

## インタラクティブシステム論 第10回

梶本裕之

Twitter ID kajimoto

ハッシュタグ #ninshiki

### 日程

4/11 イントロダクション  
 4/18 出張により休講  
 4/25 Scilabの紹介(西6号館3階PCルーム)  
 5/2 出張により休講  
 5/9 フーリエ変換  
 5/16 フーリエ変換と線形システム  
 5/23 出張により休講  
 5/30 信号処理の基礎  
 6/6 信号処理応用1(相関)  
 6/13 信号処理応用2(画像処理)  
 6/20 出張により休講:中間レポート  
 6/27 ラプラス変換  
 7/4 古典制御の基礎  
 7/11 行列  
 7/18 行列と最小二乗法  
 7/25 ロボティクス  
 8/1(?) ※授業等調整期間  
 8/3~9 期末テスト

# 行列

行列...1, 2年でやった...はず

今日の内容

- 固有値とは, 固有ベクトルとは
- 行列の対角化: どうやるか, **なぜうれしいのか**
- 制御における行列: さわりだけ

キーワードは,  
固有値, 固有ベクトル, 対角化

行列: データ列を変換するもの

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

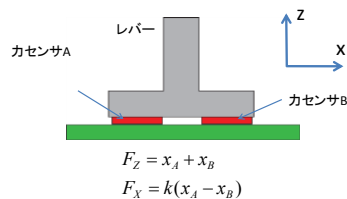
(例1)

y: 観測データ, A: システムの性質, x: 媒介変数

(例2)

y: フーリエ空間での周波数成分, A: フーリエ変換行列,  
x: 実空間でのデータ系列

(例) 2軸力センサ

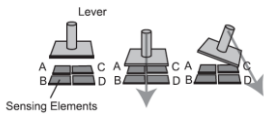


$$2 \times 1 \text{ ベクトル } \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} \quad 2 \times 1 \text{ ベクトル}$$

2x2 行列



(例) 多軸力センサ



Sensing Elements

$$F_z = k_1(x_A + x_B + x_C + x_D)$$

$$F_y = k_2((x_A + x_B) - (x_C + x_D))$$

$$F_x = k_3((x_A + x_C) - (x_B + x_D))$$

$$\begin{bmatrix} F_z \\ F_y \\ F_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \\ \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \\ \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}$$

3x4行列

一般には正方行列ではない！！

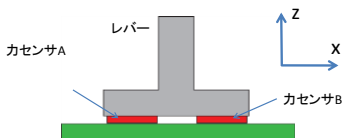
(例)6軸力センサには8つ以上のセンサエレメント内蔵



(参考)6軸力センサによるフィードバック



力センサのキャリブレーション(較正)



$$F_z = k_1 x_A + k_2 x_B$$

$$F_x = k_3 x_A + k_4 x_B$$

$$\begin{bmatrix} F_z \\ F_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

k1~k4のパラメータは元々未知。  
これを求めなければ使えない！！

逆行列

$$\begin{bmatrix} F_z \\ F_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

これを  $\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  と書く。

ここで、  
「ある力を加えたときの各センサ出力は？」  
という逆の関係を考える。

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{G}\mathbf{f}$$

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_z \\ F_x \end{bmatrix}$$

逆行列の「測定」

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{f}$$

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_z \\ F_x \end{bmatrix}$$

(1) Fz=1, Fx=0の力を加え、各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} \\ \phantom{0} & \phantom{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} \\ \phantom{0} & \phantom{0} \end{bmatrix}$$

各センサの出力に、逆行列の成分g1, g3が現れる！

(2) Fz=0, Fx=1の力を加え、各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} \\ \phantom{0} & \phantom{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} \\ \phantom{0} & \phantom{0} \end{bmatrix}$$

各センサの出力に、逆行列の成分g2, g4が現れる！



逆行列の「測定」

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}$$

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_z \\ F_x \end{bmatrix}$$

$\mathbf{G} = \mathbf{A}^{-1}$ の成分, g1~g4が得られたので、  
その逆行列を計算すればAが得られる。

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

まとめると、

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}$$

行列に単位行列をかけたことに相当



### 単位力でなくて良い

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{z1} \\ f_{x1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$


1回目の入力 (red)      1回目の出力 (red)

$$\mathbf{GF} = \mathbf{M}$$

2回目の入力 (green)      2回目の出力 (green)

$$\mathbf{G} = \mathbf{MF}^{-1}$$

- 2回**既知**のカベクトルを加えて、各センサの出力を得る
- カベクトルを並べたものをカ行列F、センサ出力を並べたものをカ行列Mとする
- カ行列の逆行列F<sup>-1</sup>をMにかければ、カ行列Gが得られる。
- Gの逆行列が望んだ「校正カ行列」A



