インタラクティブシステム論
第10回

梶本裕之
Twitter ID kajimoto
ハッシュタグ #ninshiki

日程

4/14イントロダクション
4/21 フーリエ変換
4/28フーリエ変換と線形システム
5/5 こどもの日
5/12 出張により休講
5/19 信号処理の基礎
5/26 信号処理応用1（相関）
6/2 信号処理応用2（画像処理)
6/09 中間確認テスト
6/16 ラプラス変換
6/23 出張により休講
6/30 古典制御の基礎
7/7 インタラクティブシステムの実際（小泉先生）
7/14 行列
7/21 行列と最小二乗法
7/28 出張により休講
8/4 ロボティクス
8/11(要確認)期末テスト

行列

行列．．．１，２年でやったはず

今日の内容

●固有値とは，固有ベクトルとは
●行列の対角化：なにをしたことになるか，なぜうれしいのか
●情報理論・制御における行列の応用事例

キーワードは，
固有値，固有ベクトル，対角化

行列：データ列を変換するもの

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

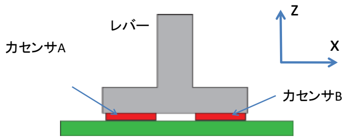
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

（例1）
y:観測データ，A:システムの性質，x:媒介変数

（例2）
y:フーリエ空間での周波数成分，A:フーリエ変換行列，
x:実空間でのデータ系列

（例）2軸力センサ

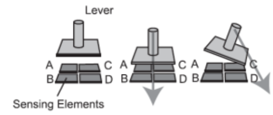
(例)2軸力センサ



$$F_Z = x_A + x_B$$
$$F_X = k(x_A - x_B)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}F_Z\\F_X\end{bmatrix}}_{\text{2x1ベクトル}} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\k & -k\end{bmatrix}}_{\text{2x2行列}}\underbrace{\begin{bmatrix}x_A\\x_B\end{bmatrix}}_{\text{2x1ベクトル}}$$

(例)多軸力センサ



$$F_Z = k_1(x_A + x_B + x_C + x_D)$$
$$F_X = k_2((x_A + x_B) - (x_C + x_D))$$
$$F_Y = k_3((x_A + x_C) - (x_B + x_D))$$

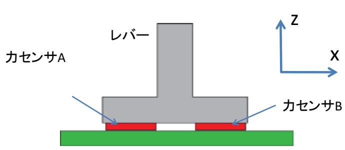
$$3\left\{\begin{bmatrix}F_z\\F_x\\F_y\end{bmatrix}\right. = \underbrace{\begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}}_{\text{3x4行列}}\left.\begin{bmatrix}x_A\\x_B\\x_C\\x_D\end{bmatrix}\right\}4$$

一般には正方行列ではない！！
(例)6軸力センサには8つ以上のセンサエレメント内蔵

ロボットの力／トルク制御

6軸力センサによるフィードバック

力センサのキャリブレーション(較正)

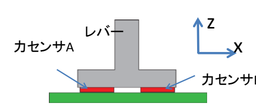


$$F_Z = k_1x_A + k_2x_B$$
$$F_X = k_3x_A + k_4x_B$$

$$\begin{bmatrix}F_Z\\F_X\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}k_1 & k_2\\k_3 & k_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_A\\x_B\end{bmatrix}$$

k1～k4のパラメータは元々未知.
これを求めなければ使えない！！

逆行列



$$\begin{bmatrix}F_Z\\F_X\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}k_1 & k_2\\k_3 & k_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_A\\x_B\end{bmatrix}$$

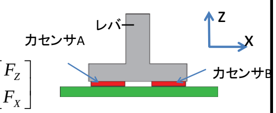
これを $\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ と書く.

ここで,
「ある力を加えたときの各センサ出力は？」
という逆の関係を考える.

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{G}\mathbf{f} \qquad \begin{bmatrix}x_A\\x_B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}g_1 & g_2\\g_3 & g_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_Z\\F_X\end{bmatrix}$$

逆行列の「測定」

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{f} \qquad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$



(1) Fz=1，Fx=0の力を加え，各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \qquad = \qquad$$

各センサの出力に，逆行列の成分g1，g3が現れる！

(2) Fz=0,Fx=1の力を加え，各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \qquad = \qquad$$

各センサの出力に，逆行列の成分g2，g4が現れる！

逆行列の「測定」

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} \qquad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

G=A⁻¹の成分，g1～g4が得られたので，
その逆行列を計算すればAが得られる.

