# 情報理論（7）
# 通信路のモデル化と通信路容量

人間コミュニケーション学科
梶本　裕之
kajimoto@hc.uec.ac.jp

1

# レポート回収

2

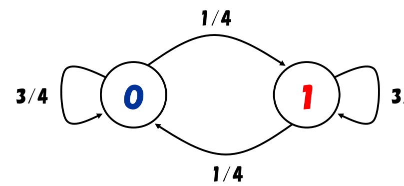
## 授業の流れ（予定）

第4週（11/04）　情報源符号化とデータ圧縮
第5週（11/11）　出張のため休講
第6週（11/18）　調布祭のため休講
第7週（11/25）　ハフマン符号とデータ圧縮
第8週（12/ 2）　情報源符号化定理
第9週（12/09）　出張のため休講
第10週（12/16）　マルコフ情報源モデル
第11週（12/23）　休日
第12週（ 1/ 6）　通信路のモデル化
第13週（ 1/13）　センター試験準備のため休講
第14週（ 1/20）　誤り検出・誤り訂正符号
第15週（ 1/27）　線形符号
第16週（ 2/ 3）　ハミング符号，秘密鍵暗号
第17週（ 2/10）　公開鍵暗号

3

## (復習)マルコフ情報源

- 時刻 $t$ における事象 $X_t$ の生起確率が，直前の事象 $X_{t-1}$（あるいは直前の $n$ 個の事象の組 $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-n}$）だけに依存するような情報源（マルコフ過程ともいう）




状態遷移図

4

## (復習)マルコフ情報源の行列表現

| $X_t$ \ $X_{t-1}$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 3/4 | 1/4 |
| 1 | 1/4 | 3/4 |

遷移確率表

時刻 $t$ における事象の確率分布ベクトル　　遷移確率行列　　時刻 $t-1$ における事象の確率分布ベクトル

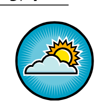
$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

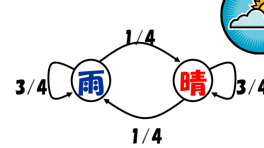
5

## （復習）行列表現から確率分布への計算例

- 天気
  - 実験：初日が雨だったとする（＝初期確率分布が$[1,0]^T$）
  - 翌日の確率分布は？
    $\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$
  - 次の日の確率分布は？
    $\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/8 \\ 3/8 \end{bmatrix}$
  - その次の日は？
    $\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5/8 \\ 3/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/16 \\ 7/16 \end{bmatrix}$
  - さらに次の日は？
    $\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9/16 \\ 7/16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/32 \\ 15/32 \end{bmatrix}$

| $X_t$ \ $X_{t-1}$ | 雨 | 晴 |
|---|---|---|
| 雨 | 3/4 | 1/4 |
| 晴 | 1/4 | 3/4 |






6

## 前回の小レポート(1)

- 遷移確率行列と遷移確率行列の積も遷移確率行列になる
- 固有値 1 を必ず持つ
- 全ての固有値はその絶対値が必ず1以下である

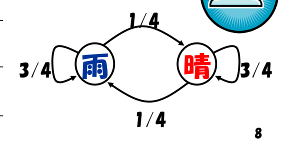
理由を考えよ.



## 前回の小レポート(1)：回答例

- $A = (a_{ij})$：が遷移確率行列であるための条件：
- (1)列の合計が1. ($\Sigma_i a_{ij} = 1$ for all j)
- (2)すべての$a_{ij}$が非負

| $X_t$ \ $X_{t-1}$ | 雨 | 晴 |
|---|---|---|
| 雨 | 3/4 | 1/4 |
| 晴 | 1/4 | 3/4 |






## 前回の小レポート(1)：回答例

一方で. . .

$p = (p_i)$：を確率分布ベクトルとすると,
$p$の要素の合計も1. ($\Sigma_i p_i = 1$)

$$p_{雨} + p_{晴} = 1$$

- 逆に$\Sigma_i p_i = 1$を満たし，要素がすべて正のベクトル$p$は確率分布ベクトル.
- 遷移確率行列の列は確率分布ベクトル



## 前回の小レポート(1)：回答例

- $A = (a_{ij})$：遷移確率行列 ($\Sigma_i a_{ij} = 1$ for all j)
- $p = (p_i)$：確率分布ベクトル ($\Sigma_i p_i = 1$)

$$A p = (\Sigma_k a_{ik} p_k)$$

$A p$の要素の総和は

$$\Sigma_i \Sigma_k a_{ik} p_k = \Sigma_k p_k = 1$$

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix}$$

したがって$A p$も必ず確率分布ベクトルになる



## 前回の小レポート(1)：回答例

1. 遷移確率行列と遷移確率行列の積も遷移確率行列になることの証明
   - $A$，$B$を遷移確率行列とする
   - $B = (b_1\ b_2 \dots b_n)$ と表す（各 $b_i$ は確率分布ベクトル）と，$AB = (Ab_1\ Ab_2 \dots Ab_n)$ となる
   - 各 $Ab_i$ は遷移確率行列と確率分布ベクトルの積なので，これらも確率分布ベクトルである（要素の総和が1となる）
   - 各列ベクトルの要素の総和が1であるので，$AB$も遷移確率行列になる



