

インタラクティブシステム論 第11回

梶本裕之

Twitter ID kajimoto
ハッシュタグ #ninshiki

日程

4/14イントロダクション
4/21 フーリエ変換
4/28フーリエ変換と線形システム
5/5 こどもの日
5/12 出張により休講
5/19 信号処理の基礎
5/26 信号処理応用1(相關)
6/2 信号処理応用2(画像処理)
6/09 中間確認テスト
6/16 ラプラス変換
6/23 出張により休講
6/30 古典制御の基礎
7/7 インタラクティブシステムの実際(小泉先生)
7/14 行列
7/21 行列と最小二乗法
7/28 出張により休講
8/4 ロボティクス
8/11(要確認)期末テスト

行列復習

(センシングに現れる行列・逆行列)

(復習)行列: データ列を変換するもの

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

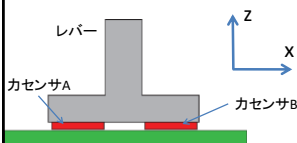
(例1)

y:観測データ, A:システムの性質, x:媒介変数

(例2)

y:フーリエ空間での周波数成分, A:フーリエ変換行列,
x:実空間でのデータ系列

(復習) (例)2軸力センサ



$$F_Z = x_A + x_B$$

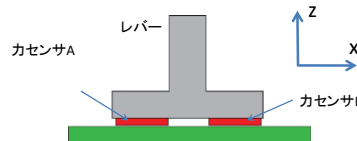
$$F_X = k(x_A - x_B)$$



$$2 \times 1 \text{ベクトル} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} \quad 2 \times 1 \text{ベクトル}$$

2x2行列

(復習) カセンサのキャリブレーション(校正)



$$F_Z = k_1 x_A + k_2 x_B$$

$$F_X = k_3 x_A + k_4 x_B$$

$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

k1~k4のパラメータは元々未知。
これを求めなければ使えない！！

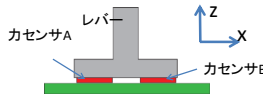
(復習) 逆行列

$$\begin{bmatrix} F_z \\ F_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

これを $\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ と書く。

ここで、
「ある力を加えたときの各センサ出力は？」
という逆の関係を考える。

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{G}\mathbf{f} \quad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_z \\ F_x \end{bmatrix}$$



(復習) 逆行列の測定

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{f} \quad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_z \\ F_x \end{bmatrix}$$

(1) $F_z=1, F_x=0$ の力を加え、各センサの出力を記録

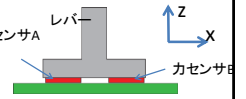
$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

各センサの出力に、逆行列の成分 g_1, g_3 が現れる！

(2) $F_z=0, F_x=1$ の力を加え、各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 \\ g_4 \end{bmatrix}$$

各センサの出力に、逆行列の成分 g_2, g_4 が現れる！



(復習) 逆行列の測定

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} \quad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_z \\ F_x \end{bmatrix}$$

$\mathbf{G}=\mathbf{A}^{-1}$ の成分、 $g_1 \sim g_4$ が得られたので、
その逆行列を計算すれば \mathbf{A} が得られる。

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

まとめると、

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}$$

行列に単位行列をかけたことに相当



(復習) 単位力でなくて良い

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{z1} \\ f_{x1} \\ f_{z2} \\ f_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

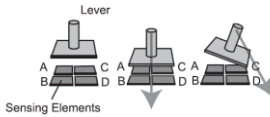
$$\mathbf{G}\mathbf{F} = \mathbf{M}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{M}\mathbf{F}^{-1}$$

- 2回既知のカベクトルを加えて、各センサの出力を得る
- カベクトルを並べたものを力行列 \mathbf{F} 、センサ出力を並べたものを行列 \mathbf{M} とする
- 力行列の逆行列 \mathbf{F}^{-1} を \mathbf{M} にかければ、行列 \mathbf{G} が得られる。
- \mathbf{G} の逆行列が望んだ較正行列 \mathbf{A}



