm{f}(x)=\frac{\pi}{2}-|x|$

(1.3) -π から π の範囲で $\mathrm{f}(x)=|x|$

(1.4) -π から π の範囲で $\mathrm{f}(x)=x^2$

(1.5) -π から π の範囲で $\mathrm{f}(x)=sign(x)$．ただし sign(x)は x>0 で 1，x<0 で-1 となる関数.

(1.6) -a<x<a の範囲で $\mathrm{f}(x)=1$，それ以外で $\mathrm{f}(x)=0$．ただし 0<a<π

2　複素フーリエ級数展開

以下の周期 2π の周期関数を複素フーリエ級数展開せよ.

(2.1) -π から π の範囲で $\mathrm{f}(x)=x$

(2.2) -π から π の範囲で $\mathrm{f}(x)=x^2$

(2.3) -a<x<a の範囲で $\mathrm{f}(x)=1$，それ以外で $\mathrm{f}(x)=0$．ただし 0<a<π

3　フーリエ級数展開の直交基底

(3.1) 基底関数 $\cos(\frac{2\pi nx}{T})$ と $\sin(\frac{2\pi mx}{T})$ が直交していることを示せ.

(3.2) 基底関数 $\cos(\frac{2\pi nx}{T})$ と $\cos(\frac{2\pi mx}{T})$ が m=n を除き直交していることを示せ.

(3.3) 基底関数 $\exp(j\frac{2\pi nx}{T})$ が直交基底を構成していることを示せ.

4　フーリエ級数展開の性質

２つの同じ周期 T をもつ周期関数 $f(x)$，$g(x)$ の複素フーリエ級数展開が以下のように与えられるとする.

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\exp(-j\frac{2n\pi}{T}x)dx \qquad d_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}g(x)\exp(-j\frac{2n\pi}{T}x)dx$$

(4.1) この２つの関数の畳込み積分

$$h(x)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(\tau)g(x-\tau)d\tau$$

のフーリエ級数展開が $e_n=c_nd_n$ で与えられることを示せ.

(4.2) 以下のパーセバルの等式を示せ

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left\|f(x)\right\|^2 dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\|c_n\right\|^2$$

5　フーリエ変換

次の関数のフーリエ変換を求めよ．ただし a>0 とする

(5.1) $f(x) = exp(-ax)u(x) = \begin{cases} exp(-ax) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

(5.2) $\mathrm{f}(x) = \exp(-a|x|)$

(5.3) $\mathrm{f}(x) = \begin{cases} 1 & \|x\| < a \\ 0 & \|x\| > a \end{cases}$

(5.4) $\mathrm{f}(x) = \exp(-ax^2)$

6　フーリエ変換の基本的性質

$f(x)$ のフーリエ変換が $F(\omega)$ で与えられる時，次の関数のフーリエ変換を求めよ

(6.1) $f(cx)$

(6.2) $f(x)\, exp(j\omega_0 x)$

(6.3) $f(x - x_0)$

(6.4) $\frac{df(x)}{dx}$

(6.5) $\overline{f(x)}$ ， $\overline{f(-x)}$

(6.6) $F(x)$ ， $F(-x)$

7　デルタ関数とフーリエ変換

(7.1) デルタ関数のフーリエ変換を導出せよ.

(7.2) デルタ関数の微分のフーリエ変換を導出せよ.

(7.3) デルタ関数を用いて1(定数)をフーリエ変換せよ

(7.4) デルタ関数を用いて$exp(j\,\omega_0 x)$をフーリエ変換せよ

(7.5) デルタ関数を用いて$cos(\omega_0 x)$，$\sin(\omega_0 x)$をフーリエ変換せよ

8　フーリエ変換の性質

(8.1) $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\,\tau$から$H(\omega) = F(\omega)G(\omega)$を導出せよ

(8.2) $H(\omega) = F(\omega)G(\omega)$から$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\,\tau$を導出せよ

(8.3) $g(x) = \overline{f(-x)}$の場合からパーセバルの等式$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega$を導出せよ