# インタラクティブシステム論
# 第５回

梶本裕之
Twitter ID kajimoto
ハッシュタグ #ninshiki

## 日程

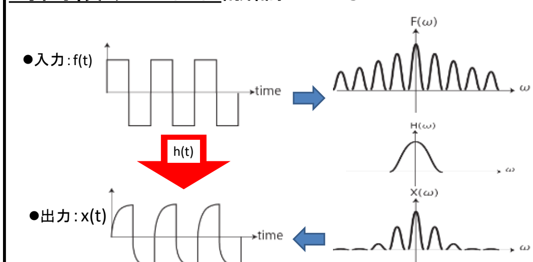
4/14イントロダクション
4/21 フーリエ変換
4/28フーリエ変換と線形システム
5/5　こどもの日
5/12　出張により休講
5/19　信号処理の基礎
5/26　信号処理応用1（相関）
6/2　 信号処理応用2（画像処理)
6/09　中間確認テスト
6/16　ラプラス変換
6/23　出張により休講
6/30　古典制御の基礎
7/7　インタラクティブシステムの実際（小泉先生）
7/14　行列
7/21　行列と最小二乗法
7/28 出張により休講
8/4　ロボティクス
8/11(要確認)期末テスト

## 中間確認テスト

来週，中間テスト用の問題集を配布します。

一度式の導出を覚えることを意図しています。

## (復習）周波数領域ではなく，時間領域のまま議論できないか？




X(ω)＝H(ω)×F(ω)：周波数領域で美しいのは分った.
時間的な現象として何が起きているのか分からない.

## (復習）式で考えよう

フーリエ変換
$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$
逆フーリエ変換
$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

X(ω)＝H(ω)×F(ω)

両辺を逆フーリエ変換すれば時間領域の信号に戻る.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau\right)\exp(j\omega t)d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\left(\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\exp(j\omega(t-\tau))d\omega\right)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

## 逆順の計算もしておく（ふつうはこちら）

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

フーリエ変換
$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$
逆フーリエ変換
$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

両辺をフーリエ変換.

$$
\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega t)dt\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega(\tau+(t-\tau)))dt\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega\tau)\cdot\exp(-j\omega(t-\tau))dt\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\exp(-j\omega(t-\tau))dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau\int_{-\infty}^{\infty} h(t')\exp(-j\omega t')dt' \\
&= F(\omega)H(\omega)
\end{aligned}
$$

## (復習)コンボリューション定理

$$X(\omega)=F(\omega)H(\omega)=H(\omega)F(\omega)$$

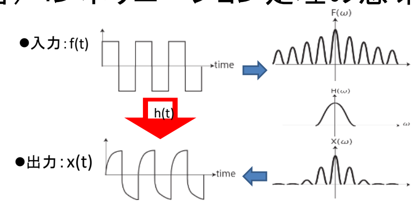
フーリエ逆変換　フーリエ変換

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

簡略化のため次のようにも表記される

$$x(t)=f(t)*h(t)=h(t)*f(t)$$

## (復習)コンボリューション定理の意味(1)

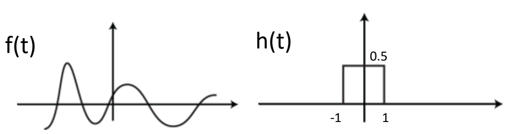



$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$　$X(\omega)=F(\omega)H(\omega)$

•h(t)のフーリエ変換がH(ω)であるとする.
•周波数領域でフィルタH(ω)をかけることは,
時間領域では, 入力信号x(t)に対する関数h(t)の畳み込み積分(コンボリューション)として表現される.

## (復習)コンボリューション定理の意味(2)

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau$$




例えば, h(t)=0.5　(-1<t<1)なら,

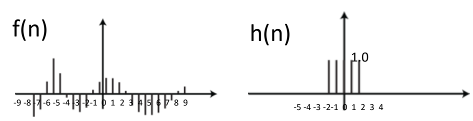
$$x(t)=\int_{-1}^{1} 0.5f(t-\tau)d\tau$$

これは, f(t)を平均化していくフィルタ

## (復習)離散化による理解

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau \Rightarrow x(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)f(n-i)$$

x(n)=...+ h(-4)f(n+4) + h(-3)f(n+3) +...+ h(3)f(n-3) + h(4)f(n-4)+...