(復習) 逆行列が使えない場合



$$\begin{aligned} F_z &= k_1(x_A + x_B + x_C + x_D) \\ F_x &= k_2((x_A + x_B) - (x_C + x_D)) \\ F_y &= k_3((x_A + x_C) - (x_B + x_D)) \end{aligned}$$

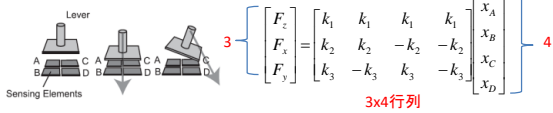
$$\begin{bmatrix} F_z \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2 \\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}$$

一般には正方行列ではない！！
(例) 6軸力センサには8つ以上のセンサエレメント内蔵



行列と最小二乗法

本日の疑問



- 一般には正方行列ではない
- 「逆行列」は定義できず、キャリブレーションもできないのでは

本日の解答

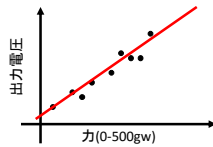
$$3 \begin{bmatrix} F_z \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2 \\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix} \quad 4$$

3x4行列

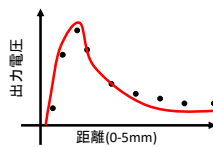
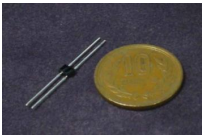
- 逆行列は定義できなくても擬似逆行列(Pseudo Inverse Matrix)は定義できる.
- またこれは最小二乗法という、工学全体を支える基礎的な考えである.

色々なセンサ

フィルム状カセンサ

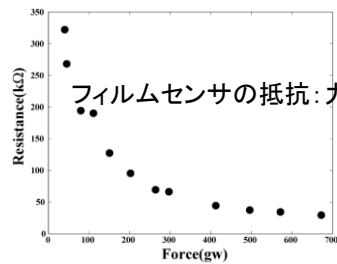
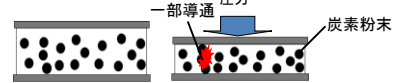


フォトリフレクタを用いた近接距離センサ



いかにして較正曲線を求め、センサとして使えるようにするか?

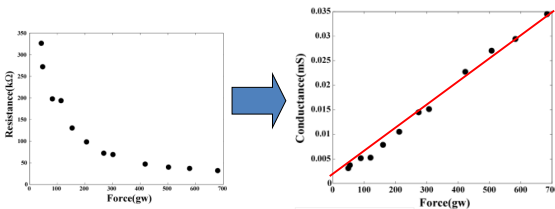
フィルムセンサの定式化(1)



フィルムセンサの抵抗: 力に反比例?

フィルムセンサの定式化(2)

抵抗ではなくコンダクタンス(抵抗の逆数)を見る



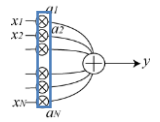
$$y = ax + b \quad \begin{cases} x: \\ y: \\ a, b: \end{cases}$$

実験でなじみ深い「直線フィッティング」

一般化

$y = a_1x + a_2$ から一般化

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_Nx_N$$



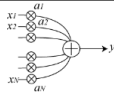
N個の既知入力 $[x_1, x_2, \dots, x_N]$ と
 N個の未知パラメータ $[a_1, a_2, \dots, a_N]$ の
 積和によって1個の出力 y が決定されるシステム.

目的: N個の未知パラメータ $[a_1, a_2, \dots, a_N]$ の同定 (identification)
 取れる手段: 入力操作と出力の計測

フィルムセンサの場合: $y = a_1x_1 + a_2x_2$ where $x_2 = 1$

行列の形にする

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_Nx_N$$



入力を変化させ、M回の出力を得る

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1x_{11} + a_2x_{12} + \dots + a_Nx_{1N} \\ y_2 &= a_1x_{21} + a_2x_{22} + \dots + a_Nx_{2N} \\ &\vdots \\ y_M &= a_1x_{M1} + a_2x_{M2} + \dots + a_Nx_{MN} \end{aligned}$$