## 前回の小レポート(1)：回答例

2. 遷移確率行列が固有値1を必ず持つ証明

$$\mathbf{Aq} = \lambda \mathbf{q} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1n}q_n &= \lambda q_1 \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \cdots + a_{2n}q_n &= \lambda q_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}q_1 + a_{n2}q_2 + \cdots + a_{nn}q_n &= \lambda q_n \end{aligned}\right\}$$

縦に足し合わせると

$$\sum_i a_{i1}q_1 + \sum_i a_{i2}q_2 + \cdots + \sum_i a_{in}q_n = \lambda \sum_j q_j$$

$\Sigma_i a_{ij} = 1$より

$$\sum_j q_j = \lambda \sum_j q_j$$

つまり，$\lambda = 1$か，$\Sigma_j q_j = 0$

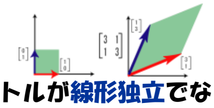
## 前回の小レポート(1)：回答例

- $q_1+q_2+\ldots+q_n=0$ とは，n-1次元の「平面」（n-1次元の部分空間）を意味する．！
- n-1次元の部分空間内にn個のベクトルが独立に存在することはできないから，λ=1となるベクトルが必ず存在する．
- つまり固有値1なる固有ベクトルが必ず存在する．

13

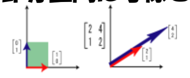
## 復習：行列式

- 行列式det(X)=｜X｜の意味：Xによる写像で面積（体積）が何倍になるか（符号付き）



$$\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=3\times3-1\times1=8$$

- Xの列ベクトルが線形独立でないとき｜X｜=0（次元の低い部分空間に写像されるので）



$$\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2\times2-4\times1=0$$

- 固有値と行列式の関係

$$\det(A-\lambda I)=0$$

14

## 前回の小レポート(1)：回答例

3. 遷移確率行列の全ての固有値はその絶対値が必ず1以下であることの証明

q ：Aの固有ベクトル
λ ：対応する固有値

まずAと$A^t$(転置）の固有値は等しい

$$\because \det(\mathbf{A}^t-\lambda\mathbf{I})=\det((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^t)$$

よって，$A^t$の固有値について考えてもよい

$$\mathbf{A}^t\mathbf{q}=\lambda\mathbf{q}$$

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & & a_{n2}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_n\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_n\end{bmatrix}$$

$q_1$～$q_n$の最大値を$q_m$と置き，m行目に着目

$$a_{1m}q_1+a_{2m}q_2+\cdots+a_{nm}q_n=\lambda q_m$$

$$a_{1m}\frac{q_1}{q_m}+\cdots+a_{mm}\frac{q_m}{q_m}+\cdots+a_{nm}\frac{q_n}{q_m}=\lambda\frac{q_m}{q_m}$$

左辺の分数部分が全て1以下だから

$$a_{1m}+\cdots+a_{mm}+\cdots+a_{nm}\geq\lambda$$

$\Sigma_i a_{ij}=1$より，$1\geq\lambda$

15

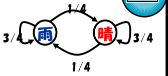
## （復習）マルコフ情報源の定常確率分布

- 確率分布の変化は行列の乗算で計算できる

$$x_t = A\,x_{t-1} = A^2\,x_{t-2} = A^k\,x_{t-k} = \ldots$$

- つまり，「無限に時間がたったときの確率分布」は

$A^\infty\,x_0$（$x_0$は初期確率分布）
疑問：これは「収束するか」？




- 固有ベクトルの考え方が重要！

(1) 任意の初期確率分布は固有ベクトルの合成(ベクトル空間上の点)で表現可能．

$$x_0=w_1q_1+w_2q_2+\ldots+w_Nq_N$$

(2)K時間後の確率分布は固有値で計算できる．

$$A^kx_0=A^k(w_1q_1+w_2q_2+\ldots+w_Nq_N)=\lambda_1^kw_1q_1+\lambda_2^kw_2q_2+\ldots+\lambda_N^kw_Nq_N$$

