インタラクティブシステム論
第10回

梶本裕之
Twitter ID kajimoto
ハッシュタグ #ninshiki

日程

4/13 第1回　イントロダクション
4/20 第2回　フーリエ変換
4/27 第3回フーリエ変換と線形システム
5/4　みどりの日
5/11　出張により休講
5/18 第4回　信号処理の基礎
5/25 第5回　信号処理応用1（相関）
6/1 第6回　　信号処理応用2（画像処理）
6/08　インタラクティブシステムの実際（小泉先生）
6/15 第7回　ラプラス変換
6/22 第8回　古典制御の基礎
6/29　中間確認テスト（出張予定）
7/6 第9回　　行列
7/13 第10回　行列と最小二乗法
7/20 第11回　インタラクティブシステムと機械学習
7/27 第12回　ロボティクス
8/3　期末テスト（出張中）

行列復習
（センシングに現れる行列・逆行列）

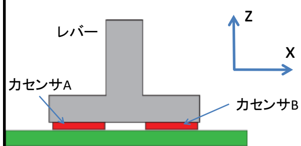
（復習）行列：データ列を変換するもの

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

（例1）
y:観測データ，A:システムの性質，x:媒介変数
（例2）
y:フーリエ空間での周波数成分，A:フーリエ変換行列，
x:実空間でのデータ系列

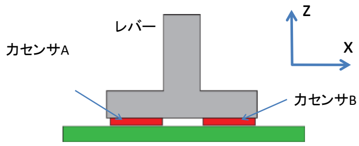
（復習）（例）2軸力センサ



$$F_Z = x_A + x_B$$
$$F_X = k(x_A - x_B)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}}_{\text{2x1ベクトル}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & -k \end{bmatrix}}_{\text{2x2行列}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}}_{\text{2x1ベクトル}}$$

（復習）カセンサのキャリブレーション（較正）

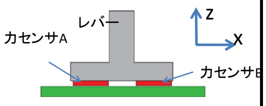


$$F_Z = k_1 x_A + k_2 x_B$$
$$F_X = k_3 x_A + k_4 x_B$$

$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

k1～k4のパラメータは元々未知．
これを求めなければ使えない！！

(復習)逆行列



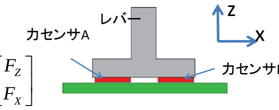
$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

これを $\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ と書く.

ここで,
「ある力を加えたときの各センサ出力は？」
という逆の関係を考える.

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{G}\mathbf{f} \qquad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

(復習)逆行列の測定



$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{f} \qquad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

(1) Fz=1, Fx=0の力を加え，各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

各センサの出力に，逆行列の成分g1，g3が現れる！

(2) Fz=0,Fx=1の力を加え，各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 \\ g_4 \end{bmatrix}$$

各センサの出力に，逆行列の成分g2，g4が現れる！

(復習)逆行列の測定

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} \qquad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

G=A^{-1}の成分，g1～g4が得られたので，
その逆行列を計算すればAが得られる.

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

まとめると,

$$\left.\begin{matrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 \\ g_4 \end{bmatrix} \end{matrix}\right\} \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} g_1 \\ g_3 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} g_2 \\ g_4 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

行列に単位行列をかけたことに相当

(復習)単位力でなくて良い

1回目の入力　1回目の出力

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} f_{z1} \\ f_{x1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} f_{z2} \\ f_{x2} \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} m_1 \\ m_1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} m_2 \\ m_2 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

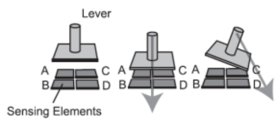
2回目の入力　2回目の出力

$$\mathbf{G}\mathbf{F} = \mathbf{M}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{M}\mathbf{F}^{-1}$$

1. 2回既知のカベクトルを加えて，各センサの出力を得る
2. カベクトルを並べたものを力行列F,
   センサ出力を並べたものを行列Mとする
3. 力行列の逆行列F^{-1}をMにかければ，行列Gが得られる.
4. **Gの逆行列が望んだ較正行列A**

(復習) 逆行列が使えない場合



$$F_Z = k_1(x_A + x_B + x_C + x_D)$$
$$F_X = k_2((x_A + x_B) - (x_C + x_D))$$
$$F_Z = k_3((x_A + x_C) - (x_B + x_D))$$