結局

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} \quad \begin{cases} \mathbf{X}: M \times N \text{ 行列. 入力. 既知} \\ \mathbf{y}: M \times 1 \text{ ベクトル. 出力. 観測可能} \\ \mathbf{a}: N \times 1 \text{ ベクトル. 未知.} \end{cases}$$

もし $M=N$ なら

$$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{y}$$

実際には $M \neq N$ で \mathbf{X}^{-1} は存在しないことがほとんど

二乗誤差を最小化する(最小二乗法)

いかにして

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} \quad \begin{cases} \mathbf{X}: M \times N \text{ 行列. 入力. 既知} \\ \mathbf{y}: M \times 1 \text{ ベクトル. 出力. 観測可能} \\ \mathbf{a}: N \times 1 \text{ ベクトル. 未知.} \end{cases}$$

を \mathbf{a} について解くか.

解けない(未知数より方程式の数が多い)

つまり、式を完全に満たすベクトル \mathbf{a} は、**無い**

(1) 測定された出力ベクトル \mathbf{y} が誤差を含んでいると仮定
 $\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{e}$ where $\mathbf{e} = [e_1, e_2, \dots, e_M]^T$

(2) 誤差の大きさが最小となるような \mathbf{a} を
 もっともらしい \mathbf{a} として受け入れよう。

(3) 大きさとして二乗和(二乗ノルム)を採用。

$$\sum_{i=1}^M e_i^2 = [e_1, e_2, \dots, e_M] [e_1, e_2, \dots, e_M]^T = \mathbf{e}^* \mathbf{e}$$

誤差の「大きさ」

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{e}$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_M \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{e}^T \mathbf{e} \quad \text{Tは転置.}$$

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \sum_{i=1}^M e_i^2 = [e_1, e_2, \dots, e_M] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_M \end{bmatrix} = \mathbf{e}^T \mathbf{e}$$

誤差の「大きさ」を最小化する

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - 2\mathbf{y}^T \mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{a}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{a} \quad \|\mathbf{e}\|^2 = a^2x^2 - 2ayx + y^2$$

誤差の大きさが最小となる \mathbf{a} を見つける

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \|\mathbf{e}\|^2 = \left[\frac{\partial}{\partial a_1} \|\mathbf{e}\|^2 \quad \frac{\partial}{\partial a_2} \|\mathbf{e}\|^2 \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial a_N} \|\mathbf{e}\|^2 \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \|\mathbf{e}\|^2 = \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} (a^2x^2 - 2ayx + y^2) \\ = 2x^2a - 2yx \\ = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{a}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} = \dots$$

$$\mathbf{a}^T = \dots$$

$$\mathbf{a} = \dots$$

$$\therefore (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{y} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \mathbf{a} = \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{a}$$

擬似逆行列

結論: 未知パラメータのベクトル \mathbf{a} は次の式で求められる。

$$\mathbf{a} = \mathbf{X}^\# \mathbf{y}$$

ただし

$$\mathbf{X}^\# = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$$

$\mathbf{X}^\#$: 擬似逆行列(Pseudo Inverse)

擬似逆行列は逆行列の拡張である

行列 \mathbf{X} が正則な場合

$$\mathbf{X}^\# = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

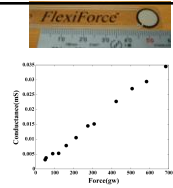
(再考) フィルムセンサの場合

$$y = a_1x + a_2 \begin{cases} x: \text{力: 既知入力} \\ y: \text{コンダクタンス: 測定結果} \\ a_1, a_2: \text{未知パラメータ} \end{cases}$$

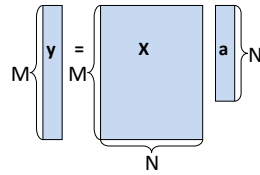
これは
 $y = a_1x_1 + a_2x_2$ where $x_2 = 1$
 とみなせる。

加える力を変え、M回測定する(2回以上)