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

まとめると,

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 \\ g_4 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}$$

行列に単位行列をかけたことに相当

単位力でなくて良い

1回目の入力　1回目の出力

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{z1} & f_{z2} \\ f_{x1} & f_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix}$$

2回目の入力　2回目の出力

$$\mathbf{G}\mathbf{F} = \mathbf{M}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{M}\mathbf{F}^{-1}$$

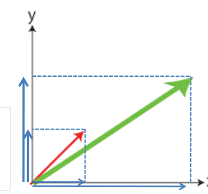
1. 2回**既知の**力ベクトルを加えて，各センサの出力を得る
2. 力ベクトルを並べたものを力行列**F**,
   センサ出力を並べたものを行列**M**とする
3. 力行列の逆行列**F⁻¹**を**M**にかければ，行列**G**が得られる.
4. **Gの逆行列が望んだ「較正行列」A**

ほとんどすべての行列は,
ベクトルを「引き延ばす」ものである（1）

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u} \qquad \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ の時,

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} =$$



（作用）x軸成分を3倍，y軸成分を2倍に引き延ばす

ほとんどすべての行列は,
ベクトルを「引き延ばす」ものである（1）

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

（作用）x軸成分を3倍，y軸成分を2倍に引き延ばす

ほとんどすべての行列は,
ベクトルを「引き延ばす」ものである（2）

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ は，x軸成分を3倍，y軸成分を2倍に引き延ばす

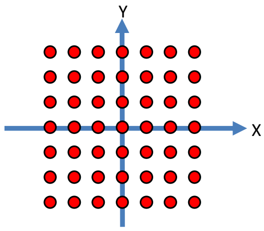
では,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$ の時は？．．．．よく分からない.

試してみる

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$ で，平面上の点群はどう移動するか

X=-3～3，Y=-3～3の点群で検証

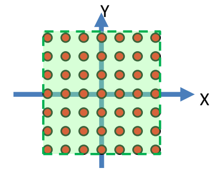


Scilabコード

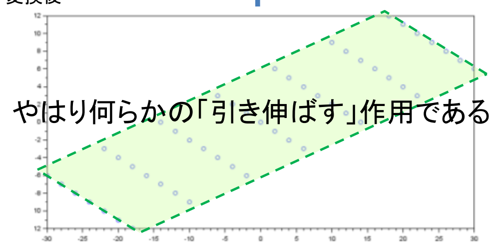
```
A=[8,-2;3,1];
s=[];
t=[];
for x=-3:3
    for y=-3:3
        r=A*[x;y];
        s=[s,r(1)]; //x座標格納
        t=[t,r(2)]; //y座標格納
    end
end
plot(s,t,'o');
```

試してみる

変換前



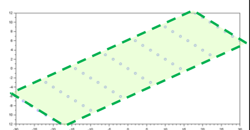
変換後



やはり何らかの「引き伸ばす」作用である

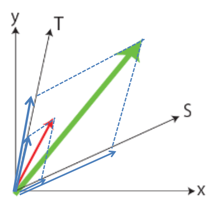
ほとんどすべての行列は，ベクトルを「引き延ばす」ものである（2）

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$ の作用は



●謎のS軸成分をs倍，
●謎のT軸成分をt倍
に引き延ばすことである

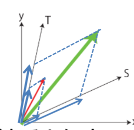
ただしもはや，
このS,T軸は直交していない．



固有ベクトルと固有値

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

固有ベクトル，固有値とは，
謎のS，T軸，およびs,t倍
のことである．



（求める手続き）
(1) λ倍されるだけで方向不変のベクトルがあると仮定

$$\mathbf{A}\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}$$

(2) 式変形

$$\mathbf{A}\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}=\lambda\mathbf{I}\mathbf{u}$$
$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{u}=\mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix}8-\lambda & -2\\ 3 & 1-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}=0$$

固有ベクトルと固有値

$$\begin{bmatrix}8-\lambda & -2\\ 3 & 1-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}=0$$

$$(a-\lambda)u_x+bu_y=0 \Longrightarrow u_y=-(a-\lambda)u_x/b$$
$$cu_x+(d-\lambda)u_y=0$$

$$cu_x-(d-\lambda)(a-\lambda)u_x/b=0$$
$$\big((a-\lambda)(d-\lambda)-bc\big)u_x=0$$

$$\therefore (a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0$$

この解λ1，λ2を固有値と呼び，
対応するベクトルを固有ベクトルと呼ぶ．

固有ベクトルと固有値

$$\begin{bmatrix}8-\lambda & -2\\ 3 & 1-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}=0$$

