インタラクティブシステム論 第１０回

梶本裕之
Twitter ID kajimoto
ハッシュタグ #ninshiki

日程

7/17のみ講義室が A201教室に変更

行列

行列．．．１，２年でやったはず

今日の内容

- ●固有値とは，固有ベクトルとは
- ●行列の対角化：なにをしたことになるか，なぜうれしいのか
- ●情報理論・制御における行列の応用事例

キーワードは，

固有値，固有ベクトル，対角化

行列：データ列を変換するもの

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

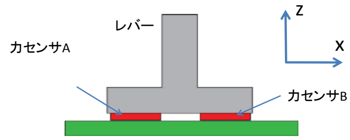
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

（例１）
y:観測データ，A:システムの性質，x:媒介変数

（例２）
y:フーリエ空間での周波数成分，A:フーリエ変換行列，
x:実空間でのデータ系列

（例）2軸力センサ

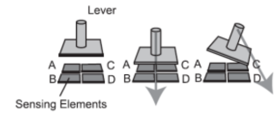
（例）2軸力センサ



$$F_Z = x_A + x_B$$
$$F_X = k(x_A - x_B)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}}_{\text{2x1ベクトル}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & -k \end{bmatrix}}_{\text{2x2行列}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}}_{\text{2x1ベクトル}}$$

（例）多軸力センサ



$$F_Z = k_1(x_A + x_B + x_C + x_D)$$
$$F_X = k_2((x_A + x_B) - (x_C + x_D))$$
$$F_Y = k_3((x_A + x_C) - (x_B + x_D))$$

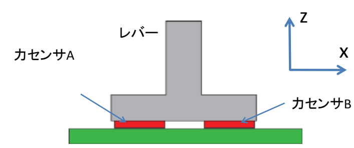
$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_z \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix}}_{3} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}}_{\text{3x4行列}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}}_{4}$$

一般には正方行列ではない！！

（例）6軸力センサには8つ以上のセンサエレメント内蔵

6軸力センサによるフィードバック

力センサのキャリブレーション（較正）

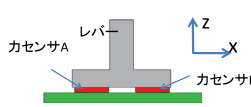


$$F_Z = k_1 x_A + k_2 x_B$$
$$F_X = k_3 x_A + k_4 x_B$$

$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

k1～k4のパラメータは元々未知．
これを求めなければ使えない！！

逆行列



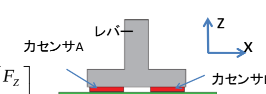
$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

これを $\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ と書く．

ここで，
「ある力を加えたときの各センサ出力は？」
という逆の関係を考える．

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{G}\mathbf{f} \qquad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

逆行列の「測定」



$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{f} \qquad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

(1) Fz=1，Fx=0の力を加え，各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \boxed{\quad\quad} = \boxed{\quad\quad}$$

各センサの出力に，逆行列の成分g1，g3が現れる！

(2) Fz=0,Fx=1の力を加え，各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \boxed{\quad\quad} = \boxed{\quad\quad}$$

各センサの出力に，逆行列の成分g2，g4が現れる！

逆行列の「測定」

$$\mathbf{x}=\mathbf{Gf}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} \qquad \begin{bmatrix}x_A\\x_B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g_1&g_2\\g_3&g_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_Z\\F_X\end{bmatrix}$$

G=A^{-1}の成分, g1〜g4が得られたので, その逆行列を計算すればAが得られる.

$$\mathbf{f}=\mathbf{Ax}$$

まとめると,

$$\left.\begin{aligned}\begin{bmatrix}x_A\\x_B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g_1&g_2\\g_3&g_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g_1\\g_3\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}x_A\\x_B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g_1&g_2\\g_3&g_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g_2\\g_4\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \begin{bmatrix}g_1&g_2\\g_3&g_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g_1&g_2\\g_3&g_4\end{bmatrix}$$

行列に単位行列をかけたことに相当

単位力でなくて良い

1回目の入力 1回目の出力

$$\begin{bmatrix}g_1&g_2\\g_3&g_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_{z1}&f_{z2}\\f_{x1}&f_{x2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m_1&m_2\\m_1&m_2\end{bmatrix}$$