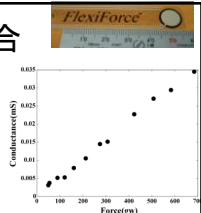
$$\begin{matrix} y_1 = a_1x_{11} + a_2 \cdot 1 \\ y_2 = a_1x_{21} + a_2 \cdot 1 \\ \vdots \\ y_M = a_1x_{M1} + a_2 \cdot 1 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & 1 \\ x_{21} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{M1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$



(再考) フィルムセンサの場合



よって、
 $a = X^\# y$ where $X^\# = (X^T X)^{-1} X^T$
 により二つの未知パラメータを求めることが出来る。



手作業で求めてみる

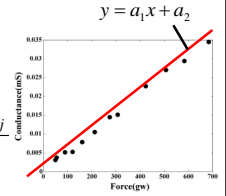
$$\begin{aligned} a &= X^\# y \\ &= (X^T X)^{-1} X^T y \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_M \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_M & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_M \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} \end{aligned}$$



手作業で求めてみる

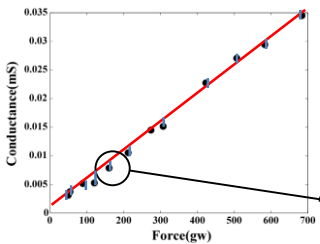
$$a_1 = \frac{M \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_j}{M \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$a_2 = \frac{-\sum x_i \sum x_j y_j + \sum x_i^2 \sum y_j}{M \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$



これは、直線によるフィッティングの公式に他ならない

何を最小化したか



$$y = Xa + e$$

$$e = y - Xa$$

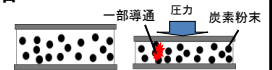
$$\|e\|^2 = e^T e = \sum_{i=1}^M e_i^2$$

$$y_i = a_1 x_i + a_2 + e_i$$

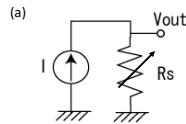
$$e_i = y_i - a_1 x_i - a_2$$

データと直線の、「y軸に沿った距離」の二乗の和を最小化した。

(参考) 実際の測定回路

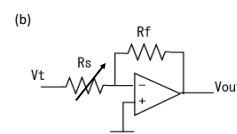


「抵抗」を測定するなら



I: 定電流源
 Vout: 出力
 $V_{out} = I \times R_s$
 出力電圧は**抵抗に比例**

「コンダクタンス(抵抗の逆数)」を測定するなら

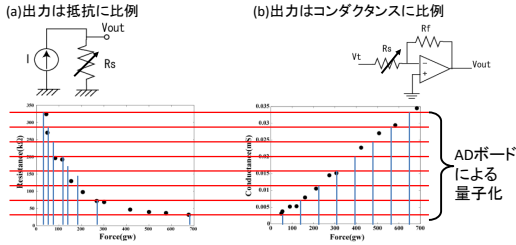


Vt: 定電圧源
 Rs: フィルムセンサの抵抗
 Rf: 調整用固定抵抗
 これは「反転増幅回路」
 $V_{out} = R_f / R_s \times V_t$
 Vtが一定なら出力電圧は**抵抗に反比例**



「抵抗」を測定して逆数をとればよいのでは？

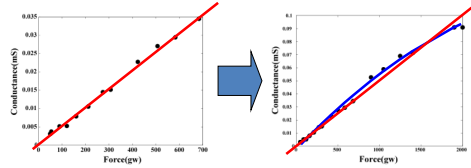
別にそれでもよい。しかし玄な理由はある。



- アナログ部による線形化の意義 = ADボードによる量子化の影響を低減「**ダイナミックレンジを広げる**」とも言う。

31

フィルムセンサを限界性能まで使いきりたい。



直線近似 $y = a_1x + a_2$ ではフィッティングできない気が... (直線領域だけで使う、という方針も正しい)

多項式によるフィッティングを試みる。

$$y = a_1x + a_2 \quad \rightarrow \quad y = a_1x^2 + a_2x + a_3$$

$$y = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$$

もはや直線フィッティングの公式は使えない。

32

多項式近似

$$y = a_1x^2 + a_2x + a_3 \quad \left\{ \begin{array}{l} x: \text{力: 既知入力} \\ y: \text{コンダクタンス, 測定出力} \\ a_1, a_2, a_3: \text{未知パラメータ} \end{array} \right.$$

