インタラクティブシステム論
第11回

梶本裕之
Twitter ID kajimoto
ハッシュタグ #ninshiki

行列復習
（センシングに現れる行列・逆行列）

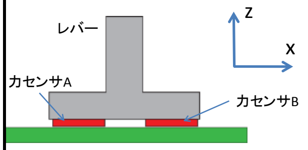
（復習）行列：データ列を変換するもの

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

（例1）
y:観測データ，A:システムの性質，x:媒介変数
（例2）
y:フーリエ空間での周波数成分，A:フーリエ変換行列，
x:実空間でのデータ系列

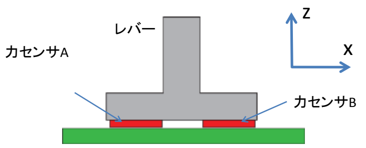
（復習）（例）2軸力センサ



$$F_Z = x_A + x_B$$
$$F_X = k(x_A - x_B)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}}_{\text{2x1ベクトル}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & -k \end{bmatrix}}_{\text{2x2行列}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}}_{\text{2x1ベクトル}}$$

（復習）力センサのキャリブレーション（較正）

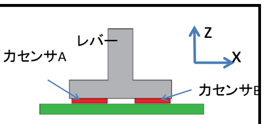


$$F_Z = k_1 x_A + k_2 x_B$$
$$F_X = k_3 x_A + k_4 x_B$$

$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

k1～k4のパラメータは元々未知．
これを求めなければ使えない！！

（復習）逆行列



$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

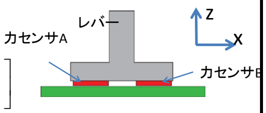
これを $\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ と書く．

ここで，
「ある力を加えたときの各センサ出力は？」
という逆の関係を考える．

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{G}\mathbf{f} \qquad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

（復習）逆行列の測定

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{f} \quad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$



(1) Fz=1，Fx=0の力を加え，各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

各センサの出力に，逆行列の成分g1，g3が現れる！

(2) Fz=0,Fx=1の力を加え，各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 \\ g_4 \end{bmatrix}$$

各センサの出力に，逆行列の成分g2，g4が現れる！

（復習）逆行列の測定

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} \quad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

G=A^{-1}の成分，g1～g4が得られたので，
その逆行列を計算すればAが得られる．

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

まとめると，

$$\left.\begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 \\ g_4 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}$$

行列に単位行列をかけたことに相当

（復習）単位力でなくて良い

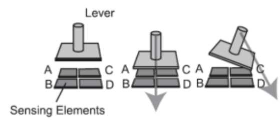
$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\text{2回目の入力}}{\overset{\text{1回目の入力}}{\begin{matrix} f_{z1} & f_{z2} \\ f_{x1} & f_{x2} \end{matrix}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\text{2回目の出力}}{\overset{\text{1回目の出力}}{\begin{matrix} m_1 & m_2 \\ m_1 & m_2 \end{matrix}}} \end{bmatrix}$$

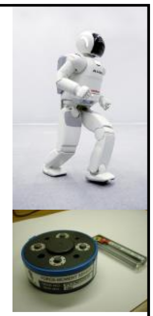
$$\mathbf{G}\mathbf{F} = \mathbf{M}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{M}\mathbf{F}^{-1}$$

1. 2回既知の力ベクトルを加えて，各センサの出力を得る
2. 力ベクトルを並べたものを力行列**F**，
   センサ出力を並べたものを行列**M**とする
3. 力行列の逆行列**F**$^{-1}$を**M**にかければ，行列**G**が得られる．
4. **Gの逆行列が望んだ較正行列A**

（復習）逆行列が使えない場合





$$F_Z = k_1(x_A + x_B + x_C + x_D)$$
$$F_X = k_2((x_A + x_B) - (x_C + x_D))$$
$$F_Z = k_3((x_A + x_C) - (x_B + x_D))$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_z \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix}}_{3} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2 \\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix}}_{\text{3x4行列}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}}_{4}$$

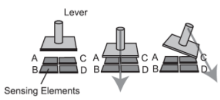
一般には正方行列ではない！！

(例)6軸力センサには8つ以上のセンサエレメント内蔵

ロボットの力／トルク制御

行列と最小二乗法

本日の疑問



$$3\left\{\begin{bmatrix}F_z\\F_x\\F_y\end{bmatrix}\right. = \begin{bmatrix}k_1 & k_1 & k_1 & k_1\\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2\\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3\end{bmatrix}\left.\begin{bmatrix}x_A\\x_B\\x_C\\x_D\end{bmatrix}\right\}4$$