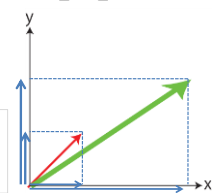
### ほとんどすべてのカ行列は、ベクトルを「引き延ばす」ものである(1)

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u} \quad \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$


A =  $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  の時、

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3u_x \\ 2u_y \end{bmatrix}$$

(作用)x軸成分を3倍、y軸成分を2倍に引き延ばす



### ほとんどすべてのカ行列は、ベクトルを「引き延ばす」ものである(1)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$


(作用)x軸成分を3倍、y軸成分を2倍に引き延ばす

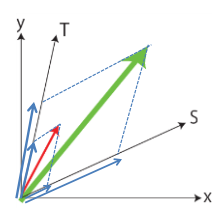
### ほとんどすべてのカ行列は、ベクトルを「引き延ばす」ものである(2)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{の時?} \dots \text{よく分からない.}$$

作用が、

- 謎のS軸成分をs倍、
- 謎のT軸成分をt倍

に引き延ばすことだと仮定してみる。



ただしもはや、謎のS,T軸は直交してなくて良い。

### 固有ベクトルと固有値

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

固有ベクトル、固有値とは、謎のS、T軸、およびs,t倍のことである。

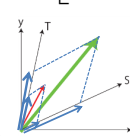
(求める手続き)

(1) λ倍されるだけで方向不変のベクトルがあると仮定

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

(2) 式変形

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} = \lambda\mathbf{I}\mathbf{u} \quad \begin{bmatrix} 8-\lambda & -2 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = 0$$


### 固有ベクトルと固有値

$$\begin{bmatrix} 8-\lambda & -2 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

$$(a-\lambda)u_x + bu_y = 0 \rightarrow u_y = -(a-\lambda)u_x / b$$

$$cu_x + (d-\lambda)u_y = 0$$

$$cu_x - (d-\lambda)(a-\lambda)u_x / b = 0$$

$$((a-\lambda)(d-\lambda) - bc)u_x = 0$$

$$\therefore (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$$

この解λ<sub>1</sub>, λ<sub>2</sub>を固有値と呼び、対応するベクトルを固有ベクトルと呼ぶ。

### 固有ベクトルと固有値

$$\begin{bmatrix} 8-\lambda & -2 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

$\lambda_1 = 2$  に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 8-2 & -2 \\ 3 & 1-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

大きさを1とすれば,  $k = 1/\sqrt{10}$

$\lambda_2 = 7$  に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 8-7 & -2 \\ 3 & 1-7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

大きさを1とすれば,  $k = 1/\sqrt{5}$

作用: e1軸上のベクトルは2倍,  
e2軸上のベクトルは7倍する.

### 固有ベクトルと固有値

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

作用: e1軸上のベクトルは2倍,  
e2軸上のベクトルは7倍する.

- やはり引き延ばす作用である
- ただし引き延ばす軸(固有ベクトル)は非直交

### 行列と座標変換

- 引き延ばす作用である
- ただし引き延ばす軸(固有ベクトル)は非直交(斜交)

いまいわかりにくい...

行列の作用を,

- (1) 引き延ばし軸での成分表示に変換し,
- (2) 各成分を引き延ばし,
- (3) 合成して元に戻す

ように分解すればわかりやすい...はず??

### まとめると

行列Tの作用は次の3段階に分解できる.

- (1) 引き延ばし軸での成分表示に変換し,
- (2) 各成分を引き延ばし,
- (3) 合成して元に戻す

### 引き延ばし軸での成分表示(誤)

行列の作用を,

- (1) 引き延ばし軸での成分表示に変換し,
- (2) 各成分を引き延ばし,
- (3) 合成して元に戻す

内積で成分を取れる?...誤り

斜交座標では  
「成分を取り出す操作」≠「内積」

先に(3)「合成」を考えよう。  
(1)はその逆の**はず**

### 合成して元に戻す操作

行列の作用を,

- (1) 引き延ばし軸での成分表示に変換し,
- (2) 各成分を引き延ばし,
- (3) 合成して元に戻す

この操作は単なるベクトルの足し算にすぎない  
(e1成分の大きさ)  $\mathbf{e}_1 + (\text{e2成分の大きさ}) \mathbf{e}_2$

$$= [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} \text{e1軸成分} \\ \text{e2軸成分} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2]$  とおいて