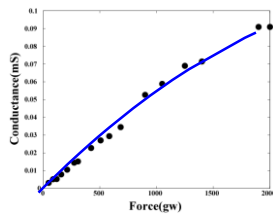
何度も測定する

$$y_1 = a_1x_1^2 + a_2x_1 + a_3$$

$$y_2 = a_1x_2^2 + a_2x_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$y_M = a_1x_M^2 + a_2x_M + a_3$$



33

多項式近似

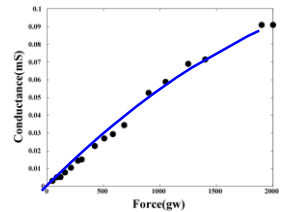
$$y_1 = a_1x_1^2 + a_2x_1 + a_3$$

$$y_2 = a_1x_2^2 + a_2x_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$y_M = a_1x_M^2 + a_2x_M + a_3$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_M^2 & x_M & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$



$y = \mathbf{Xa}$ の形に出来たので、

$$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{\#} \mathbf{y} \quad \text{where} \quad \mathbf{X}^{\#} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$$

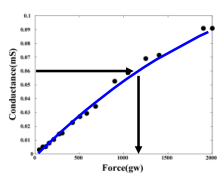
により3つの未知パラメータを求めることが出来る。(計算機のごとく)

34

元に戻って... 何をしたかったか

- $y = a_1x + a_2$ x : 力の既知の入力
- $y = a_1x^2 + a_2x + a_3$ y : コンダクタンス, 測定した出力
- $y = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ a_1, \dots, a_4 : 未知パラメータ

モデルの未知パラメータを求めるのがゴールではない。
測定出力 y から x を逆算することがゴール。



- $x = (y - a_2) / a_1$
- $a_1x^2 + a_2x + (a_3 - y) = 0$
$$x = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1(a_3 - y)}}{2a_1}$$
- $a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + (a_4 - y) = 0$
 $x = \dots$ (3次方程式の解の公式)

35

デモ: Excelでのフィッティング

X軸は等間隔でなくて良い
X軸は単調増加でなくて良い

N次多項式だと**完璧なフィッティング**ができてしまうのはなぜか？
(行列の形はどうなるか？)

整数次数の多項式でなくて良い

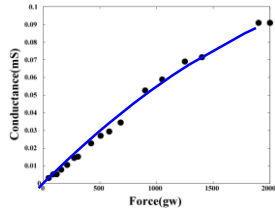
$$y_1 = a_1 x_1^{1/2} + a_2$$

$$y_2 = a_1 x_2^{1/2} + a_2$$

$$\vdots$$

$$y_M = a_1 x_M^{1/2} + a_2$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{1/2} & 1 \\ x_2^{1/2} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_M^{1/2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

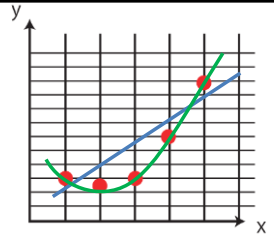


関数であっても良い。たとえばlog(x)など。

37

レポート課題(1)

次のデータ系列に対して、
Scilabを用いて、
(1) 直線による近似。
(2) 2次曲線による近似を適用。
パラメータを求め、
曲線とデータをグラフに描け



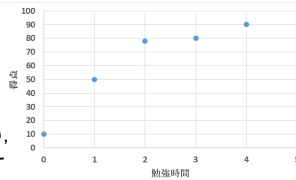
X	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
Y	3.0	2.5	3.0	6.0	10.0

なおScilabでは行列Aの擬似逆行列はpinv(A)で直接求めることができる。
当然自分でinv(A*A)*Aとやっても同じ。

38

レポート課題(2) (余裕のある人)