3x4行列

- 一般には正方行列ではない
- 「逆行列」は定義できず，キャリブレーションもできないのでは

本日の解答

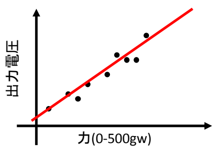
$$3\left\{\begin{bmatrix}F_z\\F_x\\F_y\end{bmatrix}\right. = \begin{bmatrix}k_1 & k_1 & k_1 & k_1\\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2\\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3\end{bmatrix}\left.\begin{bmatrix}x_A\\x_B\\x_C\\x_D\end{bmatrix}\right\}4$$

3x4行列

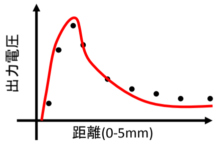
- 逆行列は定義できなくても
擬似逆行列(Pseudo Inverse Matrix)
は定義できる．
- またこれは最小二乗法という，
工学全体を支える基礎的な考えである．

色々なセンサ

フィルム状力センサ

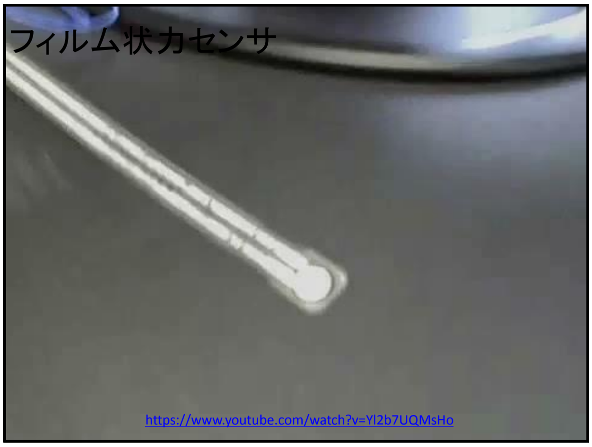


フォトリフレクタを用いた近接距離センサ

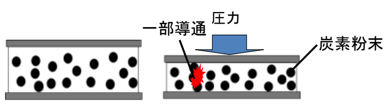


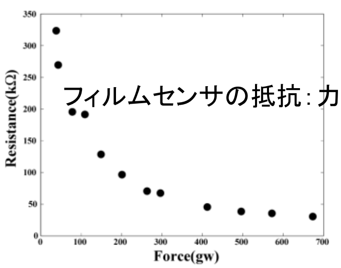
いかにして較正曲線を求め，センサとして使えるようにするか？

15



フィルムセンサの定式化（1）

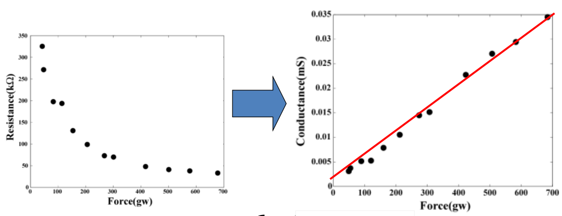




17

フィルムセンサの定式化（2）

抵抗ではなくコンダクタンス(抵抗の逆数)を見る

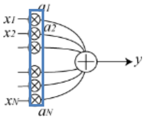


$$y = ax + b \quad \begin{cases} x: \\ y: \\ a, b: \end{cases}$$

実験でなじみ深い「直線フィッティング」

18

一般化



$y = a_1 x + a_2$ から一般化

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_N x_N$$

N個の既知入力[$x_1, x_2, \cdots x_N$]と
N個の未知パラメータ[$a_1, a_2, \cdots a_N$]の
積和によって1個の出力 y が決定されるシステム.

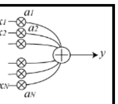
目的:N個の未知パラメータ[$a_1, a_2, \cdots a_N$]の同定(identification)

取れる手段:入力の操作と出力の計測

フィルムセンサの場合: $y = a_1 x_1 + a_2 x_2$ where $x_2 = 1$

19

行列の形にする



$$\boxed{y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_N x_N}$$

入力を変化させ, M回の出力を得る

$$y_1 = a_1 x_{11} + a_2 x_{12} + \cdots a_N x_{1N}$$
$$y_2 = a_1 x_{21} + a_2 x_{22} + \cdots a_N x_{2N}$$
$$\vdots$$
$$y_M = a_1 x_{M1} + a_2 x_{M2} + \cdots a_N x_{MN}$$

結局

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a}$$

- X : MxN行列. 入力. 既知
- y : Mx1ベクトル. 出力. 観測可能
- a : Nx1ベクトル. 未知.