(3)遷移行列の固有値は1以下．
(4) 1未満の固有値の固有ベクトルはk→∞で消えてしまう．
(5) 1の固有値の固有ベクトルをqと置く．これだけ生き残る．

**回答：1の固有値の固有ベクトルが一つなら収束する**

16

## （復習）定常確率分布の計算例

- 天気
  - 実験：初日が雨だったとする（=初期確率分布が$[1,0]^T$）
  - 翌日の確率分布は？

$$\begin{bmatrix}3/4 & 1/4\\ 1/4 & 3/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3/4\\ 1/4\end{bmatrix}$$

  - 次の日の確率分布は？

$$\begin{bmatrix}3/4 & 1/4\\ 1/4 & 3/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3/4\\ 1/4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5/8\\ 3/8\end{bmatrix}$$

  - その次の日は？

$$\begin{bmatrix}3/4 & 1/4\\ 1/4 & 3/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5/8\\ 3/8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9/16\\ 7/16\end{bmatrix}$$

  - さらに次の日は？

$$\begin{bmatrix}3/4 & 1/4\\ 1/4 & 3/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9/16\\ 7/16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17/32\\ 15/32\end{bmatrix}$$

| $x_t$ \\ $x_{t-1}$ | 雨 | 晴 |
|---|---|---|
| 雨 | 3/4 | 1/4 |
| 晴 | 1/4 | 3/4 |

- 固有値1に対する固有ベクトルは？

$$\begin{bmatrix}3/4 & 1/4\\ 1/4 & 3/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3/4-1 & 1/4\\ 1/4 & 3/4-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\therefore q_1=q_2$$

- 一方で$q_1+q_2=1$だから
- $q_1=q_2=1/2$
- $[1/2,1/2]^T$が定常確率分布

17

## マルコフ情報源のエントロピー

$$H(X) = \lim_{k\to\infty}H(X^k)/k = \Sigma_m H(a_{*m})\,q_m$$

マルコフ情報源のエントロピーは，「遷移確率行列の各列ベクトルそれぞれの情報エントロピー」を，「定常確率分布」によって重み付き平均したものである．

18

## 例えば

- $a_{雨雨}$：雨のままの遷移確率
- $a_{晴雨}$：雨→晴の遷移確率
- $a_{雨晴}$：晴→雨の遷移確率
- $a_{晴晴}$：晴れ続ける遷移確率

$$\begin{pmatrix} P_{雨} \\ P_{晴} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{雨雨} & a_{雨晴} \\ a_{晴雨} & a_{晴晴} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{雨} \\ P_{晴} \end{pmatrix}$$

- $H(a_{雨})$：元が雨のときのエントロピー $-\Sigma a_{*雨}\log(a_{*雨}) = -a_{雨雨}\log(a_{雨雨}) - a_{晴雨}\log(a_{晴雨})$
- $H(a_{晴})$：元が晴のときのエントロピー $-\Sigma a_{*晴}$ $-\Sigma a_{*晴}\log(a_{*晴}) = -a_{雨晴}\log(a_{雨晴}) - a_{晴晴}\log(a_{晴晴})$

- $q_{雨}$：雨の定常確率
- $q_{晴}$：晴の定常確率

$$H(X) = H(a_{雨}) \times q_{雨} + H(a_{晴}) \times q_{晴}$$

つまり，**マルコフ過程のエントロピーは，それぞれの状態からのエントロピーの期待値，とみなせる**

19

## 極端な例

- 乾季と雨季が分かれている地域で，雨の日が年間100日，晴れの日が265日だったら？

- $a_{雨雨} = 99/100$
- $a_{雨晴} = 1/265$
- $a_{晴雨} = 1/100$
- $a_{晴晴} = 264/265$

$$\begin{pmatrix} P_{雨} \\ P_{晴} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99/100 & 1/265 \\ 1/100 & 264/265 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{雨} \\ P_{晴} \end{pmatrix}$$

- 定常確率は意味から明らかに100/365と265/365.