次のデータ系列に対して、
 $y = a_1 * \log(x+1) + a_2$
を仮定してパラメータを求め、
曲線とデータをグラフに描け



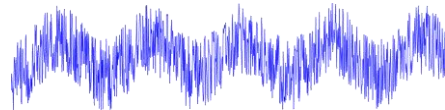
	Aさん	Bさん	Cさん	Dさん	Eさん
X(勉強時間)	3	4	2	0	1
Y(試験の点)	80	90	78	10	45

最小二乗法
事例紹介

最小二乗法事例紹介
(時間の許す限り)

- 直交(同期)検波の最小二乗法による理解
- X線CTの画像再構成
- フォトリフレクタのキャリブレーション

最小二乗法事例(1): 直交(同期)検波



問題を定式化

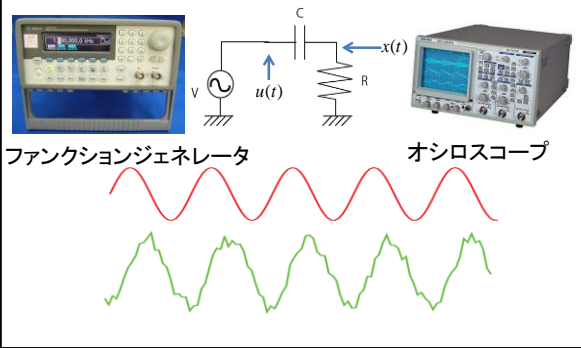
信号f(t)が、

$$f(t) = A \sin(\omega t + \phi) + \text{noise}(t)$$

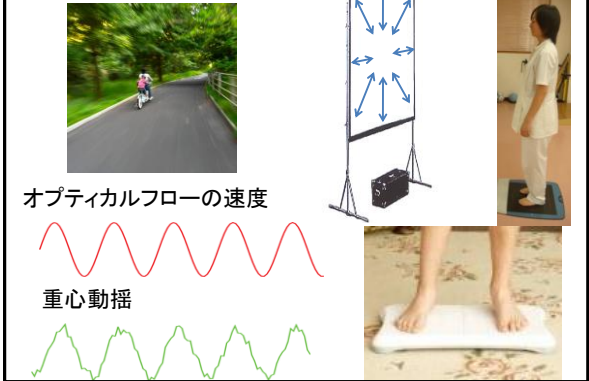
と仮定できるとする。周波数 ω はわかっている。

計測データから、振幅Aと、位相ずれ ϕ を求めるには？

応用事例(1)



応用事例(2)



直交(同期)検波: 数式(復習)

信号に $\sin(\omega t)$ をかけ、積分する (= 内積をとる)
積分時間 T は充分長い。

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{T} \int_0^T (A \sin(\omega t + \phi) + \text{noise}(t)) \sin(\omega t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T A \sin(\omega t + \phi) \sin(\omega t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \text{noise}(t) \sin(\omega t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T A (\sin(\omega t) \cos(\phi) + \cos(\omega t) \sin(\phi)) \sin(\omega t) dt \\
 &= A \cos(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt + A \sin(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt \\
 &= A \cos(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt \\
 &= \frac{A}{2} \cos(\phi)
 \end{aligned}$$

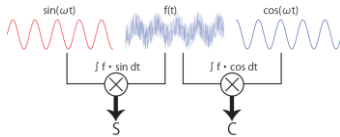
直交(同期)検波: 数式(復習)

信号に $\cos(\omega t)$ をかけ、積分する (= 内積をとる)
積分時間 T は充分長い。

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{1}{T} \int_0^T (A \sin(\omega t + \phi) + \text{noise}(t)) \cos(\omega t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T A \sin(\omega t + \phi) \cos(\omega t) dt + \int_0^T \text{noise}(t) \cos(\omega t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T A (\sin(\omega t) \cos(\phi) + \cos(\omega t) \sin(\phi)) \cos(\omega t) dt \\
 &= A \cos(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt + A \sin(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt \\
 &= A \sin(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} dt \\
 &= \frac{A}{2} \sin(\phi)
 \end{aligned}$$

直交(同期)検波: 数式(復習)

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{A}{2} \cos(\phi) \\
 C &= \frac{A}{2} \sin(\phi)
 \end{aligned}$$