もしM=Nなら $\mathbf{a} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{y}$

実際にはM≠NでX^{-1}は存在しないことがほとんど

20

二乗誤差を最小化する(最小二乗法)

いかにして

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a}$$

- X : MxN行列. 入力. 既知
- y : Mx1ベクトル. 出力. 観測可能
- a : Nx1ベクトル. 未知.

をaについて解くか.

解けない(未知数より方程式の数が多い)
つまり, 式を完全に満たすベクトルaは, 無い

(1)測定された出力ベクトルyが誤差を含んでいると仮定
$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{e}$ where $\mathbf{e} = [e_1, e_2, \cdots e_M]^T$

(2)誤差の大きさが最小となるようなaを
もっともらしいaとして受け入れよう.

(3)大きさとして二乗和(二乗ノルム)を採用.

$$\sum_{i=1}^{M} e_i^2 = [e_1, e_2, \cdots e_M][e_1, e_2, \cdots e_M]^T = \mathbf{e}^* \mathbf{e}$$

21

誤差の「大きさ」

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{e}$$

$\mathbf{e} =$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_M \end{bmatrix}$$

$\|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}$ Tは転置.

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \sum_{i=1}^{M} e_i^2 = [e_1, e_2, \cdots e_M] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_M \end{bmatrix} = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}$$

$=$

$=$

$=$

$=$

22

誤差の「大きさ」を最小化する

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} - 2\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{a}$$

誤差の大きさが最小となるaを見つける

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}}\|\mathbf{e}\|^2 = \left[\frac{\partial}{\partial a_1}\|\mathbf{e}\|^2 \quad \frac{\partial}{\partial a_2}\|\mathbf{e}\|^2 \quad \cdots \quad \frac{\partial}{\partial a_N}\|\mathbf{e}\|^2 \right]$$

$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}}\|\mathbf{e}\|^2 =$

$=$

$=$

$=$

$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} =$

$\mathbf{a}^{\mathrm{T}} =$

$\mathbf{a} =$

$$\|\mathbf{e}\|^2 = a^2 x^2 - 2ayx + y^2$$

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \frac{\partial}{\partial a}\left(a^2 x^2 - 2ayx + y^2\right)$$
$$= 2x^2 a - 2yx$$
$$= 0$$

$$x^2 a = yx$$
$$a = y / x$$

$$\because \left((\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left((\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}$$

23

擬似逆行列

結論:未知パラメータのベクトルaは次の式で求められる.

$$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{\#}\mathbf{y}$$

ただし

$$\mathbf{X}^{\#} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$$

$\mathbf{X}^{\#}$:擬似逆行列(Pseudo Inverse)

24

擬似逆行列は逆行列の拡張である

行列Xが正則な場合

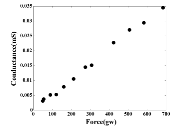
$$\mathbf{X}^{\#}=(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$$

$=$

$=$

（再考）フィルムセンサの場合

$$y=a_1x+a_2 \quad \begin{cases} x:\text{力：既知入力} \\ y:\text{コンダクタンス．測定結果} \\ a_1, a_2:\text{未知パラメータ} \end{cases}$$



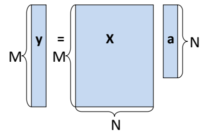
これは

$y=a_1x_1+a_2x_2$ where $x_2=1$

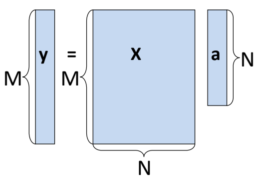
とみなせる．

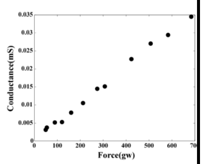
加える力を変え，M回測定する（2回以上）

$$\begin{aligned} y_1&=a_1x_{11}+a_2 1\\ y_2&=a_1x_{21}+a_2 1\\ &\vdots\\ y_M&=a_1x_{M1}+a_2 1\end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_M\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_{11} & 1\\ x_{21} & 1\\ \vdots & \vdots\\ x_{M1} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1\\ a_2\end{bmatrix}$$