2回目の入力 2回目の出力

$$\mathbf{GF}=\mathbf{M}$$

$$\mathbf{G}=\mathbf{MF}^{-1}$$

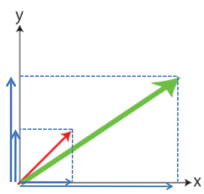
1. 2回**既知の**力ベクトルを加えて, 各センサの出力を得る
2. 力ベクトルを並べたものを力行列F, センサ出力を並べたものを行列Mとする
3. 力行列の逆行列F^{-1}をMにかければ, 行列Gが得られる.
4. **Gの逆行列が望んだ「較正行列」A**

ほとんどすべての行列は, ベクトルを「引き延ばす」ものである(1)

$$\mathbf{v}=\mathbf{Au} \qquad \begin{bmatrix}v_x\\v_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t_{11}&t_{12}\\t_{21}&t_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\u_y\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}$$ の時,

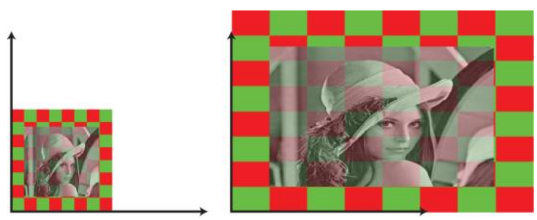
$$\begin{bmatrix}v_x\\v_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\u_y\end{bmatrix}=$$



(作用)x軸成分を3倍, y軸成分を2倍に引き延ばす

ほとんどすべての行列は, ベクトルを「引き延ばす」ものである(1)

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}$$



(作用)x軸成分を3倍, y軸成分を2倍に引き延ばす

ほとんどすべての行列は, ベクトルを「引き延ばす」ものである(2)

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}$$ は, x軸成分を3倍, y軸成分を2倍に引き延ばす

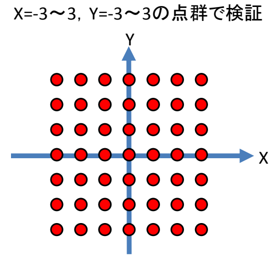
では,

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}8&-2\\3&1\end{bmatrix}$$ の時は?. . . . よく分からない.

試してみる

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}8&-2\\3&1\end{bmatrix}$$ で, 平面上の点群はどう移動するか

X=-3〜3, Y=-3〜3の点群で検証

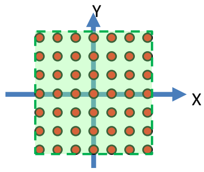


Scilabコード

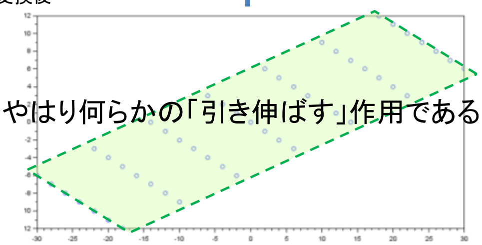
```
A=[8,-2;3,1];
s=[];
t=[];
for x=-3:3
  for y=-3:3
     r=A*[x;y];
     s=[s,r(1)]; //x座標格納
     t=[t,r(2)]; //y座標格納
  end
end
plot(s,t,'o');
```

試してみる

変換前



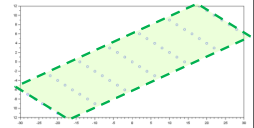
変換後



やはり何らかの「引き伸ばす」作用である

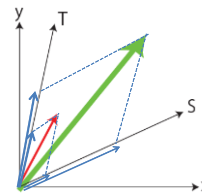
ほとんどすべての行列は，ベクトルを「引き延ばす」ものである（2）

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ の作用は



●謎のS軸成分をs倍，
●謎のT軸成分をt倍
に引き延ばすことである

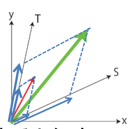
ただしもはや，
このS,T軸は直交していない.



固有ベクトルと固有値

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$

固有ベクトル，固有値とは，
謎のS，T軸，およびs,t倍
のことである.