$$= \mathbf{P} \begin{bmatrix} \text{e1軸成分} \\ \text{e2軸成分} \end{bmatrix}$$

### 引き延ばし軸での成分表示(改)

行列の作用を、  
 (1) 引き延ばし軸での成分表示に変換し、  
 (2) 各成分を引き延ばし、  
 (3) 合成して元に戻す

(3)「合成」が、

$$P \begin{bmatrix} e_1 \text{軸成分} \\ e_2 \text{軸成分} \end{bmatrix}$$

出来るのだから、(1)はその逆のはず。  
すなわち

$$P^{-1} \begin{bmatrix} x \text{軸成分} \\ y \text{軸成分} \end{bmatrix}$$

により引き延ばし軸での成分表示ができる

### 引き延ばし軸での引き延ばし

行列の作用を、  
 (1) 引き延ばし軸での成分表示に変換し、  
 (2) 各成分を引き延ばし、  
 (3) 合成して元に戻す

各成分を  
固有ベクトル $e_1$ 軸に沿って $\lambda_1$ 倍、  
固有ベクトル $e_2$ 軸に沿って $\lambda_2$ 倍する。

この操作は、

$$\begin{bmatrix} e_1 \text{軸成分を} \lambda_1 \text{倍} \\ e_2 \text{軸成分を} \lambda_2 \text{倍} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \text{軸成分} \\ e_2 \text{軸成分} \end{bmatrix}$$

### 合成して元に戻す

行列の作用を、  
 (1) 引き延ばし軸での成分表示に変換し、  
 (2) 各成分を引き延ばし、  
 (3) 合成して元に戻す

この操作は、  
 (これまでに求めた $e_1$ 成分の大きさ)  $e_1$   
 +  
 (これまでに求めた $e_2$ 成分の大きさ)  $e_2$

$$= P \begin{bmatrix} \text{これまでに求めた} e_1 \text{軸成分} \\ \text{これまでに求めた} e_2 \text{軸成分} \end{bmatrix} \quad P = [e_1 \ e_2]$$

### まとめると

行列 $T$ の作用は次の3段階に分解できる。  
 (1) 引き延ばし軸での成分表示に変換し、  
 (2) 各成分を引き延ばし、  
 (3) 合成して元に戻す

$$Ax = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} P^{-1}x$$

固有値を対角成分に並べた行列を $T$ と置く。  $T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

$$Ax = \boxed{\phantom{P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} P^{-1}x}}$$

### 行列の対角化を数式で導出

行列の対角化を数式で導出する。  
 まず、2つの固有値を $\lambda_1, \lambda_2$ 、固有ベクトルを $e_1, e_2$ とする。

2つの式を「まとめて」書くと次のようになる。

$[e_1, e_2]$ を $P$ 、固有値を対角成分に持つ行列を $T$ と書き、左辺の $P$ を右辺に移項すると

(こちらのほうが簡単！ただし、この式が持つ意味は前述のとおり)

### 重要な応用: $A^n$

$$A^n x = (PTP^{-1})^n x$$

$$= P \underbrace{T P^{-1} P T P^{-1} \dots P T P^{-1}}_n x$$

$$= P T^n P^{-1} x$$

$$= P \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} P^{-1} x$$

$$\because T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

行列の $n$ 乗を簡単に計算することができる

重要な結論:  $n$ が非常に大きくなった時の $A^n$

$$A^n \mathbf{x} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}$$

行列の固有値 $\lambda$ の絶対値が引き延ばしの倍率だから、

固有値が

- 一つでも1より大きければ、 $A^n$ は**発散**する
- 全て1より小さければ、 $A^n$ は**0**に収束する

例:  $A^n$

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 & -18 \\ 27 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 & -18 \\ 27 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 410 & -134 \\ 201 & -59 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{5} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 7 \quad \text{を代入して、}$$

$$A^3 = \mathbf{P} \mathbf{T}^3 \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{5} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 7^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{5} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \dots = \begin{bmatrix} 410 & -134 \\ 201 & -59 \end{bmatrix} \quad \text{固有値が大きいののでどんどん大きくなる}$$

ほとんどすべての行列は、  
ベクトルを「引き延ばす」ものである(3)

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{の時は?} \dots \text{ **回転**と習ったはず}$$