$\lambda_1=2$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix}8-2 & -2\\ 3 & 1-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}=0$$

大きさを1とすれば， $k=1/\sqrt{10}$

$\lambda_2=7$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix}8-7 & -2\\ 3 & 1-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}=0$$

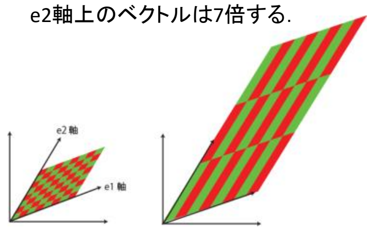
大きさを1とすれば， $k=1/\sqrt{5}$

作用：e1軸上のベクトルは2倍，
e2軸上のベクトルは7倍する．

固有ベクトルと固有値

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

作用：e1軸上のベクトルは2倍，
　　　e2軸上のベクトルは7倍する．

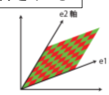


•やはり引き延ばす作用である
•固有ベクトル上のベクトルは，固有値倍される

行列と座標変換

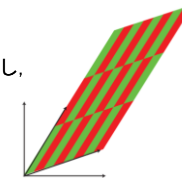
•引き延ばす作用である
•固有ベクトル上のベクトルは，固有値倍される

わかりにくい．．．



行列の作用を，

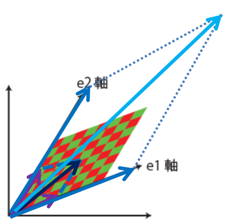
（1）引き延ばし軸での成分表示に変換し，
（2）各成分を引き延ばし，
（3）合成して元に戻す



ように分解すればわかりやすいはず？？

まとめると

行列Tの作用は次の3段階に分解できる．
（1）引き延ばし軸での成分表示に変換し，
（2）各成分を引き延ばし，
（3）合成して元に戻す



（3）合成して元に戻す操作，から考える

行列の作用を，
（1）引き延ばし軸での成分表示に変換し，
（2）各成分を引き延ばし，
（3）合成して元に戻す

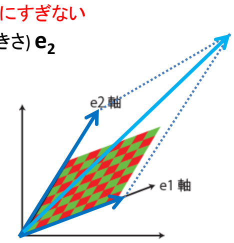
この操作は単なるベクトルの足し算にすぎない

(e_1成分の大きさ) $\mathbf{e}_1$＋(e_2成分の大きさ) $\mathbf{e}_2$

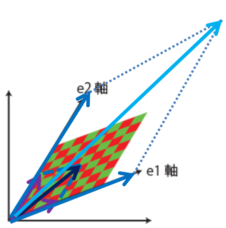
$$=\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1\text{軸成分}\\ \mathbf{e}_2\text{軸成分}\end{bmatrix}$$

$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{bmatrix}$ とおいて

$$=\mathbf{P}\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1\text{軸成分}\\ \mathbf{e}_2\text{軸成分}\end{bmatrix}$$



行列Tの作用は次の3段階に分解できる．
（1）引き延ばし軸での成分表示に変換し，
（2）各成分を引き延ばし，
（3）合成して元に戻す

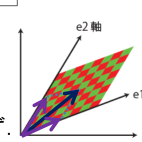


（1）引き延ばし軸での成分表示

行列の作用を，
（1）引き延ばし軸での成分表示に変換し，
（2）各成分を引き延ばし，
（3）合成して元に戻す

（3）「合成」が，

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1\text{軸成分}\\ \mathbf{e}_2\text{軸成分}\end{bmatrix}$$

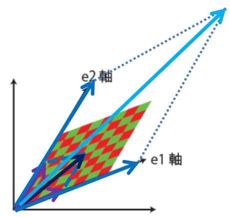


で出来るのだから，（1）はその逆のはず．
すなわち

$$\mathbf{P}^{-1}\begin{bmatrix}x\text{軸成分}\\ y\text{軸成分}\end{bmatrix}$$

により**引き延ばし軸での成分表示**ができる

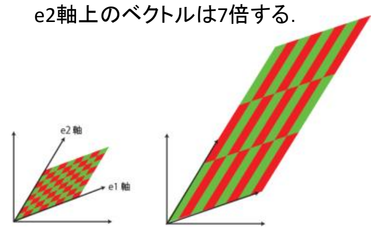
行列Tの作用は次の3段階に分解できる.
（1）引き延ばし軸での成分表示に変換し,
（2）各成分を引き延ばし,
（3）合成して元に戻す



固有ベクトルと固有値（再）

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

作用：e1軸上のベクトルは2倍,
e2軸上のベクトルは7倍する.