（再考）フィルムセンサの場合





よって，

$\mathbf{a}=\mathbf{X}^{\#}\mathbf{y}$ where $\mathbf{X}^{\#}=(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$

により二つの未知パラメータを求めることが出来る．

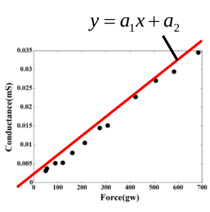
手作業で求めてみる

$$\begin{aligned}\mathbf{a}&=\mathbf{X}^{\#}\mathbf{y}\\ &=(\mathbf{X}^{T}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{T}\mathbf{y}\\ &=\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_M\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & 1\\ x_2 & 1\\ \vdots & \vdots\\ x_M & 1\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_M\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_M\end{bmatrix}\\ &=\\ &=\\ &=\end{aligned}$$

手作業で求めてみる

$$a_1=\frac{M\sum x_iy_i-\sum x_i\sum y_j}{M\sum x_i^{\,2}-\left(\sum x_i\right)^2}$$

$$a_2=\frac{-\sum x_i\sum x_jy_j+\sum x_i^{\,2}\sum y_j}{M\sum x_i^{\,2}-\left(\sum x_i\right)^2}$$



これは，直線によるフィッティングの公式に他ならない

何を最小化したか

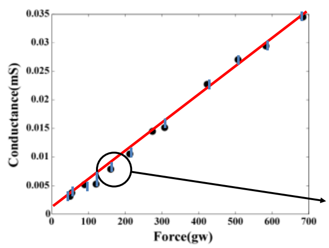
$$\mathbf{y}=\mathbf{X}\mathbf{a}+\mathbf{e}$$

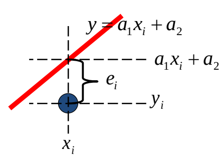
$$\mathbf{e}=\mathbf{y}-\mathbf{X}\mathbf{a}$$

$$\boxed{\|\mathbf{e}\|^2=\mathbf{e}^{*}\mathbf{e}=\sum_{i=1}^{M}e_i^{\,2}}$$

$$y_i=a_1x_i+a_2+e_i$$

$$e_i=y_i-a_1x_i-a_2$$



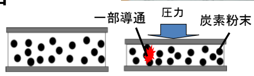


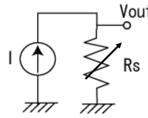
データと直線の，

「y軸に沿った距離」の二乗の和を最小化した．

(参考)実際の測定回路

- 「抵抗」を測定するなら



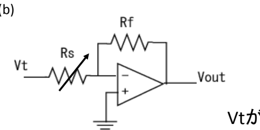


I:定電流源
Vout:出力

Vout = I x Rs

出力電圧は抵抗に比例

- 「コンダクタンス(抵抗の逆数)」を測定するなら



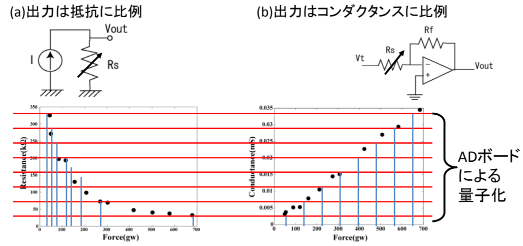
Vt:定電圧源
Rs:フィルムセンサの抵抗
Rf:調整用固定抵抗
これは「反転増幅回路」
Vout = Rf/Rs x Vt

Vtが一定なら出力電圧は抵抗に反比例

「抵抗」を測定して逆数をとればよいのでは？

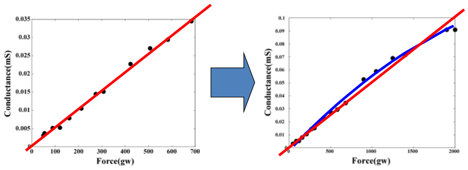
別にそれでもよい. しかし玄人な理由はある.

(a)出力は抵抗に比例　(b)出力はコンダクタンスに比例



- アナログ部による線形化の意義
  ＝ADボードによる量子化の影響を低減
  「ダイナミックレンジを広げる」とも言う.

フィルムセンサを限界性能まで使いきりたい.