- $H = \{-99/100 \times \log(99/100) - 1/100 \times \log(1/100)\} \times 100/365$
- $+ \{-1/265 \times \log(1/265) - 264/265 \times \log(264/265)\} \times 265/365$
- $= 0.048$[bit]
- つまり，**天気予報にほとんど情報の価値がない**

20

## 前回の小レポート(2)

- 授業で扱った以下のマルコフ情報源のエントロピーを計算せよ．

abcac caabc cccaa abcaa ccaca ccaaa aabcc

（a は 1/2 の確率で a, 1/4 の確率で b, 1/4 の確率で c；b は必ず c；c は 1/2 の確率で a, 1/2 の確率で c にそれぞれ遷移）

21

## 前回の小レポート(2)

（a は 1/2 の確率で a, 1/4 の確率で b, 1/4 の確率で c；b は必ず c；c は1/2 の確率で a, 1/2 の確率で c にそれぞれ遷移）

| | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | 1/2 | 0 | 1/2 |
| b | 1/4 | 0 | 0 |
| c | 1/4 | 1 | 1/2 |

$(A-I)q=0$から，定常確率$q$は

$q = [4/9, 1/9, 4/9]^t$

- $-\Sigma a_{*a}\log a_{*a} = -1/2\log(1/2) - 1/4\log(1/4)\ ) - 1/4\log(1/4) = 3/2$
- $-\Sigma a_{*b}\log a_{*b} = -1\log(1) = 0$
- $-\Sigma a_{*c}\log a_{*c} = -1/2\log(1/2) = -1/2\log(1/2) = 1$

$H = 4/9 \times 3/2 + 1/9 \times 0 + 4/9 \times 1 = 10/9$

22

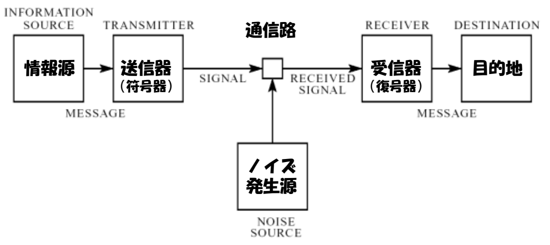
## 通信路のモデル化

## 符号の工夫で情報伝達が良くなる

- 短い記号列で済むようになる（**圧縮**）
- ノイズが混入しても正しく伝えられる（**誤り検出・誤り訂正**）
- 他人が見ても意味がわからないようにできる（**暗号**）

24

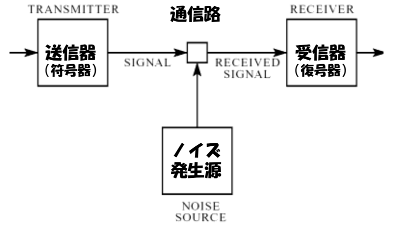
## シャノンの情報通信のモデル




From C. E. Shannon (1948) A mathematical theory of communication. The Bell Sys. Tech. J. 27: 379-423. 623-656.

25

## 通信路符号化




- 情報源の挙動をノイズのある通信路を通じて伝送する際に，受信側で得られる情報の信頼性をなるべく上げるような符号化の方法を考える

26

## 情報源符号化と通信路符号化

- 情報源符号化：
  確率的にふるまう情報源において
  いかに効率よく情報を表現するか

- 通信路符号化：
  確率的にふるまう通信路において
  いかに正確に情報を伝達するか

27

## 確率的にふるまう通信路？

**つねに100％正確な通信手段は存在しない**

熱力学的ノイズ，放射線，減衰，中継器の故障，etc.

現在の通信機器やネットワークが正確に
情報を伝えているように見えるのは
誤り訂正や自動再送信などの工夫のおかげ

28

## 用語の定義

- 入力：送信者が通信路に渡すデータ
- 出力：通信路が受信者に渡すデータ

- 入力記号群（アルファベット）*S*
- 出力記号群（アルファベット）*R*

入力・出力それぞれの表現に用いられる記号の集合（連続値も離散値もありうる）
（通常 *S* = *R* だが，たまに違う場合もある）

29

## 確率的な通信路のモデル

- 確率的な通信路は，*S* の要素で構成される記号列 *x* が入力されたときに *R* の要素で構成される記号列 *y* が出力される確率（条件付確率）の集合 $\{p(y|x)\}$ で定義される

$\{p(y|x)\}$ をこの通信路の遷移確率と呼ぶ

30

## 離散無記憶通信路

- 入出力に用いられる記号が離散的（有限個の記号）
- 任意の入力記号列 $\mathbf{x} = x_1 x_2 \ldots x_n$，出力記号列 $\mathbf{y} = y_1 y_2 \ldots y_n$ に対して

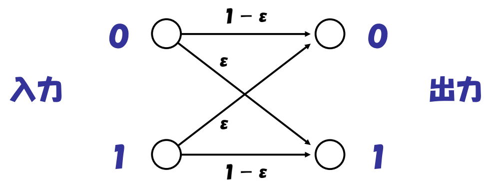
$$p(\mathbf{y} \mid \mathbf{x}) = p(y_1 \mid x_1)\, p(y_2 \mid x_2) \ldots p(y_n \mid x_n)$$