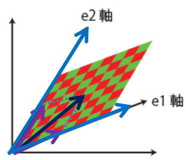
- やはり引き延ばす作用である
- 固有ベクトル上のベクトルが，固有値倍される

（2）引き延ばし軸での引き延ばし

行列の作用を,
（1）引き延ばし軸での成分表示に変換し,
（2）各成分を引き延ばし,
（3）合成して元に戻す

各成分を
固有ベクトル$\mathbf{e}_1$軸に沿って固有値λ_1倍,
固有ベクトル$\mathbf{e}_2$軸に沿って固有値λ_2倍する.

この操作は,

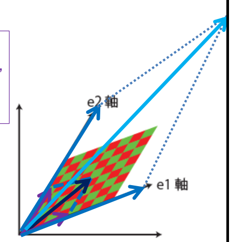


$$\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1\text{軸成分を}\lambda_1\text{倍}\\ \mathbf{e}_2\text{軸成分を}\lambda_1\text{倍}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1\text{軸成分}\\ \mathbf{e}_2\text{軸成分}\end{bmatrix}$$

まとめると

行列Tの作用は次の3段階に分解できる.
（1）引き延ばし軸での成分表示に変換し,
（2）各成分を引き延ばし,
（3）合成して元に戻す

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{P}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_0\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$$



固有値を対角成分に並べた行列をTと置く. $\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_0\end{bmatrix}$

$$\mathbf{Ax}=$$

行列の対角化を数式で導出

行列の対角化を数式で導出する。
まず、2つの固有値をλ1、λ2、固有ベクトルをe1,e2とする。

2つの式を「まとめて」書くと次のようになる。

[e1,e2]をP、固有値を対角成分に持つ行列をTと書き、左辺のPを右辺に移項すると

（こちらのほうが簡単！
この式が持つ意味は前述のとおり）

レポート課題（1）

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & -3\\ 1 & 7\end{bmatrix}$$

の作用について，xy平面上の点群（X=-3〜3，Y=-3〜3）がどのように移動するか，例と同様に試してみること

またこの移動が，固有ベクトル，固有値の観点から妥当であることを確認すること

重要な応用：$\mathbf{A}^n$

$$\mathbf{A}^n\mathbf{x} = \left(\mathbf{PTP}^{-1}\right)^n\mathbf{x}$$
$$= \mathbf{PT}\underline{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}}\mathbf{T}\underline{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}}\mathbf{TP}^{-1}\cdots\mathbf{PTP}^{-1}\mathbf{x}$$
$$= \mathbf{PT}^n\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$$
$$= \mathbf{P}\begin{bmatrix}\lambda_1^{\,n} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\,n}\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$$

$$\because \mathbf{T}^n = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1^{\,n} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\,n}\end{bmatrix}$$

行列のn乗を簡単に計算することができる

重要な結論：nが非常に大きくなった時の$\mathbf{A}^n$

$$\mathbf{A}^n\mathbf{x} = \mathbf{P}\begin{bmatrix}\lambda_1^{\,n} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\,n}\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$$

行列の固有値λの絶対値が引き延ばしの倍率だから，

固有値が

- 一つでも1より大きければ，A^nは**発散**する
- 全て1より小さければ，A^nは0に収束する

例：$\mathbf{A}^n$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}8 & -2 \\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix}8 & -2 \\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & -2 \\ 3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}58 & -18 \\ 27 & -5\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix}8 & -2 \\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & -2 \\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & -2 \\ 3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}58 & -18 \\ 27 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & -2 \\ 3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}410 & -134 \\ 201 & -59\end{bmatrix}$$

$P = \begin{bmatrix}1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{5} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{5}\end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 7$ を代入して，

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{PT}^3\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix}1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{5} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^3 & 0 \\ 0 & 7^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{5} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{5}\end{bmatrix}^{-1}$$
$$= \cdots = \begin{bmatrix}410 & -134 \\ 201 & -59\end{bmatrix}$$

固有値が大きいのでどんどん大きくなる

ほとんどすべての行列は，ベクトルを「引き延ばす」ものである（3）

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

の時は？．．．．**回転**と習ったはず

以前と同様に固有値と固有ベクトルを求めてみる．

$$\begin{bmatrix}\cos\theta-\lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x \\ u_y\end{bmatrix} = 0$$
$$(a-\lambda)(d-\lambda)-bc = 0$$
$$(\cos\theta-\lambda)(\cos\theta-\lambda)+\sin^2\theta = 0$$

