

インタラクティブシステム論 第11回

梶本裕之

Twitter ID kajimoto
ハッシュタグ #ninshiki

日程

4/12 インタロダクション
4/19 Scilabの紹介(西6号館3階PCルーム)
4/26 フーリエ変換
5/03 休日
5/10 フーリエ変換と線形システム
5/17 信号処理の基礎
5/24 信号処理応用1(相関)
5/31 信号処理応用2(画像処理)
6/07 ~中間チェック~
6/14 出張により休講
6/21 ラプラス変換
6/28 古典制御の基礎
7/05 行列
7/12 行列と最小二乗法
7/19 ロボティクス
7/26 ~期末チェック~

行列復習

(復習) 行列: データ列を変換するもの

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

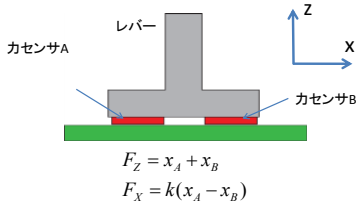
(例1)

y: 観測データ, A: システムの性質, x: 媒介変数

(例2)

y: フーリエ空間での周波数成分, A: フーリエ変換行列,
x: 実空間でのデータ系列

(復習) (例) 2軸力センサ

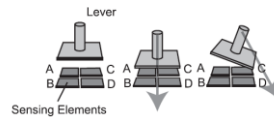


$$2 \times 1 \text{ベクトル} \begin{bmatrix} F_z \\ F_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} \quad 2 \times 1 \text{ベクトル}$$

2x2行列



(復習) (例) 多軸力センサ



$$F_z = k_1(x_A + x_B + x_C + x_D)$$

$$F_x = k_2((x_A + x_B) - (x_C + x_D))$$

$$F_y = k_3((x_A + x_C) - (x_B + x_D))$$

$$3 \begin{bmatrix} F_z \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2 \\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix} \quad 4$$

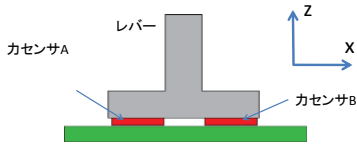
3x4行列

一般には正方行列ではない！！

(例) 6軸力センサには8つ以上のセンサエレメント内蔵



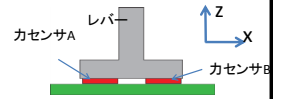
(復習) カセンサのキャリブレーション(校正)



$$\begin{aligned} F_Z &= k_1 x_A + k_2 x_B \\ F_X &= k_3 x_A + k_4 x_B \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

k1~k4のパラメータは元々未知。
これを求めなければ使えない!!

(復習) 逆行列



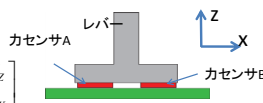
$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

これを $\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ と書く。

ここで、
「ある力を加えたときの各センサ出力は？」
という逆の関係を考える。

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{G}\mathbf{f} \quad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

(復習) 逆行列の測定



$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{f} \quad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

(1) $F_z=1, F_x=0$ の力を加え、各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

各センサの出力に、逆行列の成分 g_1, g_3 が現れる!

(2) $F_z=0, F_x=1$ の力を加え、各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 \\ g_4 \end{bmatrix}$$

各センサの出力に、逆行列の成分 g_2, g_4 が現れる!

(復習) 逆行列の測定

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} \quad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

$\mathbf{G}=\mathbf{A}^{-1}$ の成分, $g_1 \sim g_4$ が得られたので、
その逆行列を計算すれば \mathbf{A} が得られる。

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

まとめると、

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 \\ g_4 \end{bmatrix}$$

行列に単位行列をかけたことに相当

(復習) 単位力でなくて良い

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{z1} \\ f_{x1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{z2} \\ f_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

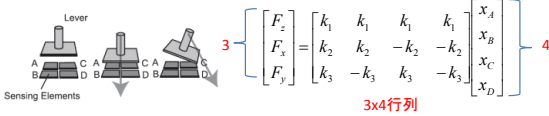
$$\mathbf{G}\mathbf{F} = \mathbf{M}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{M}\mathbf{F}^{-1}$$

- 2回既知のカベクトルを加えて、各センサの出力を得る
- カベクトルを並べたものを力行列 \mathbf{F} 、センサ出力を並べたものを行列 \mathbf{M} とする
- 力行列の逆行列 \mathbf{F}^{-1} を \mathbf{M} にかければ、行列 \mathbf{G} が得られる。
- \mathbf{G} の逆行列が望んだ校正行列 \mathbf{A}

