認識行動システム論
第11回

梶本裕之
Twitter ID kajimoto
ハッシュタグ #ninshiki

日程

10/07 イントロダクション
10/14 Scilabの紹介（3階PCルームにて）
10/21 フーリエ変換
10/28 フーリエ変換と線形システム
11/04 信号処理の基礎
11/11 信号処理応用1（相関）
11/18 調布祭準備のため休講
11/25 信号処理応用2（画像処理)
12/02 中間テスト(授業時間中)
12/09 ラプラス変換
12/16 古典制御の基礎
01/06 行列
01/13 行列と最小二乗法
01/20 ロボティクス
01/27 期末テスト(授業時間中)

行列復習

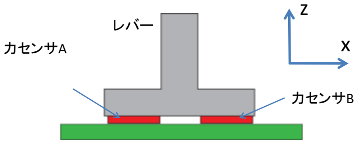
（復習）行列：データ列を変換するもの

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

（例1）
y:観測データ，A:システムの性質，x:媒介変数
（例2）
y:フーリエ空間での周波数成分，A:フーリエ変換行列，
x:実空間でのデータ系列

（復習）（例）2軸力センサ

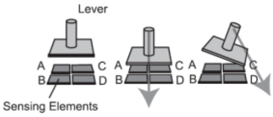


$$F_Z = x_A + x_B$$
$$F_X = k(x_A - x_B)$$

$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

2x1ベクトル（左辺）　2x2行列　2x1ベクトル（右辺）

（復習）（例）多軸力センサ



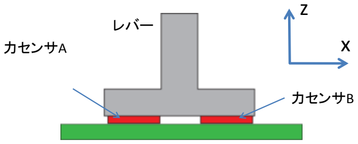
$$F_Z = k_1(x_A + x_B + x_C + x_D)$$
$$F_X = k_2((x_A + x_B) - (x_C + x_D))$$
$$F_Z = k_3((x_A + x_C) - (x_B + x_D))$$

$$\begin{bmatrix} F_z \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2 \\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}$$

3　4
3x4行列

一般には正方行列ではない！！
（例）6軸力センサには8つ以上のセンサエレメント内蔵

（復習）力センサのキャリブレーション（較正）

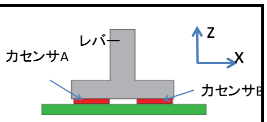


$$F_Z = k_1 x_A + k_2 x_B$$
$$F_X = k_3 x_A + k_4 x_B$$

$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

k1～k4のパラメータは元々未知．
これを求めなければ使えない！！

（復習）逆行列



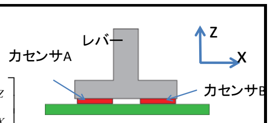
$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

これを $\mathbf{f} = \mathbf{Ax}$ と書く．

ここで，
「ある力を加えたときの各センサ出力は？」
という逆の関係を考える．

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{Gf} \qquad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

（復習）逆行列の測定



$$\mathbf{x} = \mathbf{Gf} \qquad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

(1) Fz=1，Fx=0の力を加え，各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

各センサの出力に，逆行列の成分g1，g3が現れる！

(2) Fz=0,Fx=1の力を加え，各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 \\ g_4 \end{bmatrix}$$

各センサの出力に，逆行列の成分g2，g4が現れる！

（復習）逆行列の測定

$$\mathbf{x} = \mathbf{Gf} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} \qquad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

G=A^{-1}の成分，g1～g4が得られたので，
その逆行列を計算すればAが得られる．

$$\mathbf{f} = \mathbf{Ax}$$

まとめると，

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 \\ g_4 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}$$

行列に単位行列をかけたことに相当

（復習）単位力でなくて良い

1回目の入力　1回目の出力

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{z1} & f_{z2} \\ f_{x1} & f_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix}$$

2回目の入力　2回目の出力

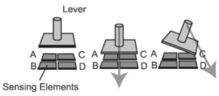
$$\mathbf{GF} = \mathbf{M}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{MF}^{-1}$$

1. 2回既知の力ベクトルを加えて，各センサの出力を得る
2. 力ベクトルを並べたものを力行列F，
   センサ出力を並べたものを行列Mとする
3. 力行列の逆行列F^{-1}をMにかければ，行列Gが得られる．
4. **Gの逆行列が望んだ較正行列A**