直線近似 $y=a_1x+a_2$ではフィッティングできない気が. . .

(直線領域だけで使う, という方針も正しい)

多項式によるフィッティングを試みる.

$$y=a_1x+a_2 \Rightarrow \begin{array}{l} y=a_1x^2+a_2x+a_3 \\ y=a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4 \end{array}$$

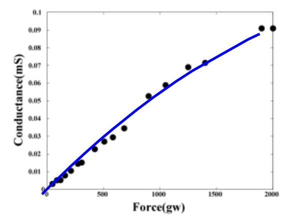
もはや直線フィッティングの公式は使えない.

多項式近似

$$y=a_1x^2+a_2x+a_3 \left\{ \begin{array}{l} x: \text{力:既知入力} \\ y: \text{コンダクタンス. 測定出力} \\ a1,\ a2,\ a3: \text{未知パラメータ} \end{array} \right.$$

何度も測定する

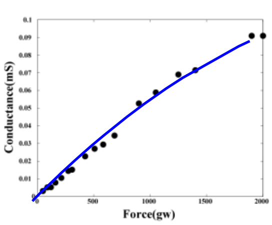
$$y_1=a_1x_1^2+a_2x_1+a_3$$
$$y_2=a_1x_2^2+a_2x_2+a_3$$
$$\vdots$$
$$y_M=a_1x_M^2+a_2x_M+a_3$$



多項式近似

$$y_1=a_1x_1^2+a_2x_1+a_3$$
$$y_2=a_1x_2^2+a_2x_2+a_3$$
$$\vdots$$
$$y_M=a_1x_M^2+a_2x_M+a_3$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_M^2 & x_M & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$



$\mathbf{y}=\mathbf{X}\mathbf{a}$ の形に出来たので,

$\mathbf{a}=\mathbf{X}^{\#}\mathbf{y}$ where $\mathbf{X}^{\#}=(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$

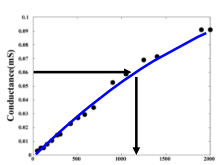
により3つの未知パラメータを求めることが出来る. (計算機のしごと)

元に戻って. . . 何をしたかったか

(1) $y=a_1x+a_2$
(2) $y=a_1x^2+a_2x+a_3$
(3) $y=a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$

x: 力:既知の入力
y: コンダクタンス. 測定した出力
a1, ... , a4: 未知パラメータ

モデルの未知パラメータを求めるのがゴールではない.
測定出力yから力xを逆算することがゴール.



(1) $x=(y-a_2)/a_1$

(2) $a_1x^2+a_2x+(a_3-y)=0$

$$x=\frac{-a_2\pm\sqrt{a_2^2-4a_1(a_3-y)}}{2a_1}$$

(3) $a_1x^3+a_2x^2+a_3x+(a_4-y)=0$

$x=\cdots$ (3次方程式の解の公式)

デモ：Excelでのフィッティング

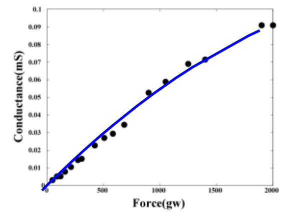
X軸は等間隔でなくて良い
X軸は単調増加でなくて良い

N次多項式だと完璧なフィッティングができてしまうのはなぜか？
（行列の形はどうなるか？）

整数次数の多項式でなくて良い

$$y_1 = a_1 x_1^{1/2} + a_2$$
$$y_2 = a_1 x_2^{1/2} + a_2$$
$$\vdots$$
$$y_M = a_1 x_M^{1/2} + a_M$$

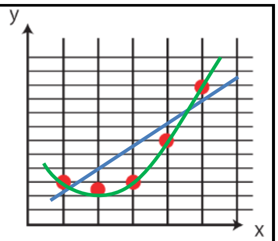
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{1/2} & 1 \\ x_2^{1/2} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_M^{1/2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$



関数であっても良い．たとえばlog(x)など．

38

レポート課題(1)



次のデータ系列に対して，
Scilabを用いて，
(1) 直線による近似，
(2) 2次曲線による近似を適用，
パラメータを求め，
曲線とデータをグラフに描け

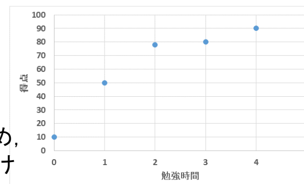
x	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
y	3.0	2.5	3.0	6.0	10.0