（求める手続き）
(1) λ倍されるだけで方向不変のベクトルがあると仮定

$$\mathbf{Au}=\lambda\mathbf{u}$$

(2) 式変形

$$\mathbf{Au}=\lambda\mathbf{u}=\lambda\mathbf{Iu}$$
$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{u}=\mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix}8-\lambda & -2\\ 3 & 1-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}=0$$

固有ベクトルと固有値

$$\begin{bmatrix}8-\lambda & -2\\ 3 & 1-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}=0$$

$$(a-\lambda)u_x+bu_y=0 \longrightarrow u_y=-(a-\lambda)u_x/b$$
$$cu_x+(d-\lambda)u_y=0$$

$$cu_x-(d-\lambda)(a-\lambda)u_x/b=0$$
$$\left((a-\lambda)(d-\lambda)-bc\right)u_x=0$$

$$\therefore (a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0$$

この解λ1，λ2を固有値と呼び，
対応するベクトルを固有ベクトルと呼ぶ.

固有ベクトルと固有値

$$\begin{bmatrix}8-\lambda & -2\\ 3 & 1-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}=0$$

$\lambda_1=2$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix}8-2 & -2\\ 3 & 1-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}=0$$

大きさを1とすれば， $k=1/\sqrt{10}$

$\lambda_2=7$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix}8-7 & -2\\ 3 & 1-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}=0$$

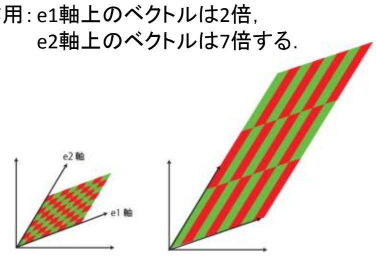
大きさを1とすれば， $k=1/\sqrt{5}$

作用：e1軸上のベクトルは2倍，
　　　e2軸上のベクトルは7倍する.

固有ベクトルと固有値

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$

作用：e1軸上のベクトルは2倍，
　　　e2軸上のベクトルは7倍する.

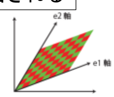


- やはり引き延ばす作用である
- 固有ベクトル上のベクトルは，固有値倍される

行列と座標変換

- 引き延ばす作用である
- 固有ベクトル上のベクトルは，固有値倍される

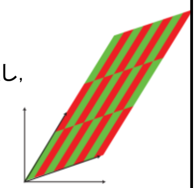
わかりにくい．．．



行列の作用を，

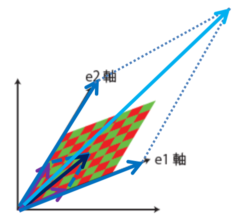
（1）引き延ばし軸での成分表示に変換し，
（2）各成分を引き延ばし，
（3）合成して元に戻す

ように分解すればわかりやすいはず？？



まとめると

行列Tの作用は次の3段階に分解できる．
（1）引き延ばし軸での成分表示に変換し，
（2）各成分を引き延ばし，
（3）合成して元に戻す



（3）合成して元に戻す操作，から考える

行列の作用を，
（1）引き延ばし軸での成分表示に変換し，
（2）各成分を引き延ばし，
（3）合成して元に戻す

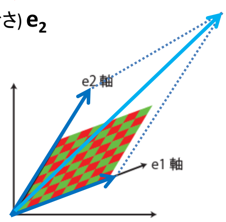
この操作は単なるベクトルの足し算にすぎない

($\mathbf{e}_1$成分の大きさ) $\mathbf{e}_1$＋($\mathbf{e}_2$成分の大きさ) $\mathbf{e}_2$

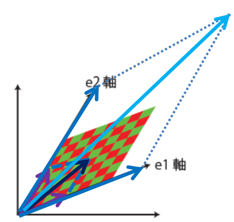
$$= [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2]\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1\text{軸成分} \\ \mathbf{e}_2\text{軸成分} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2]$ とおいて

$$= \mathbf{P}\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1\text{軸成分} \\ \mathbf{e}_2\text{軸成分} \end{bmatrix}$$