行列と最小二乗法

本日の疑問



$$\begin{bmatrix} F_z \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2 \\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}$$

3　4　3x4行列

- 一般には正方行列ではない
- 「逆行列」は定義できず，キャリブレーションもできないのでは

本日の解答

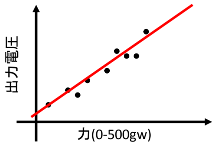
$$\begin{bmatrix} F_z \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2 \\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}$$

3　4　3x4行列

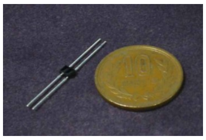
- 逆行列は定義できなくても擬似逆行列(Pseudo Inverse Matrix)は定義できる.
- またこれは最小二乗法という，工学全体を支える基礎的な考えのもっとも代表的な体現である.

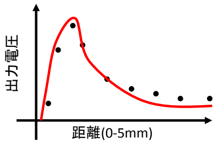
色々なセンサ

フィルム状力センサ



フォトリフレクタを用いた近接距離センサ

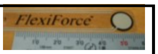


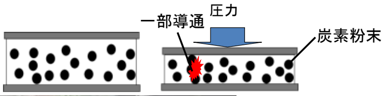


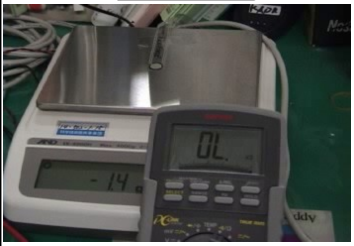
いかにして較正曲線を求め，センサとして使えるようにするか？

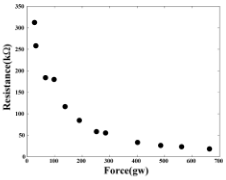
15

フィルムセンサの定式化（1）





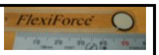




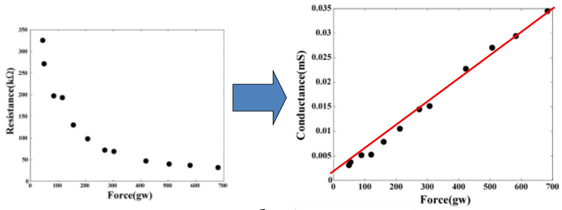
フィルムセンサの抵抗：力に反比例？

16

フィルムセンサの定式化（2）



抵抗ではなくコンダクタンス(抵抗の逆数)を見る

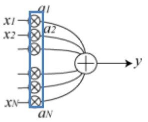


$y = ax + b$ 　x : 　y : 　a, b :

実験でなじみ深い「直線フィッティング」

17

最小二乗法(1)



$y = a_1 x + a_2$ 　から一般化

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_N x_N$$

N個の既知入力[$x_1, x_2, \cdots x_N$]と
N個の未知パラメータ[$a_1, a_2, \cdots a_N$]の
積和によって1個の出力 y が決定されるシステム.

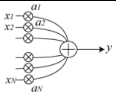
目的：N個の未知パラメータ[$a_1, a_2, \cdots a_N$]の同定(identification)

取れる手段：入力の操作と出力の計測

フィルムセンサの場合： $y = a_1 x_1 + a_2 x_2$ 　where　 $x_2 = 1$

18

最小二乗法(2)



$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_N x_N$

入力を変化させ，M回の出力を得る

$$y_1 = a_1 x_{11} + a_2 x_{12} + \cdots a_N x_{1N}$$
$$y_2 = a_1 x_{21} + a_2 x_{22} + \cdots a_N x_{2N}$$
$$\vdots$$
$$y_M = a_1 x_{M1} + a_2 x_{M2} + \cdots a_N x_{MN}$$

結局

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xa}$$

- X : MxN行列．入力．既知
- y : Mx1ベクトル．出力．観測可能
- a : Nx1ベクトル．未知．

もしM=Nなら $\mathbf{a} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{y}$

実際にはM≠NでX-1は存在しないことがほとんど

19

最小二乗法（3）

いかにして $\mathbf{y} = \mathbf{Xa}$ をaについて解くか．

- X : MxN行列．入力．既知
- y : Mx1ベクトル．出力．観測可能
- a : Nx1ベクトル．未知．

解けない(未知数より方程式の数が多い)