なおScilabでは行列Aの擬似逆行列はpinv(A)で直接求めることができる．
当然自分でinv(A'*A)*A'とやっても同じ．

39

レポート課題(2) (余裕のある人)

次のデータ系列に対して，
y=a1 * log(x+1) + a2
を仮定してパラメータを求め，
曲線とデータをグラフに描け



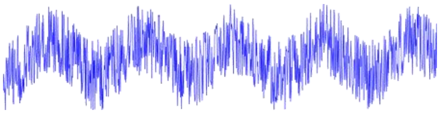
	Aさん	Bさん	Cさん	Dさん	Eさん
X(勉強時間)	3	4	2	0	1
Y(試験の点)	80	90	78	10	45

最小二乗法
事例紹介

最小二乗法事例紹介
(時間の許す限り)

- 直交(同期)検波の最小二乗法による理解
- X線CTの画像再構成
- フォトリフレクタのキャリブレーション

最小二乗法事例(1):直交(同期)検波



問題を定式化

信号f(t)が,

$$f(t) = A\sin(\omega t + \phi) + noise(t)$$

と仮定できるとする．周波数ωはわかっている．

計測データから，振幅Aと，位相ずれφを求めるには？

直交(同期)検波:数式(復習)

信号にsin(ωt)をかけ，積分する(＝内積をとる)
積分時間Tは充分長い．

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{T}\int_0^T (A\sin(\omega t+\phi)+noise(t))\sin(\omega t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T A\sin(\omega t+\phi)\sin(\omega t)dt + \frac{1}{T}\int_0^T noise(t)\sin(\omega t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T A(\sin(\omega t)\cos(\phi)+\cos(\omega t)\sin(\phi))\sin(\omega t)dt \\
&= A\cos(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)dt + A\sin(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \sin(\omega t)\cos(\omega t)dt \\
&= A\cos(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}dt \\
&= \frac{A}{2}\cos(\phi)
\end{aligned}$$

直交(同期)検波:数式(復習)

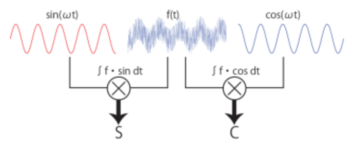
信号にcos(ωt)をかけ，積分する(＝内積をとる)
積分時間Tは充分長い．

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{T}\int_0^T (A\sin(\omega t+\phi)+noise(t))\cos(\omega t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T A\sin(\omega t+\phi)\cos(\omega t)dt + \int_0^T noise(t)\cos(\omega t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T A(\sin(\omega t)\cos(\phi)+\cos(\omega t)\sin(\phi))\cos(\omega t)dt \\
&= A\cos(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \sin(\omega t)\cos(\omega t)dt + A\sin(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)dt \\
&= A\sin(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1+\cos(2\omega t)}{2}dt \\
&= \frac{A}{2}\sin(\phi)
\end{aligned}$$

直交(同期)検波:数式(復習)

$$S = \frac{A}{2}\cos(\phi)$$

$$C = \frac{A}{2}\sin(\phi)$$



位相差

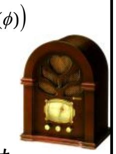
$$\frac{C}{S} = \tan(\phi)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{C}{S}\right)$$

振幅

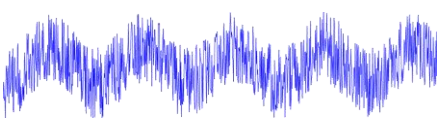
$$\begin{aligned}
S^2+C^2 &= \frac{A^2}{4}(\cos^2(\phi)+\sin^2(\phi)) \\
&= \frac{A^2}{4}
\end{aligned}$$

$$A = 2\sqrt{S^2+C^2}$$



ノイズに埋もれた信号から位相差と振幅が求まった

最小二乗法で理解する



離散的に取り込まれるデータは次の形をしていると仮定

ただし周波数ωは既知．
得られたデータ[y1,y2,...,yN]から，振幅Aと位相∮を求める．

最小二乗法で理解する

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} =$$

$$=$$

$$=$$

これにより，行列の形，$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a}$ に変形することが出来た．