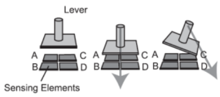
$$3\left\{\begin{bmatrix} F_z \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix}\right. = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2 \\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix} \left.\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}\right\}4$$

3x4行列

一般には正方行列ではない！！
(例)6軸力センサには8つ以上のセンサエレメント内蔵

行列と最小二乗法

本日の疑問



$$3\left\{\begin{bmatrix}F_z\\F_x\\F_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1 & k_1 & k_1 & k_1\\k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2\\k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_A\\x_B\\x_C\\x_D\end{bmatrix}\right\}4$$

3x4行列

•一般には正方行列ではない

•「逆行列」は定義できず，
キャリブレーションもできないのでは

本日の解答

$$3\left\{\begin{bmatrix}F_z\\F_x\\F_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1 & k_1 & k_1 & k_1\\k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2\\k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_A\\x_B\\x_C\\x_D\end{bmatrix}\right\}4$$

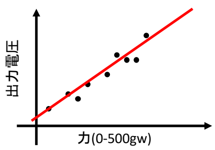
3x4行列

•逆行列は定義できなくても
擬似逆行列(Pseudo Inverse Matrix)
は定義できる.

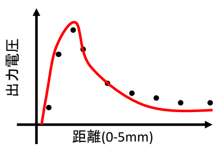
•またこれは最小二乗法という，
工学全体を支える基礎的な考えである.

色々なセンサ

フィルム状力センサ

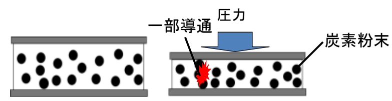


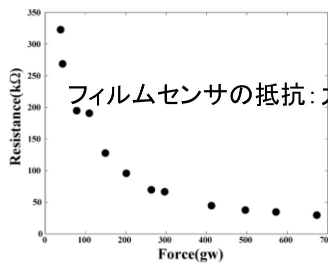
フォトリフレクタを用いた近接距離センサ



いかにして較正曲線を求め，センサとして使えるようにするか？

フィルムセンサの定式化（1）

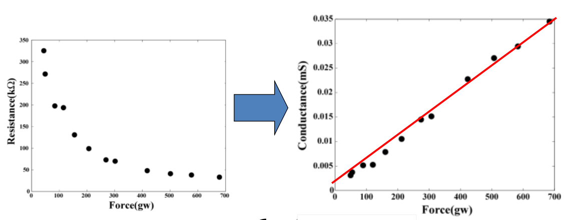




フィルムセンサの抵抗：力に反比例？

フィルムセンサの定式化（2）

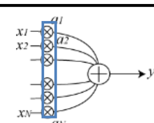
抵抗ではなくコンダクタンス(抵抗の逆数)を見る



$y = ax + b$
- x :
- y :
- a, b :

実験でなじみ深い「直線フィッティング」

一般化



$y = a_1 x + a_2$ から一般化

$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_N x_N$

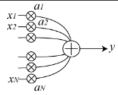
N個の既知入力[$x_1, x_2, \cdots x_N$]と
N個の未知パラメータ[$a_1, a_2, \cdots a_N$]の
積和によって1個の出力 y が決定されるシステム.

目的：N個の未知パラメータ[$a_1, a_2, \cdots a_N$]の同定(identification)

取れる手段：入力の操作と出力の計測

フィルムセンサの場合： $y = a_1 x_1 + a_2 x_2$ where $x_2 = 1$

行列の形にする



$$\boxed{y = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_Nx_N}$$

入力を変化させ，M回の出力を得る

$$y_1 = a_1x_{11} + a_2x_{12} + \cdots a_Nx_{1N}$$
$$y_2 = a_1x_{21} + a_2x_{22} + \cdots a_Nx_{2N}$$
$$\vdots$$
$$y_M = a_1x_{M1} + a_2x_{M2} + \cdots a_Nx_{MN}$$

結局

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xa} \quad \begin{cases} \text{X : MxN行列．入力．既知} \\ \text{y : Mx1ベクトル．出力．観測可能} \\ \text{a : Nx1ベクトル．未知.} \end{cases}$$