つまり，式を完全に満たすベクトルaは，無い

(1)測定された出力ベクトルyが誤差を含んでいると仮定

$\mathbf{y} = \mathbf{Xa} + \mathbf{e}$ where $\mathbf{e} = [e_1, e_2, \cdots e_M]^T$

(2)誤差の大きさが最小となるようなxを
もっともらしいxとして受け入れよう．

(3)大きさとして二乗和(二乗ノルム)を採用．

$$\sum_{i=1}^{M} e_i^2 = [e_1, e_2, \cdots e_M][e_1, e_2, \cdots e_M]^T = \mathbf{e}^* \mathbf{e}$$

20

誤差の「大きさ」

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xa} + \mathbf{e}$$

$$\mathbf{e} =$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_M \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{e}^{\mathrm{T}} \mathbf{e}$$

Tは転置．

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \sum_{i=1}^{M} e_i^2 = [e_1, e_2, \cdots e_M] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_M \end{bmatrix} = \mathbf{e}^{\mathrm{T}} \mathbf{e}$$

$=$

$=$

$=$

$=$

21

誤差の「大きさ」を最小化する

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} - 2\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{Xa} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Xa}$$

誤差の大きさが最小となるaを見つける

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \|\mathbf{e}\|^2 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \left(\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} - 2\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{Xa} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Xa} \right)$$

$=$

$=$

$= 0$

$\mathbf{a}^{\mathrm{T}} =$

$\mathbf{a} =$

$$\because \left((\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1} \right)^{\mathrm{T}} = \left((\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{\mathrm{T}} \right)^{-1} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}$$

$$\|\mathbf{e}\|^2 = a^2 x^2 - 2ayx + y^2$$

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \frac{\partial}{\partial a} \left(a^2 x^2 - 2ayx + y^2 \right)$$
$$= 2x^2 a - 2yx$$
$$= 0$$

$$x^2 a = yx$$
$$a = y / x$$

22

擬似逆行列

結論：未知パラメータのベクトルaは次の式で求められる．

$$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{\#} \mathbf{y}$$

ただし

$$\mathbf{X}^{\#} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^{\mathrm{T}}$$

$\mathbf{X}^{\#}$: 擬似逆行列(Pseudo Inverse)

23

擬似逆行列は逆行列の拡張である

行列Xが正則な場合

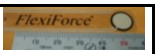
$$\mathbf{X}^{\#} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^{\mathrm{T}}$$

$=$

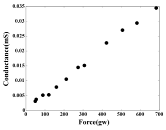
$=$

24

（再考）フィルムセンサの場合



$y = a_1 x + a_2$ 　
- x : 力 : 既知入力
- y : コンダクタンス．測定結果
- a_1, a_2 : 未知パラメータ



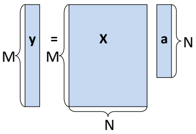
これは

$y = a_1 x_1 + a_2 x_2$ where $x_2 = 1$

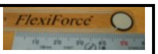
とみなせる．

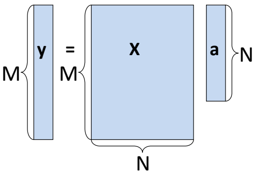
加える力を変え，M回測定する（2回以上）

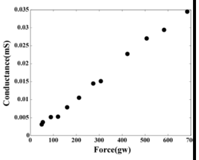
$$\begin{aligned} y_1 &= a_1 x_{11} + a_2 1 \\ y_2 &= a_1 x_{21} + a_2 1 \\ &\vdots \\ y_M &= a_1 x_{M1} + a_2 1 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & 1 \\ x_{21} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{M1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$



（再考）フィルムセンサの場合







よって，

$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{\#}\mathbf{y}$ where $\mathbf{X}^{\#} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$

により二つの未知パラメータを求めることが出来る．

26

手作業で求めてみる

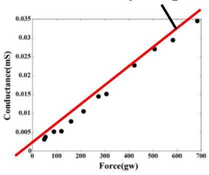
$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{X}^{\#}\mathbf{y} \\ &= (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \\ &= \left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_M \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_M & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_M \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

27

手作業で求めてみる

$$a_1 = \frac{M\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_j}{M\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

$$a_2 = \frac{-\sum x_i \sum x_j y_j + \sum x_i^2 \sum y_j}{M\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$