最小二乗法で理解する

$$\begin{bmatrix} A\cos(\phi) \\ A\sin(\phi) \end{bmatrix} = \mathbf{a} = \mathbf{X}^{\#}\mathbf{y} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \sin(\omega t_1) & \cdots & \sin(\omega t_N) \\ \cos(\omega t_1) & \cdots & \cos(\omega t_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\omega t_1) & \cos(\omega t_1) \\ \vdots & \vdots \\ \sin(\omega t_N) & \cos(\omega t_N) \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \sin(\omega t_1) & \cdots & \sin(\omega t_N) \\ \cos(\omega t_1) & \cdots & \cos(\omega t_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

$=$

$\propto$

残る

ほぼ消える
（適切なNで完全に0）

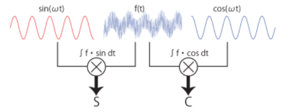
最小二乗法で理解する

$$\begin{bmatrix} A\cos(\phi) \\ A\sin(\phi) \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} \sin(\omega t_i) y_i \\ \sum_{i=1}^{N} \cos(\omega t_i) y_i \end{bmatrix}$$

つまり，元信号y(t)に
- cos(ωt)をかけて積分したものと，
- sin(ωt)をかけて積分したもの

によって，振幅と位相を求めることができる．

これはこれまでの数式的理解と全く同一．



最小二乗法事例(2)：CT

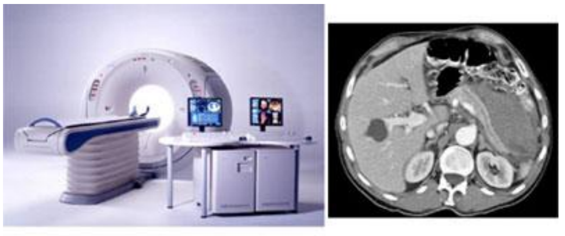
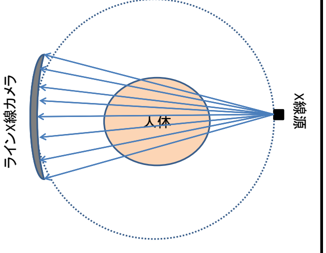


図1. X線CTと画像例

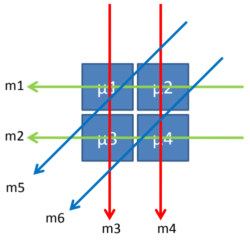
CT:Computational Tomography: 計算による断層撮影
周囲からの計測により，断面／3D形状を再構成

X線CT



- 体内を貫通したX線をライン状カメラで検出＝射影
- 装置自体を回転することで，射影データを一周分取得

（参考）X線CT

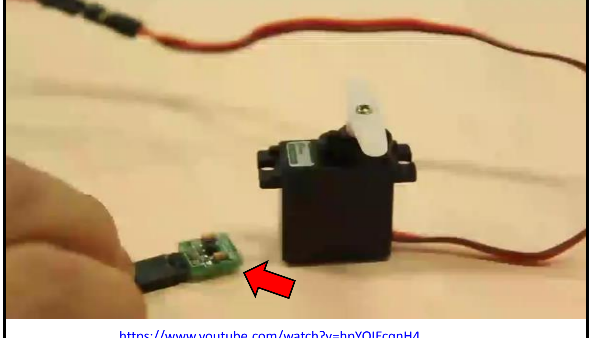


- m1=μ1+μ2
- m2=μ3+μ4
- m3=μ1+μ3
- m4=μ2+μ4
- m5=μ1+(μ2+ μ3)/2
- m6=μ4+(μ2+ μ3)/2

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{bmatrix}$$

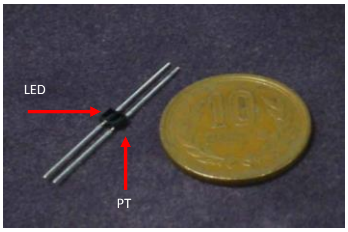
- 人体が4ブロックに分かれていたとする．
- それぞれX線を吸収する能力（線減衰係数）が異なる．
μ1～μ4とする（未知数）
- 多方向から観測，連立方程式⇒行列⇒擬似逆行列⇒μ1～4を取得