つまり，各記号の伝送過程が
前後に関係なく互いに独立な通信路

31

## 2元対称通信路モデル

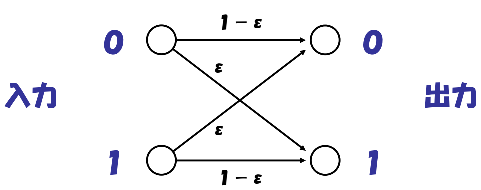
- 1文字あたり確率 $\varepsilon$ の割合でビット反転が起こる（つまりエラー！！）




32

## エラーとも限らない

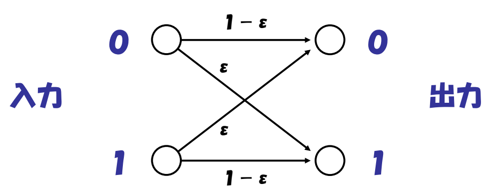
- $\varepsilon$ がもし1なら，「必ず反転する」のだから，ある意味確実に送れているとも言える




33

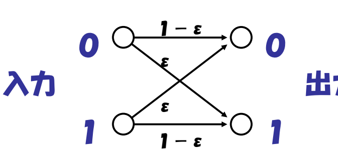
## 例題

- 下記の2元対称通信路において
  $p(01001 \mid 00101)$ を求めよ．




34

## 例題




0 0 1 0 1
↓ ↓ ↓ ↓ ↓
0 1 0 0 1

$p(01001 \mid 00101)$

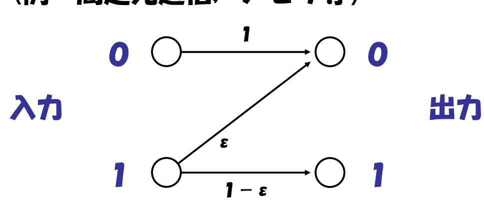
= ・ ・ ・ ・

=

35

## Z通信路モデル

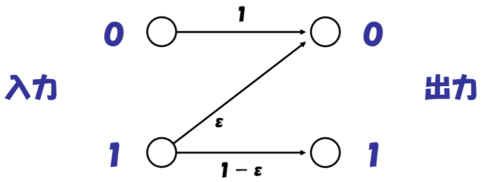
- 1→0（もしくは0→1）の1方向だけ通信時のエラーが生じる通信路
（例：高速光通信，メモリ等）




36

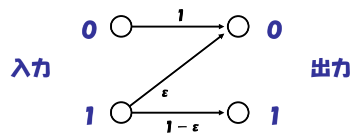
## 例題

- 下記のZ通信路において
  $p(01001 \mid 00101)$ を求めよ．




37

## 例題



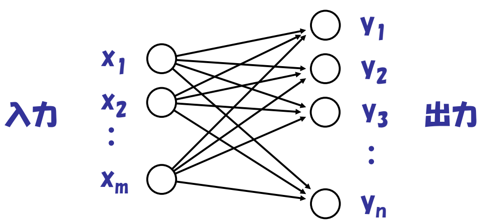

0 0 1 0 1
↓ ↓ ↓ ↓ ↓
0 1 0 0 1

$p(01001 \mid 00101)$
$= \quad \cdot \quad \cdot$
$=$

38

## 一般的には．．．

- 2つの集合間の（重み付き）2部グラフで表される




39

## 例題

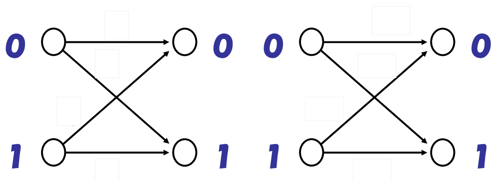
- 以下のような通信路を離散無記憶通信路とみなし，その遷移確率を求めよ．

| 入力 | 出力 |
|---|---|
| 01001 | 01001 |
| 00111 | 00111 |
| 11100 | 01101 |
| 10111 | 10110 |

40

## 例題

| 入力 | 出力 |
|---|---|
| 01001 | 01001 |
| 00111 | 00111 |
| 11100 | 01101 |
| 10111 | 10110 |