行列Tの作用は次の3段階に分解できる．
（1）引き延ばし軸での成分表示に変換し，
（2）各成分を引き延ばし，
（3）合成して元に戻す



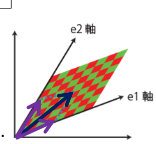
（1）引き延ばし軸での成分表示

行列の作用を，
（1）引き延ばし軸での成分表示に変換し，
（2）各成分を引き延ばし，
（3）合成して元に戻す

（3）「合成」が，

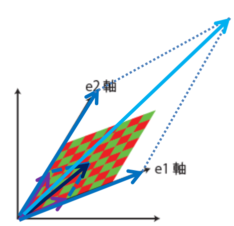
$$\mathbf{P}\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1\text{軸成分} \\ \mathbf{e}_2\text{軸成分} \end{bmatrix}$$

で出来るのだから，（1）はその逆のはず．
すなわち



$\mathbf{P}^{-1}\begin{bmatrix} x\text{軸成分} \\ y\text{軸成分} \end{bmatrix}$ により**引き延ばし軸での成分表示**ができる

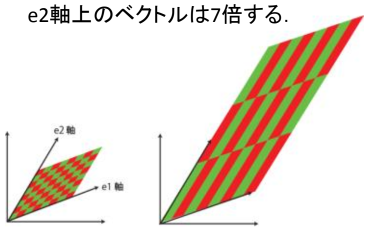
行列Tの作用は次の3段階に分解できる．
（1）引き延ばし軸での成分表示に変換し，
（2）各成分を引き延ばし，
（3）合成して元に戻す



固有ベクトルと固有値（再）

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

作用：e1軸上のベクトルは2倍，
e2軸上のベクトルは7倍する．



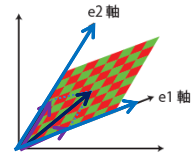
•やはり引き延ばす作用である
•固有ベクトル上のベクトルが，固有値倍される

（2）引き延ばし軸での引き延ばし

行列の作用を，
（1）引き延ばし軸での成分表示に変換し，
（2）各成分を引き延ばし，
（3）合成して元に戻す

各成分を
固有ベクトル$\mathbf{e}_1$軸に沿って固有値λ_1倍，
固有ベクトル$\mathbf{e}_2$軸に沿って固有値λ_2倍する．

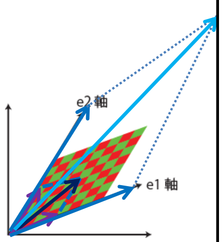
この操作は，



$$\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1\text{軸成分を}\lambda_1\text{倍}\\ \mathbf{e}_2\text{軸成分を}\lambda_1\text{倍}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1\text{軸成分}\\ \mathbf{e}_2\text{軸成分}\end{bmatrix}$$

まとめると

行列Tの作用は次の3段階に分解できる．
（1）引き延ばし軸での成分表示に変換し，
（2）各成分を引き延ばし，
（3）合成して元に戻す



$$\mathbf{Ax}=\mathbf{P}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_0\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$$

固有値を対角成分に並べた行列を**T**と置く． $\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_0\end{bmatrix}$

$$\mathbf{Ax}=$$

行列の対角化を数式で導出

行列の対角化を数式で導出する。
まず、2つの固有値をλ1、λ2、固有ベクトルをe1,e2とする。

2つの式を「まとめて」書くと次のようになる。

[e1,e2]をP、固有値を対角成分に持つ行列をTと書き、左辺のPを右辺に移項すると

（こちらのほうが簡単！
この式が持つ意味は前述のとおり）

重要な応用：$\mathbf{A^n}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^n\mathbf{x}&=\left(\mathbf{PTP}^{-1}\right)^n\mathbf{x}\\ &=\mathbf{PTP}^{-1}\mathbf{PTP}^{-1}\mathbf{PTP}^{-1}\cdots\mathbf{PTP}^{-1}\mathbf{x}\\ &=\mathbf{PT}^n\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}\\ &=\mathbf{P}\begin{bmatrix}\lambda_1{}^n & 0\\ 0 & \lambda_2{}^n\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}\end{aligned}$$

$$\because \mathbf{T}^n=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1{}^n & 0\\ 0 & \lambda_2{}^n\end{bmatrix}$$

行列のn乗を簡単に計算することができる

重要な結論：nが非常に大きくなった時の$\mathbf{A^n}$

$$\mathbf{A}^n\mathbf{x}=\mathbf{P}\begin{bmatrix}\lambda_1{}^n & 0\\ 0 & \lambda_2{}^n\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$$