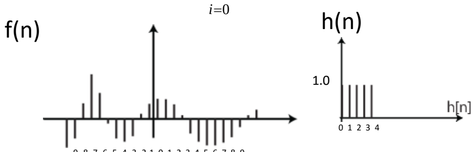

h(n)が, n=-2〜2の間だけ1の場合,

$\boxed{x(n)=f(n+2) + f(n+1) + f(n) + f(n-1) + f(n-2)}$

●この場合, 出力xは, 入力fの「平均化」になっている.
●つまりこの場合, hは平滑化フィルタである.

## (復習)FIRフィルタ

$$x(n)=\sum_{i=0}^{\infty} h(i)f(n-i)$$

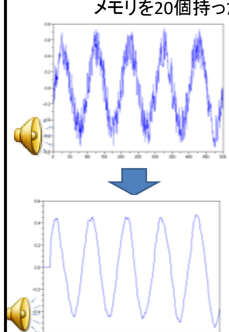



i=0から始める:未来のデータ が使えないことを意味する.
この例は, 元データf(n)を, 4個平均して出力する.

•未来のデータが使えない例:リアルタイム制御
•先のデータが使える例:画像処理

## (復習)平滑化フィルタの実例

メモリを20個持ったFIRフィルタによって平滑化



Scilabコード例

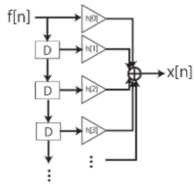
```
time = [0:0.01:100];
//振幅0.5の正弦波に最大振幅0.5のノイズが混入した信号
wave=0.5*sin(time*2*%pi) + 0.5*(rand(time)-0.5);

out=zeros(wave);

//20個を平均する.
for n=20:length(wave),
  for i=0:19,
    out(n)=out(n)+wave(n-i)/20;
  end
end

playsnd(out);
savewave('wave.wav',out);
plot(out(1:500));
```

## (復習)エコー




エコー＝時間遅れ信号の重畳.
これはFIRフィルタで実装できる.

Scilabコード例

```
wave = loadwave('aiueo.wav');

out=zeros(wave);

//エコー(1000ステップ前の信号を重畳)
for n=1000:length(wave),
   out(n)=wave(n)+0.9*wave(n-999);
end

playsnd(out,11000);      //11kHzサンプリングで再生
savewave('wave.wav',out,[11000]);
```

原音
1000ステップ前の信号を重畳
1000ステップ前＋2000ステップ前の信号を重畳
沢山重畳

## エコーは害

原音　沢山重畳


## ゴースト現象

# 相互相関関数
# 自己相関関数

## エコーキャンセル(テレビだとゴーストリダクション)

FIRフィルタによってエコーの影響を低減することができる.

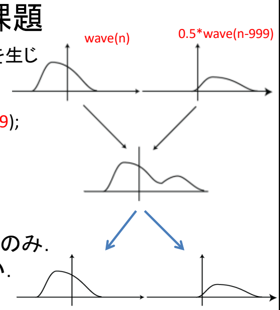
考え方:
(1)エコー成分のモデルを推定
out(n)=wave(n)+0.5*wave(n-100);
「100ステップ前の信号が0.5のゲインで重畳されている!」

(2)そのモデルに基づき, <u>エコー成分と逆のゲインをかける</u>
out(n)-0.5*out(n-100)
=wave(n)+0.5*wave(n-100)-0.5*(wave(n-100)+0.5*wave(n-200))
=wave(n)+0.25*wave(n-200)
⇒エコーが半分に低減！
(3)当然もっと工夫すれば. . . (もっとメモリがあれば)
out(n)-0.5*out(n-100)- 0.25*out(n-200)
=...=wave(n)+0.125*wave(n-300)
⇒無限にメモリがあれば完璧に消せる.