41

# 通信路容量

## 通信路自体の性能を測る

- 入力Xと出力Yの間の相関が高いほど性能はよい（出力Yがランダムだと悪い）

- XとYの間の相互情報量で性能を表す

$$I(X{:}Y) = H(X) + H(Y) - H(XY)$$
$$= H(Y) - H(Y \mid X)$$

- Xの確率分布が変わると I(X:Y) も変わる
- I(X:Y) の最大値を特に 通信路容量 と呼ぶ

43

## （復習）：相互情報量

- 事象系　X ＝ ツバメが{低空飛行する，しない}
- 事象系　Y ＝雨が{降る，降らない}
- 条件付エントロピーH(X|Y)
- 相互情報量 I(X:Y)= I(Y:X)=H(Y)−H(Y|X)
  二つの事象系の「結びつきの強さ」を表す量

44

## （復習）条件付エントロピー

- 「ある一方の事象系である事象が既に起こってしまったときにもう一方の事象系が持つエントロピー」の期待値

$$H(Y \mid X) = -\sum_i \sum_j p(x_i)\, p(y_j \mid x_i) \log p(y_j \mid x_i)$$
$$= -\sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log p(y_j \mid x_i)$$

45

## 通信路容量の直観的意味

- 1文字送信するごとに，実質何ビット伝えることができるか，の上限

- 理想的な通信路なら1文字送信するごとに1ビット伝えられる

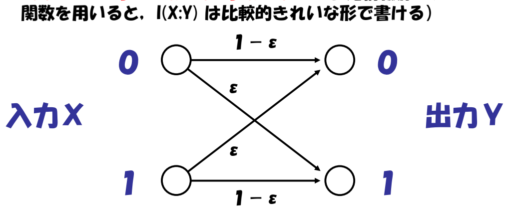
- 完全にランダムになってしまう通信路では，送信側の情報を伝えることは不可能

46

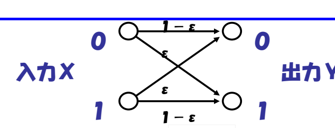
## 例題

- 下記の2元対称通信路における I(X:Y) の最大値（通信路容量）を求めよ．

（Xにおける記号の確率分布を （p, 1−p） とおいてみる：h(x) = −x log x − (1−x) log (1−x) なる2元情報源エントロピー関数を用いると，I(X:Y) は比較的きれいな形で書ける）




47

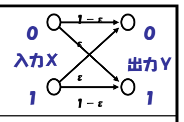



入力X：P(0)=pとする．P(1)=
出力Y：P(0)=qとする．P(1)=
（qはpで表せるが今回は表さないで良い）

- P(Y|X)：
  P(0|0)= ，P(0|1)= ，P(1|0)= ，P(1|1)=

- P(Y, X)=P(Y|X)×P(X)：
  P(0, 0)=
  P(0, 1)=
  P(1, 0)=
  P(1, 1)=

48




$H(Y) = -q \times \log(q) - (1-q) \times \log(1-q)$
$= h(q)$ とおく

$H(Y|X) = -\ \Sigma_i\ \Sigma_j\ p(x_i, y_j)\ \log\ p(y_j \mid x_i)$

= (x=0,y=0)

(x=1,y=0)

(x=0,y=1)

(x=1,y=1)

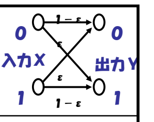
=

=

→H(Y|X)は，pに依存しない！！

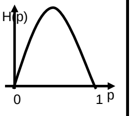
→I(Y:X)=H(Y)−H(Y|X)の最大値は，H(Y) 最大のとき．

49




H(Y) =h(q)の最大値はq=0.5のときで，1
（第一回レポート）

よって，max(I(Y:X))=
=




意味

エラー無し：
H(Y|X)=0
⇒通信路容量=1,
1bitを確実に送れる

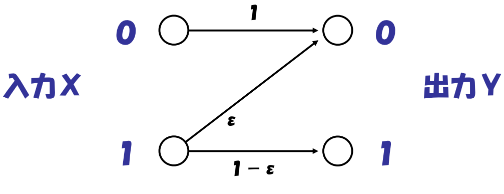
エラーだらけ：
ε=0.5, H(Y|X)=1,
⇒通信路容量は0

50

## 小レポート(1)

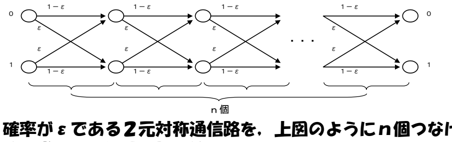
- 下記のZ通信路における I(X:Y) の最大値（通信路容量）を求めよ．

（X・Yとも，1の方の確率を変数で表すときれいな形で書ける）




51

## 小レポート(2)




- 誤り確率がεである2元対称通信路を，上図のようにn個つなげた通信路を考える．以下の問に答えよ．

1. k個の通信路を通り抜けた時点での誤り確率，すなわち最初に0を入力したときk個目の通信路の出口に1が出力されている（あるいはその逆の）確率を $\varepsilon_k$ とする．$\varepsilon_{k+1}$ を $\varepsilon_k$ とεを用いて表せ．
2. ある定数と $\varepsilon_k$ の差分に着目すると，1. で得られた漸化式を等比数列の形に書き直すことができる．この性質を利用して $\varepsilon_n$ を求めよ．
3. この通信路全体の通信路容量をεとnで表せ．またn→∞の場合，通信路容量はどのようになるかを示せ．