もしM=Nなら $\mathbf{a} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{y}$

実際にはM≠NでX^{-1}は存在しないことがほとんど

二乗誤差を最小化する（最小二乗法）

いかにして

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xa} \quad \begin{cases} \text{X : MxN行列．入力．既知} \\ \text{y : Mx1ベクトル．出力．観測可能} \\ \text{a : Nx1ベクトル．未知.} \end{cases}$$

をaについて解くか．

解けない(未知数より方程式の数が多い)

つまり，式を完全に満たすベクトルaは，**無い**

(1)測定された出力ベクトルyが誤差を含んでいると仮定

$\mathbf{y} = \mathbf{Xa} + \mathbf{e}$ where $\mathbf{e} = [e_1, e_2, \cdots e_M]^T$

(2)誤差の大きさが最小となるようなaを もっともらしいaとして受け入れよう．

(3)大きさとして二乗和(二乗ノルム)を採用．

$$\sum_{i=1}^{M} e_i^{\,2} = [e_1, e_2, \cdots e_M][e_1, e_2, \cdots e_M]^T = \mathbf{e}^*\mathbf{e}$$

誤差の「大きさ」

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xa} + \mathbf{e}$$

$$\mathbf{e} =$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_M \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}$$

Tは転置．

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \sum_{i=1}^{M} e_i^{\,2} = [e_1, e_2, \cdots e_M]\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_M \end{bmatrix} = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}$$

$=$

$=$

$=$

$=$

誤差の「大きさ」を最小化する

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} - 2\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{Xa} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Xa}$$

$$\|\mathbf{e}\|^2 = a^2x^2 - 2ayx + y^2$$

誤差の大きさが最小となるaを見つける

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}}\|\mathbf{e}\|^2 = \left[\frac{\partial}{\partial a_1}\|\mathbf{e}\|^2 \quad \frac{\partial}{\partial a_2}\|\mathbf{e}\|^2 \quad \cdots \quad \frac{\partial}{\partial a_N}\|\mathbf{e}\|^2\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}}\|\mathbf{e}\|^2 =$$

$=$

$=$

$=$

$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} =$

$\mathbf{a}^{\mathrm{T}} =$

$\mathbf{a} =$

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(a^2x^2 - 2ayx + y^2\right) = 2x^2a - 2yx = 0$$

$$\because \left((\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left((\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}$$

擬似逆行列

結論：未知パラメータのベクトルaは次の式で求められる．

$$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{\#}\mathbf{y}$$

ただし

$$\mathbf{X}^{\#} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$$

$\mathbf{X}^{\#}$：擬似逆行列(Pseudo Inverse)

擬似逆行列は逆行列の拡張である

行列Xが正則な場合

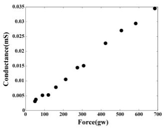
$$\mathbf{X}^{\#} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$$

$=$

$=$

（再考）フィルムセンサの場合

$$y = a_1 x + a_2 \quad \begin{cases} x: \text{力：既知入力} \\ y: \text{コンダクタンス，測定結果} \\ a_1, a_2: \text{未知パラメータ} \end{cases}$$



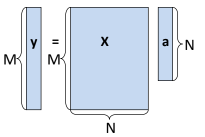
これは

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 \quad \text{where} \quad x_2 = 1$$

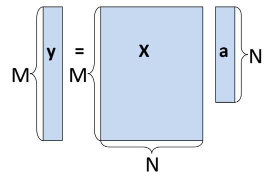
とみなせる．

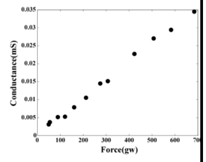
加える力を変え，M回測定する（2回以上）

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1 x_{11} + a_2 1 \\ y_2 &= a_1 x_{21} + a_2 1 \\ &\vdots \\ y_M &= a_1 x_{M1} + a_2 1 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & 1 \\ x_{21} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{M1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$



（再考）フィルムセンサの場合





よって，

$$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{\#}\mathbf{y} \quad \text{where} \quad \mathbf{X}^{\#} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$$

により二つの未知パラメータを求めることが出来る．

26

手作業で求めてみる

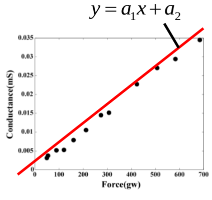
$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{X}^{\#}\mathbf{y} \\ &= (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \\ &= \left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_M \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_M & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_M \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