## エコーキャンセルの課題

エコー成分が, どれだけ時間遅れを生じてやってくるかのモデルを推定

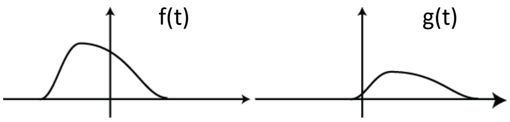
out(n)=wave(n)+0.5*wave(n-999);




＜問題＞
観測できるのは,
エコーの「結果」としてのout(n)のみ.
元の信号はわかっていない.

この信号からどのように,
モデルを推定するのか？

## より簡単な問題から考えよう



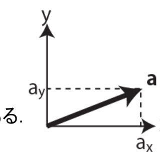

二つの信号が,
●時間的にどれだけずれているのか
●時間のずれを無視したらどれだけ似ているのか
を測定したい.

## (復習)ベクトル空間と内積

ベクトル **a**=[$a_x$, $a_y$] のx成分は？. . . . . $a_x$

これはベクトル**a**とベクトル **x**=[1,0]との内積である.

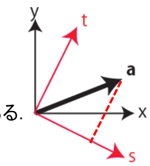
**a**・**x** = [$a_x$, $a_y$]・[1,0] = $a_x$




回転した座標軸, s, tを考える.
ベクトル **a**=[$a_x$, $a_y$] の, s 成分は？

これはベクトル**a**とベクトル **s**=[$s_x$, $s_y$]との内積である.

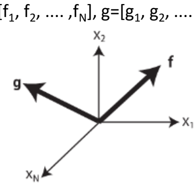
**a**・**s** = [$a_x$, $a_y$]・ [$s_x$, $s_y$]




内積は, あるベクトルが別のベクトルの成分をどれだけ持つかを表す

## (復習)N次元空間では

N次元空間で, 二つのベクトル
f=[$f_1$, $f_2$, .... ,$f_N$], g=[$g_1$, $g_2$, .... ,$g_N$] を考える.




内積 **f**・**g**は, ベクトルfの, g軸成分(または逆)を表す.

$= [f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_N] \bullet [g_1 \quad g_2 \quad \cdots \quad g_N]$

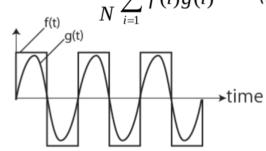
$= \sum_{i=1}^{N} f_i g_i$

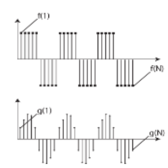
## (復習)波形*f*に波形*g*はどれだけ含まれるか

波形*f*中の, 波形*g*の成分

$= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)dt$ (連続関数)

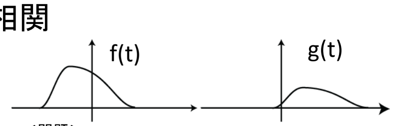
$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(i)g(i)$ (離散化して考えた場合)



これは二つの波をベクトルと考えた時の内積に他ならない
※内積を連続関数に対して定義

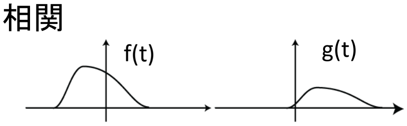
## 相互相関




<問題>
二つの信号が,
●時間的にどれだけずれているのか
●時間のずれを無視したらどれだけ似ているのか
を測定したい.

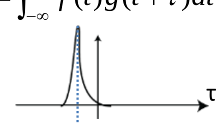
内積を思い出せば,
次の手順で測定すればよいことがわかる
●g(t)をτだけずらしてみる ⇒
●f(t)との内積を取ってみる ⇒
●τを変化させていく.

## 相互相関




$R_{fg}(\tau)$: 二つの関数f(t), g(t)の, 相互相関関数

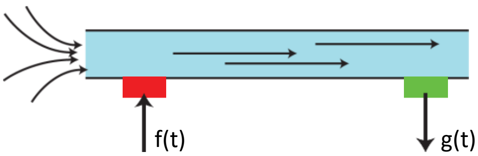
$$R_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t+\tau)dt$$




$R_{fg}(\tau)$が最大の値をとるτ = 元の関数f(t)とg(t)のズレ
(ただし直流成分を取り除いた後)

## 相互相関の応用：速度計測

管内の流速を正確に測定したい
ただし，管の中に接触してはいけない(液漏れ厳禁)