行列の固有値λの絶対値が引き延ばしの倍率だから，

固有値が

●一つでも1より大きければ，A^nは**発散**する
●全て1より小さければ，A^nは0に収束する

例：$\mathbf{A}^n$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^2=\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}58 & -18\\ 27 & -5\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^3=\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}58 & -18\\ 27 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}410 & -134\\ 201 & -59\end{bmatrix}$$

$P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{5}\\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{5}\end{bmatrix}$ $\lambda_1=2$ $\lambda_2=7$ を代入して，

$$\mathbf{A}^3=\mathbf{P}\mathbf{T}^3\mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{5}\\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^3 & 0\\ 0 & 7^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{5}\\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{5}\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\cdots=\begin{bmatrix}410 & -134\\ 201 & -59\end{bmatrix}$$

固有値が大きいのでどんどん大きくなる

ほとんどすべての行列は，ベクトルを「引き延ばす」ものである（3）

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

の時は？．．．．回転と習ったはず

以前と同様に固有値と固有ベクトルを求めてみる．

$$\begin{bmatrix}\cos\theta-\lambda & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}=0$$

$$(a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0$$

$$(\cos\theta-\lambda)(\cos\theta-\lambda)+\sin^2\theta=0$$

回転行列の固有値＝exp(jθ)

$$(\cos\theta-\lambda)(\cos\theta-\lambda)+\sin^2\theta=0$$

$$\cos^2\theta-2\lambda\cos\theta+\lambda^2+\sin^2\theta=0$$

$$\lambda^2-2\lambda\cos\theta+1=0$$

$$\lambda=\frac{2\cos\theta\pm\sqrt{4\cos^2\theta-4}}{2}$$

$$=\frac{2\cos\theta\pm j\sqrt{4\sin^2\theta}}{2}$$

$$=\cos\theta\pm j\sin\theta$$

$$=\exp(\pm j\theta)$$

回転行列の固有ベクトル

$\cos\theta+j\sin\theta$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix}\cos\theta-\lambda & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta-\cos\theta-j\sin\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta-\cos\theta-j\sin\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}$$

$$=\sin\theta\begin{bmatrix}-j & -1\\ 1 & -j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}=0$$

$\therefore u_x=ju_y$ $\quad \mathbf{e}_1=k\begin{bmatrix}j\\ 1\end{bmatrix}$ 大きさを1とすれば例えば，$k=1/\sqrt{2}$

$\cos\theta-j\sin\theta$ に対応する固有ベクトルは

$\mathbf{e}_2=k\begin{bmatrix}1\\ j\end{bmatrix}$ 大きさを1とすれば例えば，$k=1/\sqrt{2}$

（参考）回転行列も（拡張された）引き延ばしである

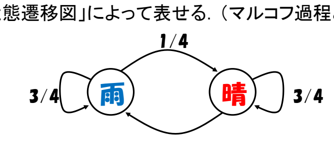
•一般の行列は，固有値，固有ベクトル共に複素数．

•x,y軸に加えて，複素軸も含めた4次元空間中でこれまでと同様の引き延ばしを行う演算とみなせる．

•複素固有値の絶対値が引き延ばし倍率，偏角が回転角度を表す．

情報理論における行列の例

•ある日晴れた：次の日も晴れる確率は3/4，雨になる確率は1/4
•ある日雨：次の日も雨の確率は3/4，晴れる確率は1/4
これは「状態遷移図」によって表せる．（マルコフ過程と呼ぶ）