27

手作業で求めてみる

$$a_1 = \frac{M\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_j}{M\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

$$a_2 = \frac{-\sum x_i \sum x_j y_j + \sum x_i^2 \sum y_j}{M\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$



これは，直線によるフィッティングの公式に他ならない

28

何を最小化したか

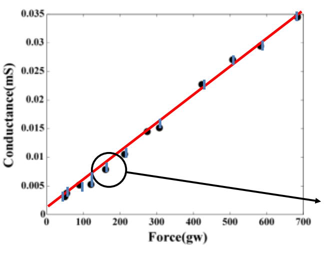
$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{e}$$

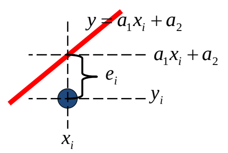
$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{a}$$

$$\boxed{\|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{e}^*\mathbf{e} = \sum_{i=1}^{M} e_i^2}$$

$$y_i = a_1 x_i + a_2 + e_i$$

$$e_i = y_i - a_1 x_i - a_2$$

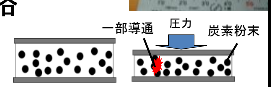




データと直線の，
「y軸に沿った距離」の二乗の和を最小化した．

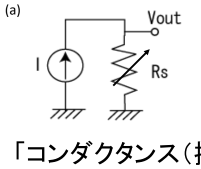
29

（参考）実際の測定回路



- 「抵抗」を測定するなら

(a)



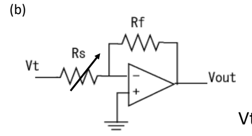
I：定電流源
Vout:出力

Vout = I x Rs

出力電圧は抵抗に比例

- 「コンダクタンス（抵抗の逆数）」を測定するなら

(b)



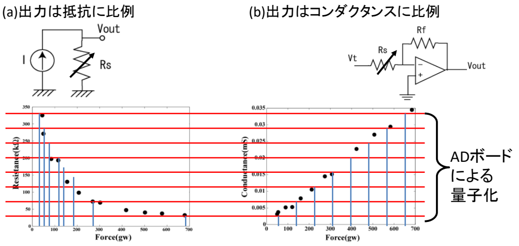
Vt:定電圧源
Rs：フィルムセンサの抵抗
Rf:調整用固定抵抗
これは「反転増幅回路」
Vout = Rf/Rs x Vt

Vtが一定なら出力電圧は抵抗に反比例

「抵抗」を測定して逆数をとればよいのでは？

別にそれでもよい．しかし玄人な理由はある．

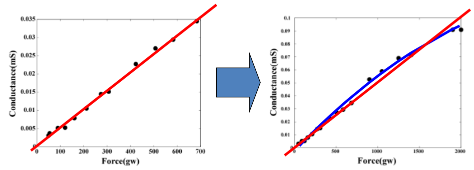
(a)出力は抵抗に比例　(b)出力はコンダクタンスに比例



ADボードによる量子化

- アナログ部による線形化の意義
  ＝ADボードによる量子化の影響を低減
  「ダイナミックレンジを広げる」とも言う．

フィルムセンサを限界性能まで使いきりたい．



直線近似 $y=a_1x+a_2$ではフィッティングできない気が．．．

(直線領域だけで使う，という方針も正しい)

多項式によるフィッティングを試みる．

$y=a_1x+a_2$ ➡ $y=a_1x^2+a_2x+a_3$

$y=a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$

もはや直線フィッティングの公式は使えない．

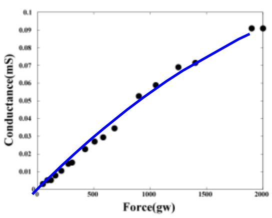
多項式近似

$$y=a_1x^2+a_2x+a_3$$

- x : 力：既知入力
- y : コンダクタンス．測定出力
- $a1, a2, a3$: 未知パラメータ

何度も測定する

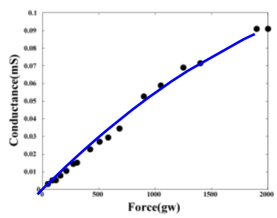
$$y_1=a_1x_1^{\ 2}+a_2x_1+a_3$$
$$y_2=a_1x_2^{\ 2}+a_2x_2+a_3$$
$$\vdots$$
$$y_M=a_1x_M^{\ 2}+a_2x_M+a_3$$