位相差

$$\frac{C}{S} = \tan(\phi)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{C}{S}\right)$$

振幅

$$S^2 + C^2 = \frac{A^2}{4} (\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi))$$

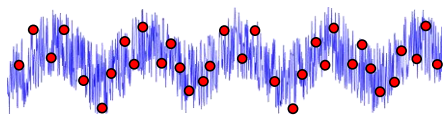
$$= \frac{A^2}{4}$$

$$A = 2\sqrt{S^2 + C^2}$$

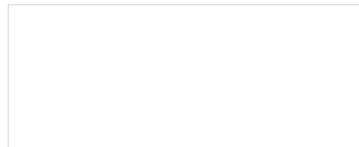


ノイズに埋もれた信号から位相差と振幅が求まった

最小二乗法で理解する



離散的に取り込まれるデータは次の形をしていると仮定



ただし周波数 ω は既知。

得られたデータ $[y_1, y_2, \dots, y_N]$ から、振幅 A と位相 ϕ を求める。

最小二乗法で理解する

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

これにより、行列の形、 $y = Xa$ に変形することが出来た。

最小二乗法で理解する

$$A \cos(\phi) = a = X^T y = (X^T X)^{-1} X^T y$$

$$A \sin(\phi) = \begin{bmatrix} \sin(\omega t_1) & \dots & \sin(\omega t_N) \\ \cos(\omega t_1) & \dots & \cos(\omega t_N) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sin(\omega t_1) & \dots & \sin(\omega t_N) \\ \cos(\omega t_1) & \dots & \cos(\omega t_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

残る
ほぼ消える (適切なNで完全に0)

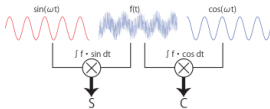
最小二乗法で理解する

$$\begin{bmatrix} A \cos(\phi) \\ A \sin(\phi) \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \sin(\omega t_i) y_i \\ \sum_{i=1}^N \cos(\omega t_i) y_i \end{bmatrix}$$

つまり、元信号 $y(t)$ に

- $\cos(\omega t)$ をかけて積分したものと、
 - $\sin(\omega t)$ をかけて積分したものと
- によって、振幅と位相を求めることができる。

これはこれまでの数式的理解と全く同一。



最小二乗法事例(2) : CT

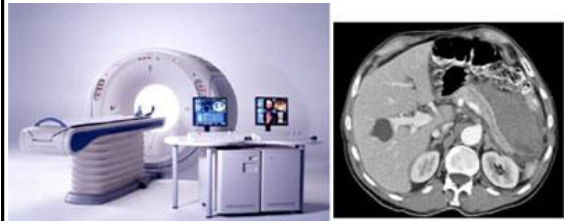
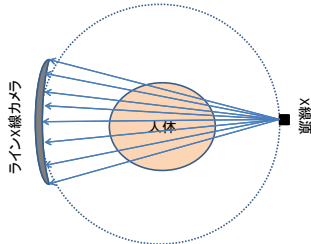


図1. X線CTと画像例

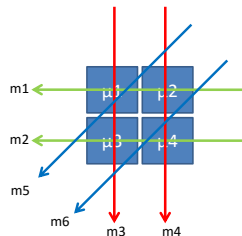
CT:Computational Tomography: 計算による断層撮影
周囲からの計測により、断面/3D形状を再構成

X線CT



- 体内を貫通したX線をライン状カメラで検出=射影
- 装置自体を回転することで、射影データを一周分取得

(参考)X線CT

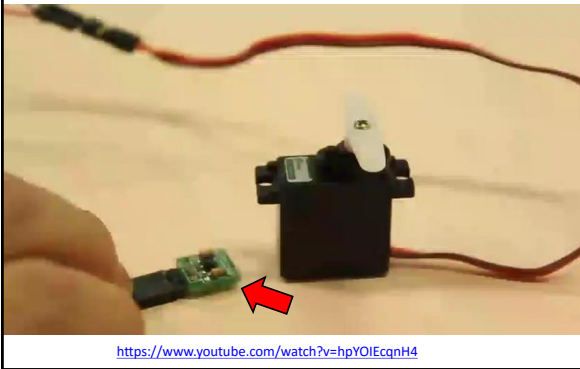


- $m_1 = \mu_1 + \mu_2$
- $m_2 = \mu_3 + \mu_4$
- $m_3 = \mu_1 + \mu_3$
- $m_4 = \mu_2 + \mu_4$
- $m_5 = \mu_1 + (\mu_2 + \mu_3)/2$
- $m_6 = \mu_4 + (\mu_2 + \mu_3)/2$