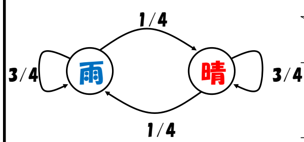


•ある日晴れた⇒次の次の日も晴れる確率は？

（回答）
次の日晴れて，次の次の日晴れる
次の日雨になって，次の次の日晴れる
合わせて，

では，次の次の次の日だと？100日後だと？

情報理論における行列の例



X_t \ X_{t-1}	晴	雨
晴	3/4	1/4
雨	1/4	3/4

状態遷移図を行列で表すことで，ある日の天気の確率分布(X_{t-1})から次の日の天気の確立分布(X_t)を得ることができる．

次の日の天気の確率分布ベクトル　遷移確率行列　ある日の天気の確率分布ベクトル

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

情報理論における行列の例

ある日晴れた：確率分布ベクトルは[1, 0] なので，次の日は，

$$\begin{bmatrix} P_{晴} \\ P_{雨} \end{bmatrix} =$$

その次の日は，

$$\begin{bmatrix} P_{晴} \\ P_{雨} \end{bmatrix} =$$

一般にN日後は，

$$\begin{bmatrix} P_{晴} \\ P_{雨} \end{bmatrix} =$$

100日後は？無限日後は？

A^Nを求める．

$$\mathbf{A}^n\mathbf{x} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \lambda_1^{\ n} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\ n} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 3/4-\lambda & 1/4 \\ 1/4 & 3/4-\lambda \end{bmatrix} \right\| = 0$$

A^Nを求める．

$$\mathbf{A}^n\mathbf{x} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \lambda_1^{\ n} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\ n} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$$

$=$

$=$

これによって，n日後の晴れと雨の確率分布をもとめられる

無限日後に起きること

$$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 1/2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$ より

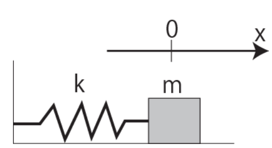
初日の，晴れの確率と雨の確率の合計値は明らかに1だから，

つまり，この遷移行列に従う場合，
初日の天気に関わらず無限日後は晴れと雨の確率は等しくなる．

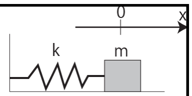
制御における行列

おもりの挙動をシミュレートしたい

```
m=1.0;  //重さ
k=1.0;  //ばね定数
x=1.0;  //初期位置
v=0;    //初期速度
dt=0.1; //時間刻み
record=[];//記録用
for time= 0:dt:10       //時刻
    F=-k*x;             //ばねによって生じる力
    a=F/m;              //生じる加速度
    v= v+a*dt;          //速度
    x= x+v*dt;          //位置
    record = [record,x]; //記録（※テクニック：ベクトルが伸びていく）
end
plot([0:dt:10],record);
```



制御における行列



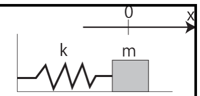

```
for time= 0:dt:10        //時刻
     F=-k*x;             //ばねによって生じる力
     a=F/m;              //生じる加速度
     v= v+a*dt;          //速度
     x= x+v*dt;          //位置
end
```

位置，速度，加速度を並べた「状態ベクトル」xを定義 $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x \\ v \\ a \end{bmatrix}$

上の関係から，dt時間後の新たな位置，速度，加速度は

$$\begin{bmatrix} x_n \\ v_n \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ v_{n-1} \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{Ax}$$

制御における行列



Scilabコード

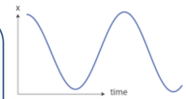
```
m=1.0;   //重さ
k=1.0;   //ばね定数
x=1.0;   //初期位置
v=0;     //初期速度
a=-k/m*x;  //初期加速度
dt=0.01;  //時間刻み
record=[];//記録用

state=[x;v;a];

A=[1,dt,0;0,1,dt;-k/m,0,0];

for time= 0:dt:10  //時刻
 state= A*state;
 record = [record,state(1)];
end

plot([0:dt:10],record);
```

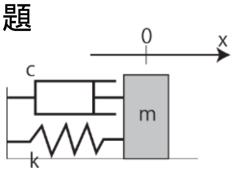


$$\begin{bmatrix} x_n \\ v_n \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & dt & 0 \\ 0 & 1 & dt \\ -k/m & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ v_{n-1} \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{Ax}_{n-1} = \cdots = \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0$$

•行列Aのn乗を使えば，
n時刻先の状態をシミュレート可能

•行列Aの固有値を見れば，
システムが将来(n=∞）収束するか
発散するか予測可能！

レポート課題



●ダンパを加えた際の行列を考え，
同様のシミレーションプログラムを書け

●行列Aの固有値の絶対値が1よりも小さいこと，
すなわち位置が収束することを確認し，コメントに記せ
(Scilabでは固有値はspec()で求められる)

注意：ここで導入した行列はあくまで導入編用で，
シミュレーションとしては不正確です．