多項式近似

$$y_1=a_1x_1^{\ 2}+a_2x_1+a_3$$
$$y_2=a_1x_2^{\ 2}+a_2x_2+a_3$$
$$\vdots$$
$$y_M=a_1x_M^{\ 2}+a_2x_M+a_3$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{\ 2} & x_1 & 1 \\ x_2^{\ 2} & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_M^{\ 2} & x_M & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$



$\mathbf{y}=\mathbf{Xa}$ の形に出来たので，

$\mathbf{a}=\mathbf{X}^{\#}\mathbf{y}$ where $\mathbf{X}^{\#}=(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$

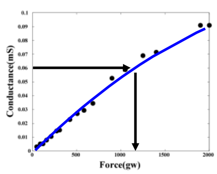
により3つの未知パラメータを求めることが出来る．(計算機のしごと)

元に戻って．．．何をしたかったか

(1) $y=a_1x+a_2$
(2) $y=a_1x^2+a_2x+a_3$
(3) $y=a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$

x : 力：既知の入力
y : コンダクタンス．測定した出力
$a1, \dots, a4$: 未知パラメータ

モデルの未知パラメータを求めるのがゴールではない．
測定出力yから力xを逆算することがゴール．



(1) $x=(y-a_2)/a_1$

(2) $a_1x^2+a_2x+(a_3-y)=0$

$$x=\frac{-a_2\pm\sqrt{a_2^{\ 2}-4a_1(a_3-y)}}{2a_1}$$

(3) $a_1x^3+a_2x^2+a_3x+(a_4-y)=0$

$x=\cdots$ (3次方程式の解の公式)

デモ：Excelでのフィッティング

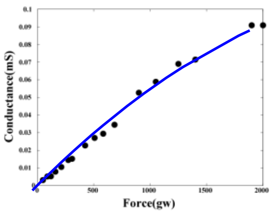
X軸は等間隔でなくて良い
X軸は単調増加でなくて良い

N次多項式だと完璧なフィッティングができてしまうのはなぜか？
（行列の形はどうなるか？）

整数次数の多項式でなくて良い

$$y_1 = a_1 x_1^{1/2} + a_2$$
$$y_2 = a_1 x_2^{1/2} + a_2$$
$$\vdots$$
$$y_M = a_1 x_M^{1/2} + a_M$$

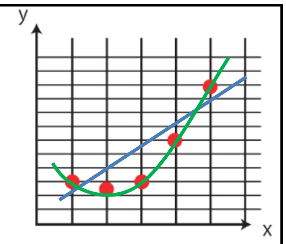
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{1/2} & 1 \\ x_2^{1/2} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_M^{1/2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$



関数であっても良い．たとえばlog(x)など．

37

レポート課題(1)



次のデータ系列に対して，
Scilabを用いて，
(1) 直線による近似，
(2) 2次曲線による近似を適用，
パラメータを求め，
曲線とデータをグラフに描け

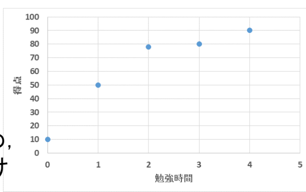
x	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
y	3.0	2.5	3.0	6.0	10.0

なおScilabでは行列Aの擬似逆行列はpinv(A)で直接求めることができる．
当然自分でinv(A'*A)*A'とやっても同じ．

38

レポート課題(2) (余裕のある人)

次のデータ系列に対して，
y=a1 * log(x+1) + a2
を仮定してパラメータを求め，
曲線とデータをグラフに描け



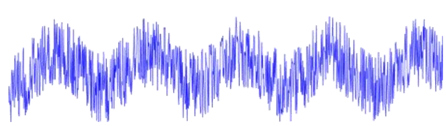
	Aさん	Bさん	Cさん	Dさん	Eさん
X(勉強時間)	3	4	2	0	1
Y(試験の点)	80	90	78	10	45

最小二乗法
事例紹介

最小二乗法事例紹介
(時間の許す限り)

- 直交(同期)検波の最小二乗法による理解
- X線CTの画像再構成
- フォトリフレクタのキャリブレーション

最小二乗法事例(1):直交(同期)検波



問題を定式化

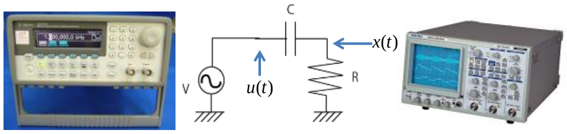
信号f(t)が，

f(t) = Asin(ωt + ϕ) + noise(t)