回転行列の固有値＝exp(jθ)

$$(\cos\theta-\lambda)(\cos\theta-\lambda)+\sin^2\theta = 0$$
$$\cos^2\theta - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2 + \sin^2\theta = 0$$
$$\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2}$$
$$= \frac{2\cos\theta \pm j\sqrt{4\sin^2\theta}}{2}$$
$$= \cos\theta \pm j\sin\theta$$
$$= \exp(\pm j\theta)$$

回転行列の固有ベクトル

$\cos\theta + j\sin\theta$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix}\cos\theta-\lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x \\ u_y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta-\cos\theta-j\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta-\cos\theta-j\sin\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x \\ u_y\end{bmatrix}$$
$$= \sin\theta\begin{bmatrix}-j & -1 \\ 1 & -j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x \\ u_y\end{bmatrix} = 0$$

$\therefore u_x = ju_y$ $\quad \mathbf{e}_1 = k\begin{bmatrix}j \\ 1\end{bmatrix}$ 大きさを1とすれば例えば，$k = 1/\sqrt{2}$

$\cos\theta - j\sin\theta$ に対応する固有ベクトルは

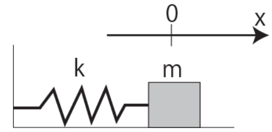
$\mathbf{e}_2 = k\begin{bmatrix}1 \\ j\end{bmatrix}$ 大きさを1とすれば例えば，$k = 1/\sqrt{2}$

（参考）
回転行列も（拡張された）引き延ばしである

- 一般の行列は，固有値，固有ベクトル共に複素数．
- x,y軸に加えて，複素軸も含めた4次元空間中でこれまでと同様の引き延ばしを行う演算とみなせる．
- 複素固有値の絶対値が引き延ばし倍率，偏角が回転角度を表す．

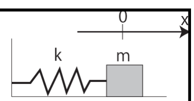
制御における行列

おもりの挙動をシミュレートしたい




```
m=1.0;   //重さ
k=1.0;   //ばね定数
x=1.0;   //初期位置
v=0;     //初期速度
dt=0.1;  //時間刻み
record=[];//記録用
for time= 0:dt:10       //時刻
    F=-k*x;             //ばねによって生じる力
    a=F/m;              //生じる加速度
    v= v+a*dt;          //速度
    x= x+v*dt;          //位置
    record = [record,x]; //記録（※テクニック：ベクトルが伸びていく）
end
plot([0:dt:10],record);
```

制御における行列



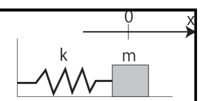

```
for time= 0:dt:10       //時刻
    F=-k*x;             //ばねによって生じる力
    a=F/m;              //生じる加速度
    v= v+a*dt;          //速度
    x= x+v*dt;          //位置
end
```

位置，速度，加速度を並べた「状態ベクトル」xを定義 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ v \\ a \end{bmatrix}$

上の関係から，dt時間後の新たな位置，速度，加速度は

$$\begin{bmatrix} x_n \\ v_n \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ v_{n-1} \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{Ax}$$

制御における行列



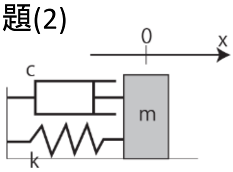
Scilabコード

```
m=1.0;   //重さ
k=1.0;   //ばね定数
x=1.0;   //初期位置
v=0;     //初期速度
a=-k/m*x; //初期加速度
dt=0.01;  //時間刻み
record=[];//記録用

state=[x;v;a];

A=[1,dt,0;0,1,dt;-k/m,0,0];

for time= 0:dt:10  //時刻
  state= A*state;
  record = [record,state(1)];
end

plot([0:dt:10],record);
```

$$\begin{bmatrix} x_n \\ v_n \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & dt & 0 \\ 0 & 1 & dt \\ -k/m & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ v_{n-1} \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{Ax}_{n-1} = \cdots = \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0$$

- 行列Aのn乗を使えば，n時刻先の状態をシミュレート可能
- 行列Aの固有値を見れば，システムが将来(n=∞)収束するか発散するか予測可能！

レポート課題(2)



●ダンパを加えた際の行列を考え，
同様のシミレーションプログラムを書け

●行列Aの固有値の絶対値が1よりも小さいこと，
すなわち位置が収束することを確認し，コメントに記せ
（Scilabでは固有値はspec()で求められる）

注意：ここで導入した行列はあくまで導入編用で，シミュレーションとしては不正確です．