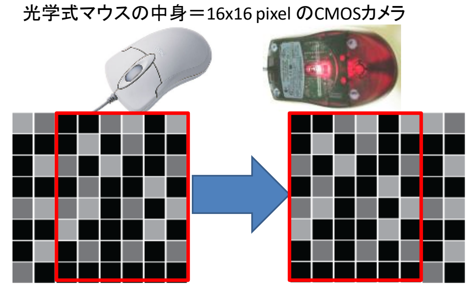



上流に熱源を置き，f(t)でランダムに変動させる．
下流で温度を測定する．g(t)

f(t)とg(t)の相互相関関数が最大となる時間差τが，
水流によって熱が移動するのに要する時間である．

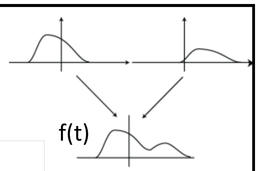
## 相互相関の応用：速度計測

光学式マウスの中身＝16x16 pixel のCMOSカメラ



二つの画像（＝2次元関数）同士の相互相関を取ることで
移動量を計測する．自動車の速度計測等にも利用．

## 自己相関

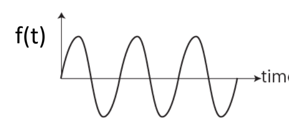



二つの関数f(t)，g(t)の代わりに，
ひとつの関数f(t)の相関を取る．

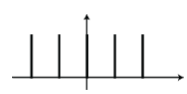
$$R_{ff}(\tau) = $$


自己相関関数は，
「どれだけずれたら自分自身に近い形になるか」
を表す．
すなわち，エコーを発見していることに他ならない．

## 周期関数の自己相関

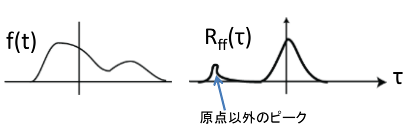



$$R_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t+\tau) dt$$



周期関数の自己相関関数は沢山のピークが出る

## 自己相関まとめ



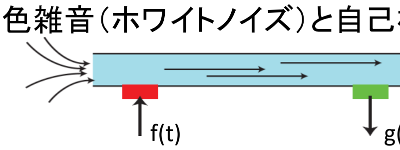

$R_{ff}(\tau)$：自分自身をτずらしたら，自分自身にどれだけ似ているか

●当然，τ＝0で最大値を取る．

●τ≠0で大きな値をとった場合，
その信号にはτの時間遅れ（エコー）成分が含まれている．

●信号に潜む周期性を発見することもできる

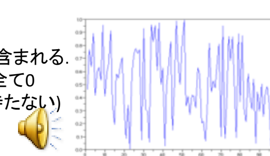
## 白色雑音（ホワイトノイズ）と自己相関




元の信号f(t)に「周期性」があったら，f(t)とg(t)の相互相関は
沢山の「ニセのピーク」が出てしまう．

元の入力f(t)はなるべく「でたらめ」であることが望ましい⇒白色雑音

＜白色雑音の定義＞
1. あらゆる周波数成分が均等に含まれる．
2. 自己相関関数がτ=0以外では全て0
（＝エコー成分，周期性を全く持たない）



## 自己相関とパワースペクトル

自己相関関数をフーリエ変換してみる。

$$R_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t+\tau) dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t+\tau) dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$=$

$=$

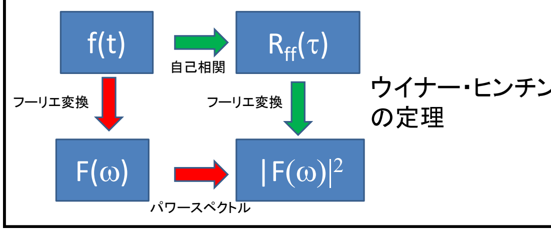
$=$

## 自己相関とパワースペクトル

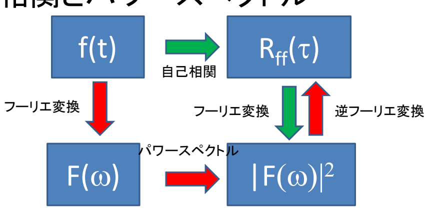
$=$

$=$

$= \|F(\omega)\|^2$




## 自己相関とパワースペクトル




自己相関は
フーリエ変換⇒パワースペクトル⇒逆フーリエ変換
によって間接的に計算できる

●自己相関を直接計算した時の計算量：O($n^4$)
●フーリエ変換(FFT)を使った時の計算量：O(nlog(n))
この方が計算が早いため多用される。

## レポート課題1：自己相関

(1) 適当なwaveファイルに対してエコーを掛けてカラオケのようにする．(前回のレポート)