と仮定できるとする．周波数ωはわかっている．

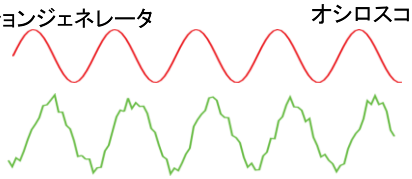
計測データから，振幅Aと，位相ずれϕを求めるには？

応用事例（1）



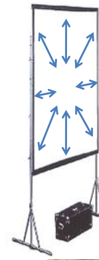
ファンクションジェネレータ

オシロスコープ

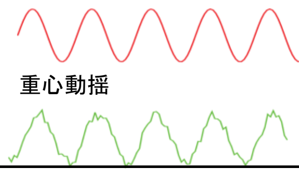


応用事例（2）

オプティカルフローの速度



重心動揺



直交（同期）検波：数式（復習）

信号にsin(ωt)をかけ，積分する（＝内積をとる）

積分時間Tは充分長い.

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(A\sin(\omega t+\phi)+noise(t)\right)\sin(\omega t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T A\sin(\omega t+\phi)\sin(\omega t)dt + \frac{1}{T}\int_0^T noise(t)\sin(\omega t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T A\left(\sin(\omega t)\cos(\phi)+\cos(\omega t)\sin(\phi)\right)\sin(\omega t)dt \\
&= A\cos(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)dt + A\sin(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \sin(\omega t)\cos(\omega t)dt \\
&= A\cos(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}dt \\
&= \frac{A}{2}\cos(\phi)
\end{aligned}
$$

直交（同期）検波：数式（復習）

信号にcos(ωt)をかけ，積分する（＝内積をとる）

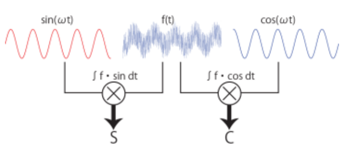
積分時間Tは充分長い.

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(A\sin(\omega t+\phi)+noise(t)\right)\cos(\omega t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T A\sin(\omega t+\phi)\cos(\omega t)dt + \int_0^T noise(t)\cos(\omega t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T A\left(\sin(\omega t)\cos(\phi)+\cos(\omega t)\sin(\phi)\right)\cos(\omega t)dt \\
&= A\cos(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \sin(\omega t)\cos(\omega t)dt + A\sin(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)dt \\
&= A\sin(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1+\cos(2\omega t)}{2}dt \\
&= \frac{A}{2}\sin(\phi)
\end{aligned}
$$

直交（同期）検波：数式（復習）

$$S = \frac{A}{2}\cos(\phi)$$

$$C = \frac{A}{2}\sin(\phi)$$



位相差

$$\frac{C}{S} = \tan(\phi)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{C}{S}\right)$$

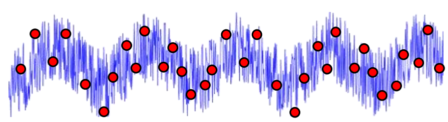
振幅

$$S^2 + C^2 = \frac{A^2}{4}\left(\cos^2(\phi)+\sin^2(\phi)\right) = \frac{A^2}{4}$$

$$A = 2\sqrt{S^2+C^2}$$

ノイズに埋もれた信号から位相差と振幅が求まった

最小二乗法で理解する



離散的に取り込まれるデータは次の形をしていると仮定

ただし周波数ωは既知.

得られたデータ[y1,y2,...,yN]から，振幅Aと位相φを求める.