これは，直線によるフィッティングの公式に他ならない

28

何を最小化したか

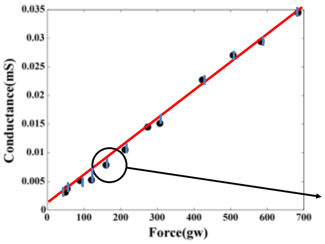
$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{e}$

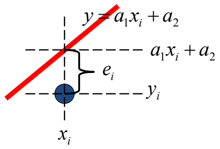
$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{a}$

$\|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{e}^*\mathbf{e} = \sum_{i=1}^{M} e_i^2$

$y_i = a_1 x_i + a_2 + e_i$

$e_i = y_i - a_1 x_i - a_2$





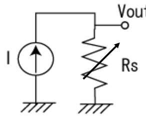
データと直線の，
「y軸に沿った距離」の二乗の和を最小化した．

29

（参考）実際の測定回路

- 「抵抗」を測定するなら

(a)



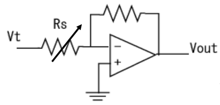
I : 定電流源
Vout:出力

Vout = I x Rs

出力電圧は抵抗に比例

- 「コンダクタンス（抵抗の逆数）」を測定するなら

(b)



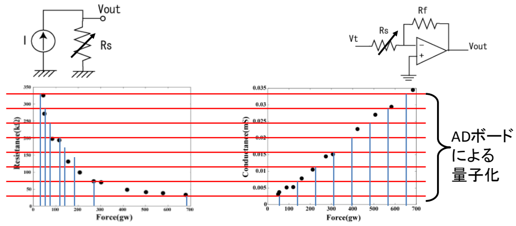
Vt:定電圧源
Rs:フィルムセンサの抵抗
Rf:調整用固定抵抗
これは「反転増幅回路」
Vout = Rf/Rs x Vt

Vtが一定なら出力電圧は抵抗に反比例

「抵抗」を測定して逆数をとればよいのでは？

別にそれでもよい．しかし玄人な理由はある．

(a)出力は抵抗に比例　(b)出力はコンダクタンスに比例



- アナログ部による線形化の意義
  ＝ADボードによる量子化の影響を低減
  「ダイナミックレンジを広げる」とも言う．

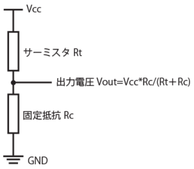
31

（参考２）実際の測定のための回路設計

（１）例えば温度を測定したいと考える

（２）「サーミスタ」を使えばよいことが分かる．

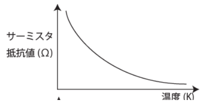
（３）サーミスタはやはり温度に反比例（正確には違う）な感じで抵抗値が下がるので，逆数に近い電圧が出る回路を考える．



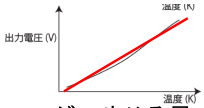
ではこの固定抵抗はどのように決めたらよいのか？

（参考２）実際の測定のための回路設計

（４）温度変化に対して抵抗値を測定する



（５）固定抵抗が例えば10kΩで電源が5Vの時，出力電圧がどのように変化するかをシミュレートする．

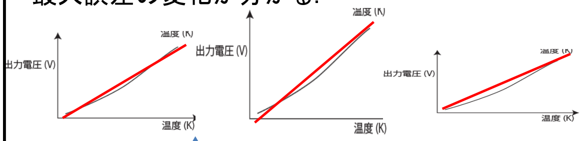


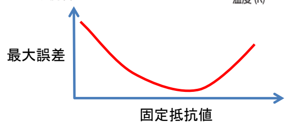
（６）直線フィッティングで生じる最大の誤差を求める

この誤差が，測定システムの「性能」になる．

（参考２）実際の測定のための回路設計

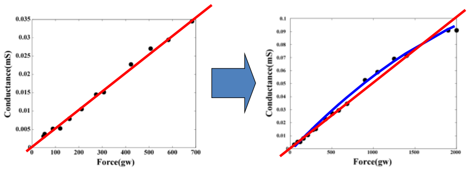
（７）固定抵抗を色々変えた場合をシミュレートすると，最大誤差の変化が分かる．





（８）最大誤差が最小になる値が求める固定抵抗値

フィルムセンサを限界性能まで使いきりたい．



直線近似 $y = a_1 x + a_2$ ではフィッティングできない気が．．．

(直線領域だけで使う，という方針も正しい)