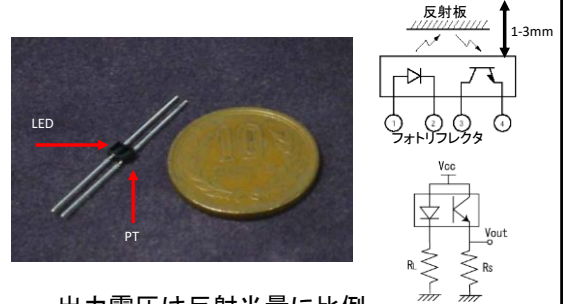
$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{bmatrix}$$

- 人体が4ブロックに分かれていたとする。
- それぞれX線を吸収する能力(線減衰係数)が異なる。
 $\mu_1 \sim \mu_4$ とする(未知数)
- 多方向から観測、連立方程式⇒行列⇒擬似逆行列⇒ $\mu_1 \sim \mu_4$ を取得

最小二乗事例(3)
 フォトリフレクタを用いた近接距離計の較正

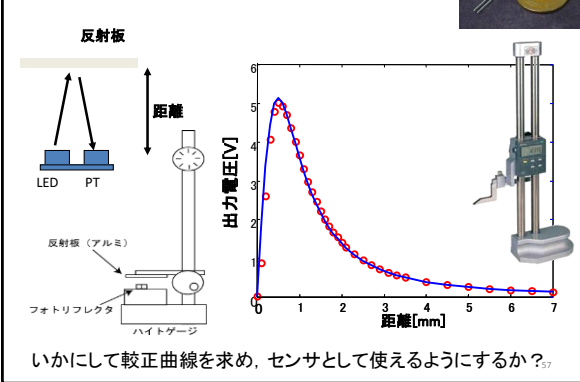


フォトリフレクタを用いた近接距離計の較正

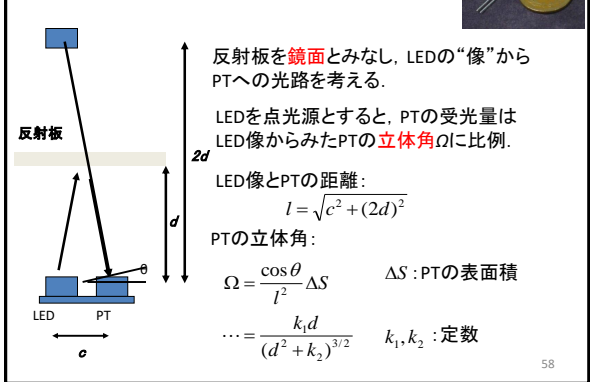


出力電圧は反射光量に比例。
 出力電圧から反射板との距離を得たい。

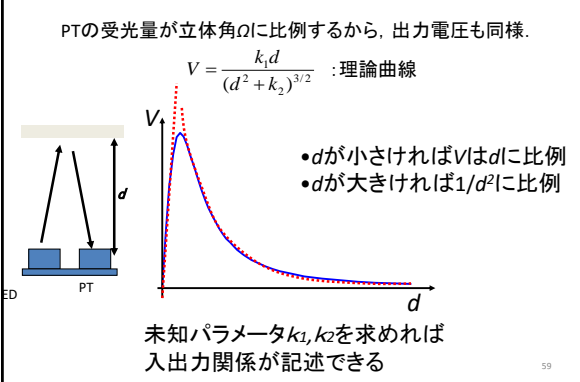
測定



モデル化(1)



モデル化(2)



フィッティングの準備