最小二乗法で理解する

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} =$$

$$=$$

$$=$$

これにより，行列の形，$\mathbf{y} = \mathbf{Xa}$ に変形することが出来た．

最小二乗法で理解する

$$\begin{bmatrix} A\cos(\phi) \\ A\sin(\phi) \end{bmatrix} = \mathbf{a} = \mathbf{X}^{\#}\mathbf{y} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \sin(\omega t_1) & \cdots & \sin(\omega t_N) \\ \cos(\omega t_1) & \cdots & \cos(\omega t_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\omega t_1) & \cos(\omega t_1) \\ \vdots & \vdots \\ \sin(\omega t_N) & \cos(\omega t_N) \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \sin(\omega t_1) & \cdots & \sin(\omega t_N) \\ \cos(\omega t_1) & \cdots & \cos(\omega t_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\propto$$

残る

ほぼ消える
（適切なNで完全に0）

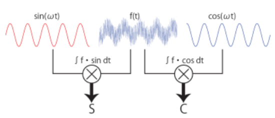
最小二乗法で理解する

$$\begin{bmatrix} A\cos(\phi) \\ A\sin(\phi) \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} \sin(\omega t_i) y_i \\ \sum_{i=1}^{N} \cos(\omega t_i) y_i \end{bmatrix}$$

つまり，元信号y(t)に
- cos(ωt)をかけて積分したものと，
- sin(ωt)をかけて積分したもの

によって，振幅と位相を求めることができる．

これはこれまでの数式的理解と全く同一．



最小二乗法事例(2)：CT

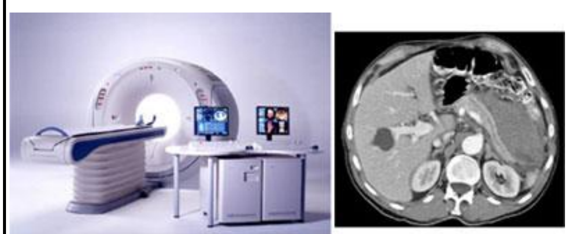
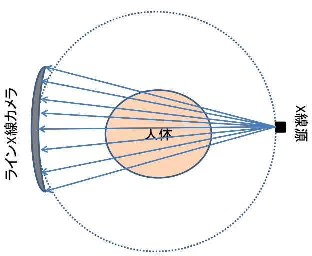


図1．X線CTと画像例

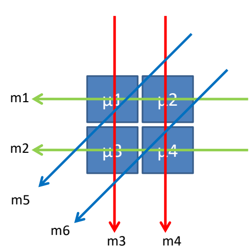
CT:Computational Tomography: 計算による断層撮影
周囲からの計測により，断面／3D形状を再構成

X線CT



- 体内を貫通したX線をライン状カメラで検出＝射影
- 装置自体を回転することで，射影データを一周分取得

（参考）X線CT

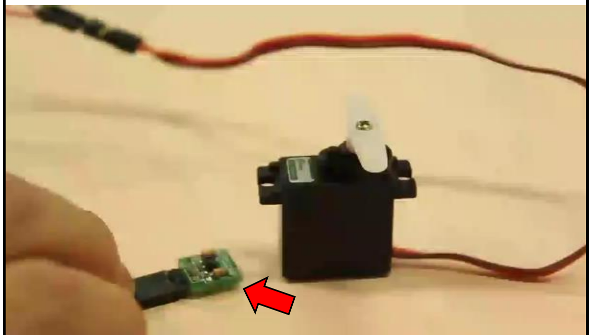


- m1=μ1+μ2
- m2=μ3+μ4
- m3=μ1+μ3
- m4=μ2+μ4
- m5=μ1+(μ2+ μ3)/2
- m6=μ4+(μ2+ μ3)/2

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{bmatrix}$$

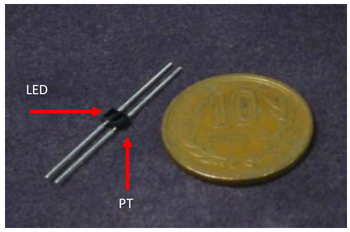
- 人体が4ブロックに分かれていたとする．
- それぞれX線を吸収する能力（線減衰係数）が異なる．
μ1～μ4とする（未知数）
- 多方向から観測，連立方程式⇒行列⇒擬似逆行列⇒μ1～4を取得

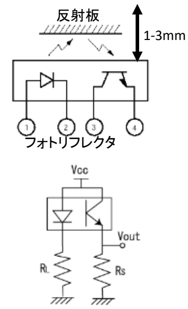
最小二乗法事例(3)
フォトリフレクタを用いた近接距離計の較正



https://www.youtube.com/watch?v=hpYOIEcqnH4

フォトリフレクタを用いた近接距離計の較正

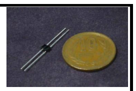


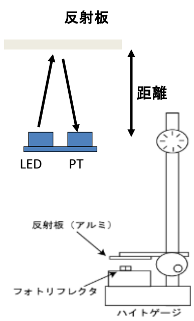


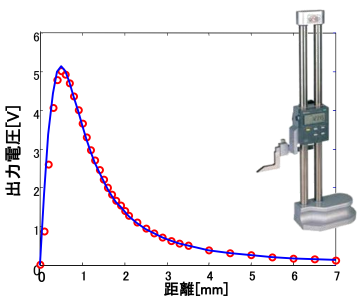
出力電圧は反射光量に比例.
出力電圧から反射板との距離を得たい.