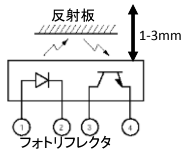
最小二乗法事例(3)
フォトリフレクタを用いた近接距離計の較正

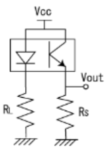


https://www.youtube.com/watch?v=hpYOIEcqnH4

フォトリフレクタを用いた近接距離計の較正



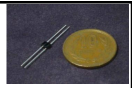


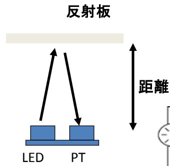


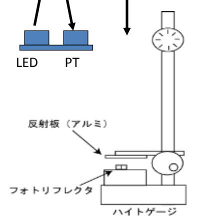
出力電圧は反射光量に比例．
出力電圧から反射板との距離を得たい．

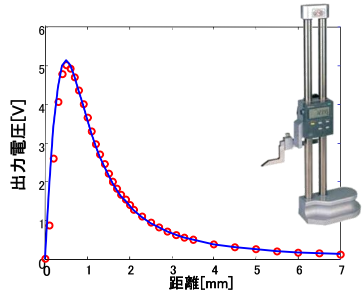
55

測定





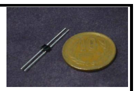


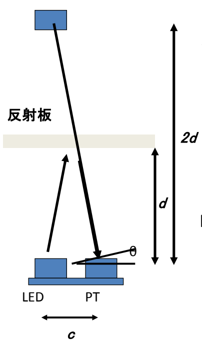


いかにして較正曲線を求め，センサとして使えるようにするか？

56

モデル化（1）





反射板を鏡面とみなし，LEDの“像”からPTへの光路を考える．

LEDを点光源とすると，PTの受光量はLED像からみたPTの立体角Ωに比例．

LED像とPTの距離：

$$l=\sqrt{c^2+(2d)^2}$$

PTの立体角：

$$\Omega=\frac{\cos\theta}{l^2}\Delta S \qquad \Delta S：\text{PTの表面積}$$

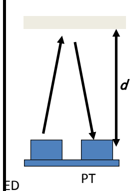
$$\cdots=\frac{k_1 d}{(d^2+k_2)^{3/2}} \qquad k_1,k_2：\text{定数}$$

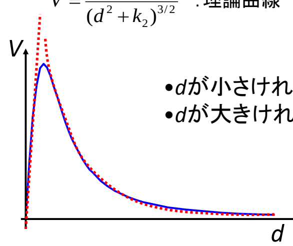
57

モデル化（2）

PTの受光量が立体角Ωに比例するから，出力電圧も同様．

$$V=\frac{k_1 d}{(d^2+k_2)^{3/2}} \quad ：\text{理論曲線}$$



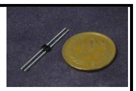


- dが小さければVはdに比例
- dが大きければ$1/d^2$に比例

未知パラメータk_1, k_2を求めれば
入出力関係が記述できる

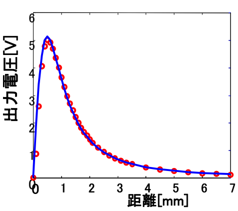
58

フィッティングの準備



$$V=\frac{k_1 d}{(d^2+k_2)^{3/2}}$$

- d：入力(距離)
- V：出力（電圧）
- k_1,k_2：未知パラメータ



変形（線形化）

$$V^{2/3}(d^2+k_2)=k_1^{2/3}d^{2/3}$$

$$V^{2/3}d^2=k_1^{2/3}d^{2/3}-V^{2/3}k_2$$

$$V^{2/3}d^2=y,\quad k_1^{2/3}=a_1,\quad d^{2/3}=x_1,\quad -V^{2/3}=x_2,\quad k_2=a_2$$

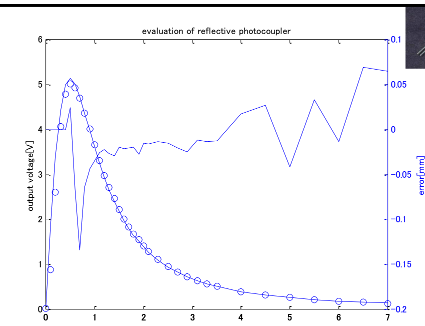
と置けば

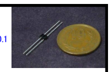
$$y=a_1x_1+a_2x_2$$

- x_1,x_2,y：既知
- a_1,a_2：未知

最小二乗法によってパラメータを同定できる．

59





つまり，一般のフィッティングでは，
（1）数式によるモデル化
（2）最小二乗の形に使えるための変形
が必要．この時の最小二乗誤差は多くの場合当初の意味を失う．

60