多項式によるフィッティングを試みる．

$y = a_1 x + a_2$ ➡ $y = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$

$y = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$

もはや直線フィッティングの公式は使えない．

35

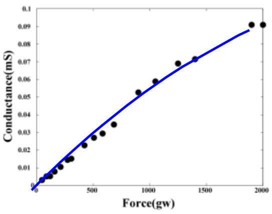
多項式近似

$$y = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

- x：力：既知入力
- y：コンダクタンス．測定出力
- $a1, a2, a3$：未知パラメータ

何度も測定する

$$y_1 = a_1 x_1{}^2 + a_2 x_1 + a_3$$
$$y_2 = a_1 x_2{}^2 + a_2 x_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$y_M = a_1 x_M{}^2 + a_2 x_M + a_3$$

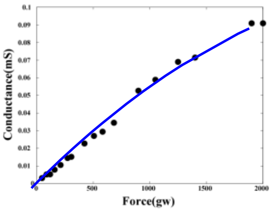


36

多項式近似

$$y_1 = a_1 x_1^2 + a_2 x_1 + a_3$$
$$y_2 = a_1 x_2^2 + a_2 x_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$y_M = a_1 x_M^2 + a_2 x_M + a_3$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_M^2 & x_M & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$



$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a}$ の形に出来たので,

$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{\#}\mathbf{y}$ where $\mathbf{X}^{\#} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$

により3つの未知パラメータを求めることが出来る.(計算機のしごと)

我に返って．．．何をしたかったか

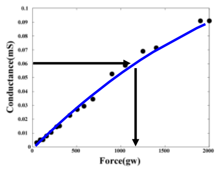
(1) $y = a_1 x + a_2$

(2) $y = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$

(3) $y = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$

x : 力:既知の入力
y : コンダクタンス. 測定した出力
$a1, \ldots, a4$: 未知パラメータ

モデルの未知パラメータを求めるのがゴールではない.
測定出力yから力xを逆算することがゴール.



(1) $x = (y - a_2)/a_1$

(2) $a_1 x^2 + a_2 x + (a_3 - y) = 0$

$$x = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1(a_3 - y)}}{2a_1}$$

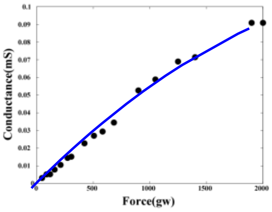
(3) $a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + (a_4 - y) = 0$

$x = \cdots$ (3次方程式の解の公式)

係数は別に整数でなくて良い

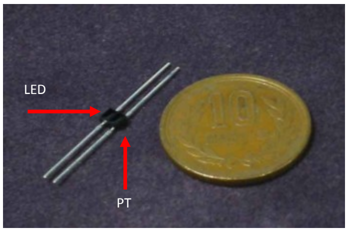
$$y_1 = a_1 x_1^{1/2} + a_2$$
$$y_2 = a_1 x_2^{1/2} + a_2$$
$$\vdots$$
$$y_M = a_1 x_M^{1/2} + a_M$$

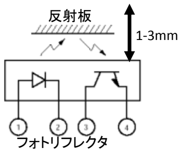
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{1/2} & 1 \\ x_2^{1/2} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_M^{1/2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

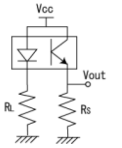


関数であっても良い. たとえばlog(x)など.

(ケーススタディ)フォトリフレクタを用いた近接距離計の較正

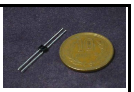


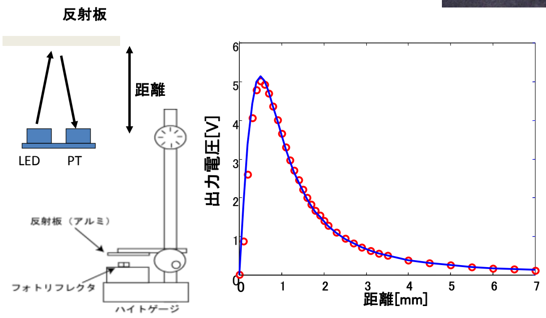




出力電圧は反射光量に比例.
出力電圧から反射板との距離を得たい.