以前と同様に固有値と固有ベクトルを求めてみる。

$$\begin{bmatrix} \cos \theta - \lambda & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$$

$$(\cos \theta - \lambda)(\cos \theta - \lambda) + \sin^2 \theta = 0$$

回転行列の固有値 =  $\exp(j\theta)$

$$(\cos \theta - \lambda)(\cos \theta - \lambda) + \sin^2 \theta = 0$$

$$\cos^2 \theta - 2\lambda \cos \theta + \lambda^2 + \sin^2 \theta = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda \cos \theta + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \cos \theta \pm \sqrt{4 \cos^2 \theta - 4}}{2}$$

$$= \frac{2 \cos \theta \pm j \sqrt{4 \sin^2 \theta}}{2}$$

$$= \cos \theta \pm j \sin \theta$$

$$= \exp(\pm j\theta)$$

回転行列の固有ベクトル

$\cos \theta + j \sin \theta$  に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} \cos \theta - \lambda & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta - \cos \theta - j \sin \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - \cos \theta - j \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \\ = \sin \theta \begin{bmatrix} -j & -1 \\ 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

$$\therefore u_x = j u_y, \quad \mathbf{e}_1 = k \begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{大きさを1とすれば例えば, } k = 1/\sqrt{2}$$

$\cos \theta - j \sin \theta$  に対応する固有ベクトルは

$$\mathbf{e}_2 = k \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \quad \text{大きさを1とすれば例えば, } k = 1/\sqrt{2}$$

(参考)

回転行列も(拡張された)引き延ばしである

•一般の行列は、固有値、固有ベクトル共に複素数。

• $x, y$ 軸に加えて、複素軸も含めた**4次元空間**中でこれまでと同様の**引き延ばし**を行う演算とみなせる。

•複素固有値の**絶対値**が引き延ばし倍率、**偏角**が**回転角度**を表す。

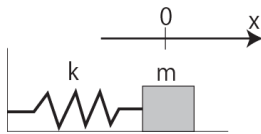
## 制御における行列

おもりの挙動をシミュレートしたい

```

m=1.0; //重さ
k=1.0; //ばね定数
x=1.0; //初期位置
v=0; //初期速度
dt=0.1; //時間刻み
record=[]; //記録用
for time= 0:dt:10 //時刻
    F=-k*x; //ばねによって生じる力
    a=F/m; //生じる加速度
    v= v+a*dt; //速度
    x= x+v*dt; //位置
    record = [record,x]; //記録(※テクニック:ベクトルが伸びていく)
end
plot([0:dt:10],record);

```

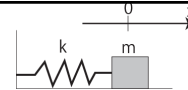


## 制御における行列

```

for time= 0:dt:10 //時刻
    F=-k*x; //ばねによって生じる力
    a=F/m; //生じる加速度
    v= v+a*dt; //速度
    x= x+v*dt; //位置
end

```



位置, 速度, 加速度を並べた「状態ベクトル」 $x$ を定義  $x = \begin{bmatrix} x \\ v \\ a \end{bmatrix}$

上の関係から, dt時間後の新たな位置, 速度, 加速度は

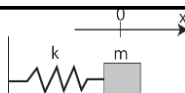
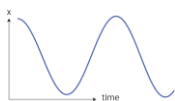
$$\begin{bmatrix} x_n \\ v_n \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ v_{n-1} \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{A}x$$

## 制御における行列

```

Scilabコード
m=1.0; //重さ
k=1.0; //ばね定数
x=1.0; //初期位置
v=0; //初期速度
a=-k/m*x; //初期加速度
dt=0.01; //時間刻み
record=[]; //記録用
state=[x;v;a];
A=[1,dt,0;0,1,dt;-k/m,0,0];
for time= 0:dt:10 //時刻
    state= A*state;
    record = [record,state(1)];
end
plot([0:dt:10],record);

```

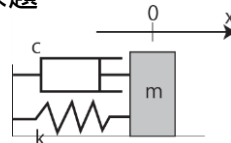


$$\begin{bmatrix} x_n \\ v_n \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & dt & 0 \\ 0 & 1 & dt \\ -k/m & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ v_{n-1} \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{A}x_{n-1} = \dots = \mathbf{A}^n x_0$$

•行列Aのn乗を使えば,  
n時刻先の状態をシミュレート可能

•行列Aの固有値を見れば,  
システムが将来( $n \rightarrow \infty$ )収束するか  
発散するか予測可能!

## レポート課題



●ダンパを加えた際の行列を考え,  
同様のシミュレーションプログラムを書け

●行列Aの固有値の絶対値が1よりも小さいこと,  
すなわち位置が収束することを確認し, コメントに記せ  
( Scilabでは固有値はspec()で求められる)

注意:ここで導入した行列はあくまで導入編用で,  
シミュレーションとしては不正確です。