52

## 付録：底が2の対数表(1/2)

| x | log2x | x | log2x | x | log2x | x | log2x | x | log2x | x | log2x | x | log2x | x | log2x |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.01 | −6.64 | 0.26 | −1.94 | 0.51 | −0.97 | 0.76 | −0.40 | 1.1 | 0.14 | 3.6 | 1.85 | 6.1 | 2.61 | 8.6 | 3.10 |
| 0.02 | −5.64 | 0.27 | −1.89 | 0.52 | −0.94 | 0.77 | −0.38 | 1.2 | 0.26 | 3.7 | 1.89 | 6.2 | 2.63 | 8.7 | 3.12 |
| 0.03 | −5.06 | 0.28 | −1.84 | 0.53 | −0.92 | 0.78 | −0.36 | 1.3 | 0.38 | 3.8 | 1.93 | 6.3 | 2.66 | 8.8 | 3.14 |
| 0.04 | −4.64 | 0.29 | −1.79 | 0.54 | −0.89 | 0.79 | −0.34 | 1.4 | 0.49 | 3.9 | 1.96 | 6.4 | 2.68 | 8.9 | 3.15 |
| 0.05 | −4.32 | 0.30 | −1.74 | 0.55 | −0.86 | 0.80 | −0.32 | 1.5 | 0.58 | 4.0 | 2.00 | 6.5 | 2.70 | 9.0 | 3.17 |
| 0.06 | −4.06 | 0.31 | −1.69 | 0.56 | −0.84 | 0.81 | −0.30 | 1.6 | 0.68 | 4.1 | 2.04 | 6.6 | 2.72 | 9.1 | 3.19 |
| 0.07 | −3.84 | 0.32 | −1.64 | 0.57 | −0.81 | 0.82 | −0.29 | 1.7 | 0.77 | 4.2 | 2.07 | 6.7 | 2.74 | 9.2 | 3.20 |
| 0.08 | −3.64 | 0.33 | −1.60 | 0.58 | −0.79 | 0.83 | −0.27 | 1.8 | 0.85 | 4.3 | 2.10 | 6.8 | 2.77 | 9.3 | 3.22 |
| 0.09 | −3.47 | 0.34 | −1.56 | 0.59 | −0.76 | 0.84 | −0.25 | 1.9 | 0.93 | 4.4 | 2.14 | 6.9 | 2.79 | 9.4 | 3.23 |
| 0.10 | −3.32 | 0.35 | −1.51 | 0.60 | −0.74 | 0.85 | −0.23 | 2.0 | 1.00 | 4.5 | 2.17 | 7.0 | 2.81 | 9.5 | 3.25 |
| 0.11 | −3.18 | 0.36 | −1.47 | 0.61 | −0.71 | 0.86 | −0.22 | 2.1 | 1.07 | 4.6 | 2.20 | 7.1 | 2.83 | 9.6 | 3.26 |
| 0.12 | −3.06 | 0.37 | −1.43 | 0.62 | −0.69 | 0.87 | −0.20 | 2.2 | 1.14 | 4.7 | 2.23 | 7.2 | 2.85 | 9.7 | 3.28 |
| 0.13 | −2.94 | 0.38 | −1.40 | 0.63 | −0.67 | 0.88 | −0.18 | 2.3 | 1.20 | 4.8 | 2.26 | 7.3 | 2.87 | 9.8 | 3.29 |
| 0.14 | −2.84 | 0.39 | −1.36 | 0.64 | −0.64 | 0.89 | −0.17 | 2.4 | 1.26 | 4.9 | 2.29 | 7.4 | 2.89 | 9.9 | 3.31 |
| 0.15 | −2.74 | 0.40 | −1.32 | 0.65 | −0.62 | 0.90 | −0.15 | 2.5 | 1.32 | 5.0 | 2.32 | 7.5 | 2.91 | 10.0 | 3.32 |
| 0.16 | −2.64 | 0.41 | −1.29 | 0.66 | −0.60 | 0.91 | −0.14 | 2.6 | 1.38 | 5.1 | 2.35 | 7.6 | 2.93 | | |
| 0.17 | −2.56 | 0.42 | −1.25 | 0.67 | −0.58 | 0.92 | −0.12 | 2.7 | 1.43 | 5.2 | 2.38 | 7.7 | 2.94 | | |
| 0.18 | −2.47 | 0.43 | −1.22 | 0.68 | −0.56 | 0.93 | −0.10 | 2.8 | 1.49 | 5.3 | 2.41 | 7.8 | 2.96 | | |
| 0.19 | −2.40 | 0.44 | −1.18 | 0.69 | −0.54 | 0.94 | −0.09 | 2.9 | 1.54 | 5.4 | 2.43 | 7.9 | 2.98 | | |
| 0.20 | −2.32 | 0.45 | −1.15 | 0.70 | −0.51 | 0.95 | −0.07 | 3.0 | 1.58 | 5.5 | 2.46 | 8.0 | 3.00 | | |
| 0.21 | −2.25 | 0.46 | −1.12 | 0.71 | −0.49 | 0.96 | −0.06 | 3.1 | 1.63 | 5.6 | 2.49 | 8.1 | 3.02 | | |
| 0.22 | −2.18 | 0.47 | −1.09 | 0.72 | −0.47 | 0.97 | −0.04 | 3.2 | 1.68 | 5.7 | 2.51 | 8.2 | 3.04 | | |
| 0.23 | −2.12 | 0.48 | −1.06 | 0.73 | −0.45 | 0.98 | −0.03 | 3.3 | 1.72 | 5.8 | 2.54 | 8.3 | 3.05 | | |
| 0.24 | −2.06 | 0.49 | −1.03 | 0.74 | −0.43 | 0.99 | −0.01 | 3.4 | 1.77 | 5.9 | 2.56 | 8.4 | 3.07 | | 53 |
| 0.25 | −2.00 | 0.50 | −1.00 | 0.75 | −0.42 | 1.00 | 0.00 | 3.5 | 1.81 | 6.0 | 2.58 | 8.5 | 3.09 | | |