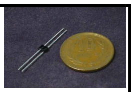
測定

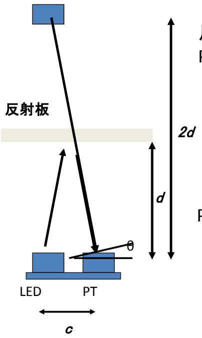




いかにして較正曲線を求め, センサとして使えるようにするか?

モデル化(1)





反射板を鏡面とみなし, LEDの“像”からPTへの光路を考える.

LEDを点光源とすると, PTの受光量はLED像からみたPTの立体角Ωに比例.

LED像とPTの距離:

$$l = \sqrt{c^2 + (2d)^2}$$

PTの立体角:

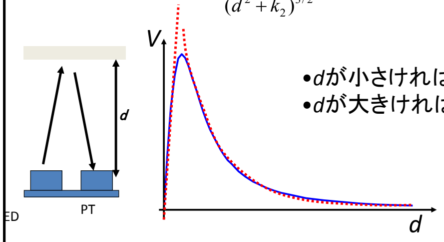
$$\Omega = \frac{\cos\theta}{l^2}\Delta S \qquad \Delta S : \text{PTの表面積}$$

$$\cdots = \frac{k_1 d}{(d^2 + k_2)^{3/2}} \qquad k_1, k_2 : \text{定数}$$

モデル化（２）

PTの受光量が立体角Ωに比例するから，出力電圧も同様．

$$V = \frac{k_1 d}{(d^2 + k_2)^{3/2}}$$ ：理論曲線

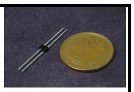


•dが小さければVはdに比例
•dが大きければ$1/d^2$に比例

未知パラメータk_1, k_2を求めれば
入出力関係が記述できる

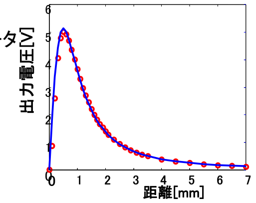
43

フィッティングの準備



$$V = \frac{k_1 d}{(d^2 + k_2)^{3/2}}$$

- d：入力(距離)
- V：出力(電圧)
- k_1, k_2：未知パラメータ



変形（線形化）

$$V^{2/3}(d^2 + k_2) = k_1^{2/3} d^{2/3}$$

$$V^{2/3} d^2 = k_1^{2/3} d^{2/3} - V^{2/3} k_2$$

$V^{2/3} d^2 = y$, $k_1^{2/3} = a_1$, $d^{2/3} = x_1$, $-V^{2/3} = x_2$, $k_2 = a_2$ と置けば

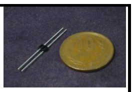
$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

- x_1, x_2, y：既知
- a_1, a_2：未知

最小二乗法によって
パラメータを同定できる．

44

多数の測定から，



$$y_1 = a_1 x_{11} + a_2 x_{12}$$
$$y_2 = a_1 x_{21} + a_2 x_{22}$$
$$\vdots$$
$$y_M = a_1 x_{M1} + a_2 x_{M2}$$

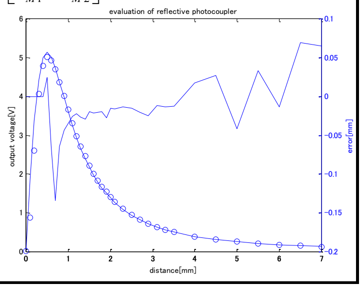
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots \\ x_{M1} & x_{M2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{y} = \mathbf{Xa}$ の形なので，

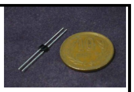
$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{\#}\mathbf{y}$

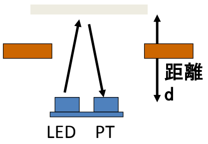
where $\mathbf{X}^{\#} = (\mathbf{X}^{*}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{*}$