(2)その結果に対して定義通りの方法で自己相関関数を計算し、確かにエコー分の遅れのところでピークが出ることを確認する(エコーの検出)．

(3) ウイナー・ヒンチンの定理を用い、パワースペクトルの逆フーリエ変換によって同じ結果が出ることを確認する

(2)(3)のScilabソースファイルおよび結果のグラフ画像の添付．waveファイルは添付不要。<u>(2)(3)の処理にかかった時間についてコメント</u>

## レポート課題：ヒント

(1) 適当なwaveファイルに対してエコーを掛けてカラオケのようにする．(前回のレポート)

```
//waveファイルのロード
wave = loadwave('●●●.wav');

//1000ステップごとのエコーを10回重ねる例
out=[];
for i=0:9,
  out=out+[zeros(1,1000*i), wave, [zeros(1,9000-1000*i)]];
end
```

## レポート課題：ヒント

(2)その結果に対して定義通りの方法で自己相関関数を計算し、確かにエコー分の遅れのところでピークが出ることを確認する(エコーの検出)．

```
time=length(out);
auto_correlation=zeros(1,time);

for tau=1:time,
    auto_correlation(tau) = 
end

plot(auto_correlation);
```

自己相関の定義式から、[zeros(1,tau), out] と [out, zeros(1,tau)] の内積を取れば良い。(ベクトルの内積はどう書き表せるか？)

## レポート課題：ヒント

(3) ウイナー・ヒンチンの定理を用い、パワースペクトルの逆フーリエ変換によって同じ結果が出ることを確認する

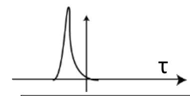
//フーリエ変換
fourier = //過去のレポート課題を参照
//パワースペクトル
power_spec = //過去のレポート課題を参照
//自己相関
auto_correlation = //逆フーリエ変換

plot(auto_correlation);

※（参考）(2)(3)の結果の微妙な違いは、(3)が**信号の無限繰り返しを仮定している**ために生じる。逆に(2)もそう仮定すれば(3)と全く同じ結果が得られる

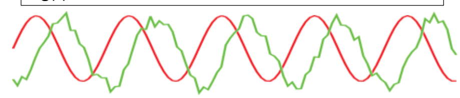
## （発展トピック）相互相関と検波


$$R_{fg}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t+\tau)dt$$

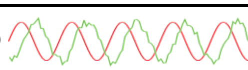


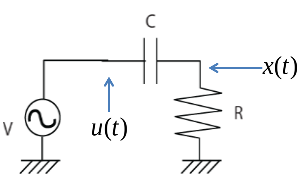

$R_{fg}(\tau)$が最大の値をとるτ
＝元の関数f(t)とg(t)のズレ
（ただし直流成分を取り除いた後）

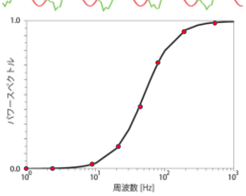
実用上重要なケースの一つ：
●f(t)が正弦波（入力）で，
●g(t)がノイズが入って位相が遅れた正弦波（出力）



## 正弦波入出力の例（1）

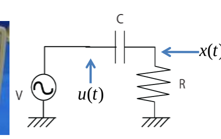




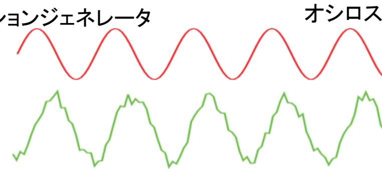

フィルタ回路：入力u(t)，出力x(t)
電子回路，アンテナ，ロボットアーム，etc
フィルタ特性を実測で求める場合
●u(t)=sin(ωt)を**入力**し，
●**出力**を観察する．
ωを変化させることでフィルタ特性を得る．