## 付録：底が2の対数表(2/2)

| x | log2x | x | log2x | x | log2x | x | log2x |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 3.46 | 36 | 5.17 | 61 | 5.93 | 86 | 6.43 |
| 12 | 3.58 | 37 | 5.21 | 62 | 5.95 | 87 | 6.44 |
| 13 | 3.70 | 38 | 5.25 | 63 | 5.98 | 88 | 6.46 |
| 14 | 3.81 | 39 | 5.29 | 64 | 6.00 | 89 | 6.48 |
| 15 | 3.91 | 40 | 5.32 | 65 | 6.02 | 90 | 6.49 |
| 16 | 4.00 | 41 | 5.36 | 66 | 6.04 | 91 | 6.51 |
| 17 | 4.09 | 42 | 5.39 | 67 | 6.07 | 92 | 6.52 |
| 18 | 4.17 | 43 | 5.43 | 68 | 6.09 | 93 | 6.54 |
| 19 | 4.25 | 44 | 5.46 | 69 | 6.11 | 94 | 6.55 |
| 20 | 4.32 | 45 | 5.49 | 70 | 6.13 | 95 | 6.57 |
| 21 | 4.39 | 46 | 5.52 | 71 | 6.15 | 96 | 6.58 |
| 22 | 4.46 | 47 | 5.55 | 72 | 6.17 | 97 | 6.60 |
| 23 | 4.52 | 48 | 5.58 | 73 | 6.19 | 98 | 6.61 |
| 24 | 4.58 | 49 | 5.61 | 74 | 6.21 | 99 | 6.63 |
| 25 | 4.64 | 50 | 5.64 | 75 | 6.23 | 100 | 6.64 |
| 26 | 4.70 | 51 | 5.67 | 76 | 6.25 | | |
| 27 | 4.75 | 52 | 5.70 | 77 | 6.27 | | |
| 28 | 4.81 | 53 | 5.73 | 78 | 6.29 | | |
| 29 | 4.86 | 54 | 5.75 | 79 | 6.30 | | |
| 30 | 4.91 | 55 | 5.78 | 80 | 6.32 | | |
| 31 | 4.95 | 56 | 5.81 | 81 | 6.34 | | |
| 32 | 5.00 | 57 | 5.83 | 82 | 6.36 | | |
| 33 | 5.04 | 58 | 5.86 | 83 | 6.38 | | |
| 34 | 5.09 | 59 | 5.88 | 84 | 6.39 | | |
| 35 | 5.13 | 60 | 5.91 | 85 | 6.41 | | |

54