によってaを求める．
最後に
$k_1^{2/3} = a_1, k_2 = a_2$
からk_1, k_2を得る．

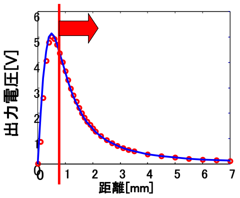


簡易化





出力電圧から距離に変換する際
•2値性がある
•3次方程式の根を得る必要がある
（$V = \frac{k_1 d}{(d^2 + k_2)^{3/2}}$ の変形から)



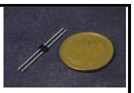
ストッパーを設ける．
距離が離れるのでモデルの簡易化可能

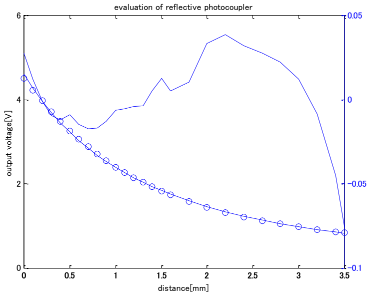
$$V = \frac{k_1}{(d + k_2)^2}$$

同じように$y = a_1 x_1 + a_2 x_2$ の形に変形

46

簡易化（結果）

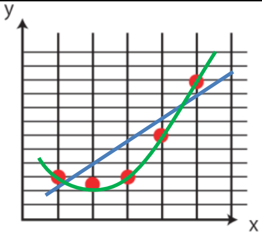




47

レポート課題(1)

次のデータ系列に対して，
Scilabを用いて，
(1) 直線による近似，
(2) 2次曲線による近似を適用，
パラメータを求め，
曲線とデータをグラフに描け



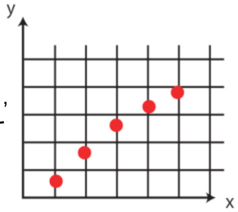
x	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
y	3.0	2.5	3.0	6.0	10.0

なおScilabでは行列Aの擬似逆行列はpinv(A)で直接求めることができる．
当然自分でinv(A'*A)*A'とやっても同じ．

48

レポート課題(2) (余裕のある場合）

次のデータ系列に対して,
y=a1 * log(x) + a2
を仮定してパラメータを求め,
曲線とデータをグラフに描け
（やや難？）



x	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
y	0.5	1.9	2.7	3.3	3.7

49

計測と行列（事例）：CT

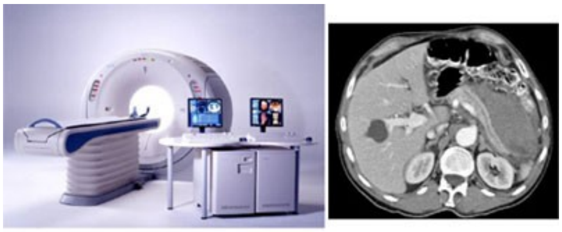
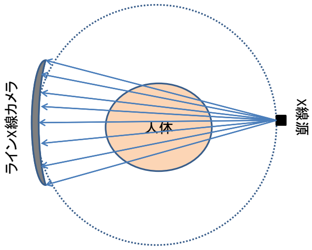


図1．X線CTと画像例

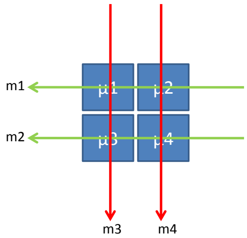
CT:Computational Tomography: 計算による断層撮影
周囲からの計測により，断面／3D形状を再構成

X線CT



- 体内を貫通したX線をライン状カメラで検出＝射影
- 装置自体を回転することで，射影データを一周分取得

（参考）X線CT

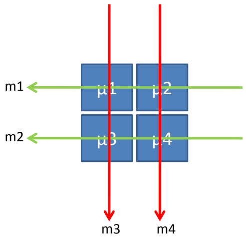


- m1=μ1+μ2
- m2=μ3+μ4
- m3=μ1+μ3
- m4=μ2+μ4

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{bmatrix}$$

- 人体が4ブロックに分かれていたとする.
- それぞれX線を吸収する能力（線減衰係数）が異なる.
μ1〜μ4とする（未知数）
- 2方向から観測，断層データ2種．データ数4獲得
- 連立方程式⇒行列⇒逆行列⇒μ1〜4を取得

レポート課題(3)



計測データがそれぞれ
m1=8, m2=9, m3=6, m4=5
の時，Scilabを用いて断面の透過分布μ1〜μ4を求めよ.

53