## 正弦波入出力の例（1）

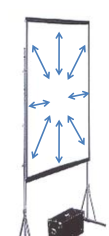



ファンクションジェネレータ

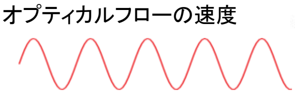
オシロスコープ



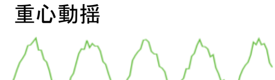
## 正弦波入出力の例（2）



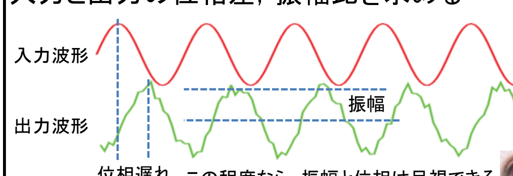
オプティカルフローの速度



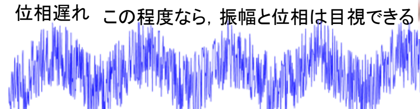
重心動揺



## 入力と出力の位相差，振幅比を求める

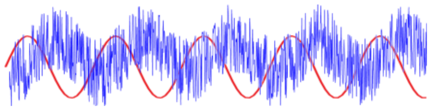



この程度なら，振幅と位相は目視できる



でもたいていこういう残念な感じ．ノイズがひどい
⇒振幅と位相を，どうやって求めたら良い？
方法1：バンドパスフィルタを使う
方法2：相関関数を考える

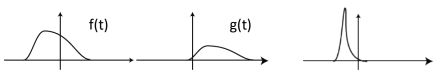
## 正弦波による相互相関



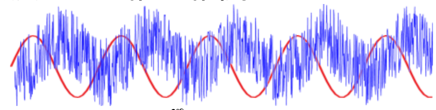
●出力信号f(t):ノイズだらけの正弦波．位相不明．周波数は既知．
●入力信号g(t):周波数固定の正弦波

g(t)を動かしていき，ピタリと重なるところを見つければ良い
⇒相互相関の計算にほかならない．

$$R_{fg}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t+\tau)dt$$




## 正弦波による相互相関



$$R_{fg}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t+\tau)dt$$

正弦波g(t)を動かす

$$R_{fg}(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t+\tau)dt$$

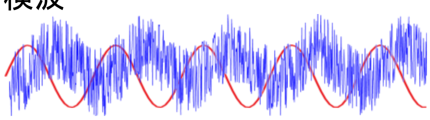
$$=\frac{1}{T}\int_0^T$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T$$

$$=$$

つまり正弦波の場合，積分の計算は2回やるだけでよい！！

## 直交検波

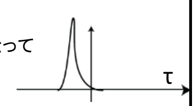


$$R_{fg}(\tau)=\cos(\omega\tau)\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sin(\omega t)dt+\sin(\omega\tau)\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega t)dt$$

積分結果をS,Cと書いて

$$R_{fg}(\tau)=S\cos(\omega\tau)+C\sin(\omega\tau)$$

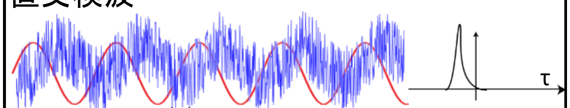
これが最大の値をとる場所τは，微分をとって




$$\frac{dR_{fg}(\tau)}{d\tau}= \qquad =0$$

∴ ⇒位相遅れτが求まった

## 直交検波




$\therefore \arctan\left(\frac{C}{S}\right)=\omega\tau$ ⇒位相遅れτが求まった

このときの相関値は，

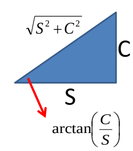
$$R_{fg}(\tau)=S\cos(\omega\tau)+C\sin(\omega\tau)$$