56

測定

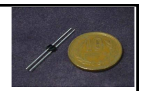


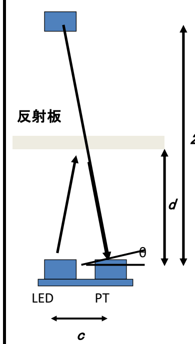




いかにして較正曲線を求め，センサとして使えるようにするか？57

モデル化（1）





反射板を鏡面とみなし，LEDの“像”からPTへの光路を考える.

LEDを点光源とすると，PTの受光量はLED像からみたPTの立体角Ωに比例.

LED像とPTの距離：

$$l=\sqrt{c^2+(2d)^2}$$

PTの立体角：

$$\Omega=\frac{\cos\theta}{l^2}\Delta S \qquad \Delta S：\text{PTの表面積}$$

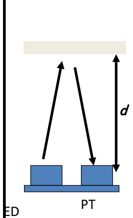
$$\cdots=\frac{k_1 d}{(d^2+k_2)^{3/2}} \qquad k_1, k_2：\text{定数}$$

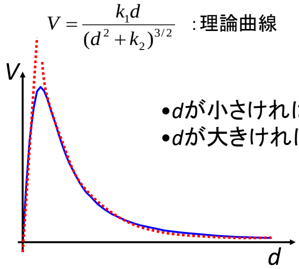
58

モデル化（2）

PTの受光量が立体角Ωに比例するから，出力電圧も同様.

$$V=\frac{k_1 d}{(d^2+k_2)^{3/2}} \quad ：\text{理論曲線}$$



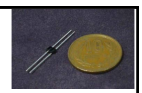


- *d*が小さければ*V*は*d*に比例
- *d*が大きければ$1/d^2$に比例

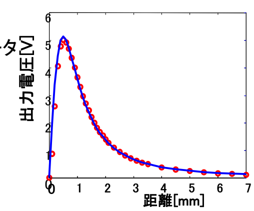
未知パラメータk_1, k_2を求めれば
入出力関係が記述できる

59

フィッティングの準備



$$V=\frac{k_1 d}{(d^2+k_2)^{3/2}} \quad \left\{\begin{array}{l} d：\text{入力(距離)} \\ V：\text{出力（電圧）} \\ k_1, k_2：\text{未知パラメータ} \end{array}\right.$$



変形（線形化）

$$V^{2/3}(d^2+k_2)=k_1^{2/3}d^{2/3}$$

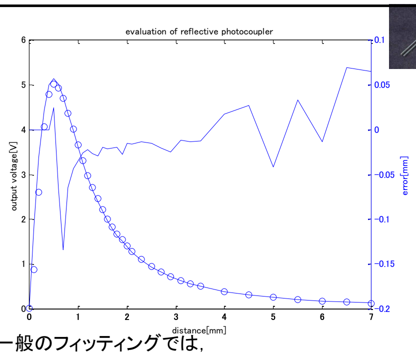
$$V^{2/3}d^2=k_1^{2/3}d^{2/3}-V^{2/3}k_2$$

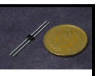
$$\left.\begin{array}{r} V^{2/3}d^2=y \\ k_1^{2/3}=a_1 \\ d^{2/3}=x_1 \\ -V^{2/3}=x_2 \\ k_2=a_2 \end{array}\right\} \text{と置けば}$$

$$y=a_1x_1+a_2x_2$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1, x_2, y：\text{既知} \\ a_1, a_2：\text{未知} \end{array}\right.$$

最小二乗法によって
パラメータを同定できる. 60





つまり，一般のフィッティングでは，
（1）数式によるモデル化
（2）最小二乗の形に使えるための変形
が必要．この時の最小二乗誤差は多くの場合当初の意味を失う．

81