$$=S\cos\left(\quad\right)+C\sin\left(\quad\right)$$

$$=S \qquad +C$$

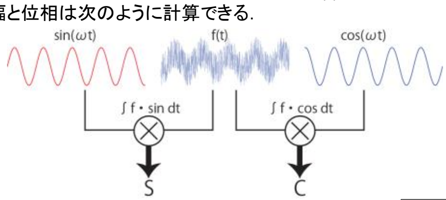
$$=$$

$=$ ⇒振幅に相当する量

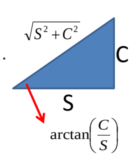



## 直交検波まとめ

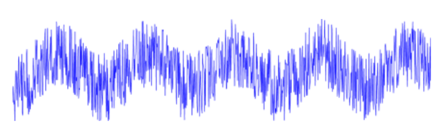
周波数ωがわかっているノイズだらけの信号f(t)があったとき，
振幅と位相は次のように計算できる．




（1）sin(ωt)とcos(ωt)との内積をとり，S，Cとおく．
（2）位相遅れはarctan(C/S)となる．
（3）振幅は$\sqrt{S^2+C^2}$に比例する．




## 直交検波:もっと数式で理解する



問題を定式化

信号f(t)が，

f(t) =

と仮定できるとする．周波数ωはわかっている．

計測データから，振幅Aと，位相ずれφを求めるには？

## 直交検波：さらに数式で理解する

信号にsin(ωt)をかけ，積分する（＝内積をとる）
積分時間Tは充分長い．

$$S = \frac{1}{T}\int_0^T (A\sin(\omega t + \phi) + noise(t))\sin(\omega t)dt$$

$$= \frac{1}{T}$$

$$= \frac{1}{T}$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

## 直交検波：さらに数式で理解する

信号にcos(ωt)をかけ，積分する（＝内積をとる）
積分時間Tは充分長い．

$$C = \frac{1}{T}\int_0^T (A\sin(\omega t + \phi) + noise(t))\cos(\omega t)dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T A\sin(\omega t + \phi)\cos(\omega t)dt + \cancel{\int_0^T noise(t)\cos(\omega t)dt}$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T A(\sin(\omega t)\cos(\phi) + \cos(\omega t)\sin(\phi))\cos(\omega t)dt$$

$$= A\cos(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \cancel{\sin(\omega t)\cos(\omega t)}dt + A\sin(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)dt$$

$$= A\sin(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1+\cancel{\cos(2\omega t)}}{2}dt$$

$$=$$

## 直交検波：さらに数式で理解する

$$S = \frac{A}{2}\cos(\phi) \qquad C = \frac{A}{2}\sin(\phi)$$

この二つの結果から，

位相差

$$\frac{C}{S} =$$

$$\phi =$$

振幅

$$S^2 + C^2 = \frac{A^2}{4}(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi))$$

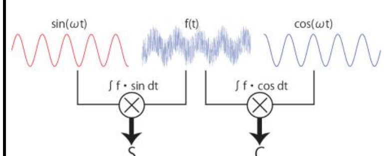
$$=$$

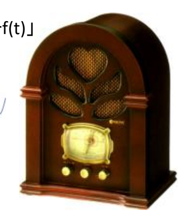
$$A =$$

位相差と振幅が求まった

## （参考）AMラジオの同期検波

ラジオの信号は，典型的な
「周波数ωがわかっているノイズだらけの信号f(t)」



復調方式の一つ：「同期検波」

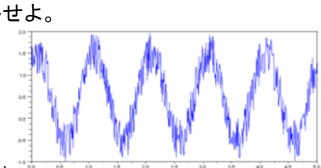
直交検波をリアルタイムに行い，ノイズに隠れた真の信号を得る．

今ではPC上で計算可能（ソフトウエア無線技術）

## レポート課題2：
## ノイズ入り正弦波の位相を調べる

次のScilabソースで表されるノイズ入り正弦波の位相遅れを求め、妥当性をコメントせよ。

```
//ノイズ入り正弦波
t=[0:0.01:5];//時刻
f=1.0; //周波数
amp=0.5;//振幅
phi=0.3*%pi; //位相遅れ
y=sin(2*%pi*f*t+phi) + rand(t);
plot(t,y);
```



```
S =                    //yとsinの内積
C =                    //yとcosの内積
ans_phi=atan(C,S) //検出された位相遅れ
```