行列と最小二乗法

本日の疑問



- 一般には正方行列ではない
- 「逆行列」は定義できず、キャリブレーションもできないのでは

本日の解答

$$\begin{bmatrix} F_z \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2 \\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}$$

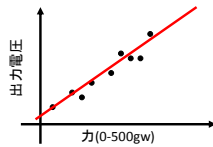
3x4行列

• 逆行列は定義できなくても
擬似逆行列(Pseudo Inverse Matrix)は定義できる。

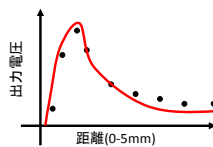
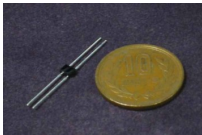
• またこれは**最小二乗法**という、工学全体を支える基礎的な考えのもっとも代表的な体现である。

色々なセンサ

フィルム状センサ

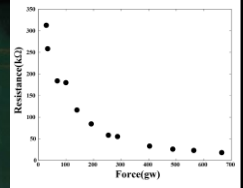
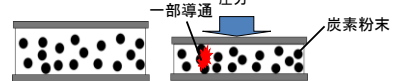


フォトリフレクタを用いた近接距離センサ



いかにして較正曲線を求め、センサとして使えるようにするか？

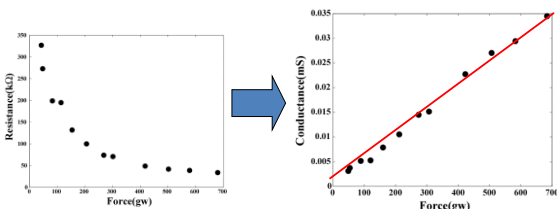
フィルムセンサの定式化(1)



フィルムセンサの抵抗: 力に反比例?

フィルムセンサの定式化(2)

抵抗ではなくコンダクタンス(抵抗の逆数)を見る



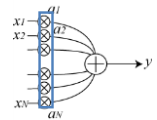
$$y = ax + b \quad \begin{cases} x: \\ y: \\ a, b: \end{cases}$$

実験でなじみ深い「直線フィッティング」

最小二乗法(1)

$y = a_1x + a_2$ から一般化

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_Nx_N$$

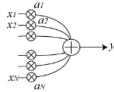


N個の**既知入力** $[x_1, x_2, \dots, x_N]$ と
N個の**未知パラメータ** $[a_1, a_2, \dots, a_N]$ の
積和によって1個の出力 y が決定されるシステム。

目的: N個の未知パラメータ $[a_1, a_2, \dots, a_N]$ の**同定**(identification)
取れる手段: 入力操作と出力の計測

フィルムセンサの場合: $y = a_1x_1 + a_2x_2$ where $x_2 = 1$

最小二乗法(2)



$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_Nx_N$$

入力を変化させ、M回の出力を得る

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1x_{11} + a_2x_{12} + \dots + a_Nx_{1N} \\ y_2 &= a_1x_{21} + a_2x_{22} + \dots + a_Nx_{2N} \\ &\vdots \\ y_M &= a_1x_{M1} + a_2x_{M2} + \dots + a_Nx_{MN} \end{aligned}$$

結局

$$y = Xa \quad \begin{cases} X: M \times N \text{ 行列. 入力. 既知} \\ y: M \times 1 \text{ ベクトル. 出力. 観測可能} \\ a: N \times 1 \text{ ベクトル. 未知.} \end{cases}$$

もし $M=N$ なら

$$a = X^{-1}y$$

実際には $M \neq N$ で X^{-1} は存在しないことがほとんど

最小二乗法(3)

いかにして

$$y = Xa \quad \begin{cases} X: M \times N \text{ 行列. 入力. 既知} \\ y: M \times 1 \text{ ベクトル. 出力. 観測可能} \\ a: N \times 1 \text{ ベクトル. 未知.} \end{cases}$$

を a について解くか.

解けない(未知数より方程式の数が多い)
つまり、式を完全に満たすベクトル a は、**無い**

(1) 測定された出力ベクトル y が誤差を含んでいると仮定
 $y = Xa + e$ where $e = [e_1, e_2, \dots, e_M]^T$

(2) 誤差の大きさが最小となるような x を
もってもらいたい x として受け入れよう。

(3) 大きさとして二乗和(二乗ノルム)を採用。

$$\sum_{i=1}^M e_i^2 = [e_1, e_2, \dots, e_M] [e_1, e_2, \dots, e_M]^T = e^T e$$

誤差の「大きさ」

$$y = Xa + e$$

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_M \end{bmatrix}$$

$$\|e\|^2 = e^T e \quad \text{Tは転置.}$$

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^M e_i^2 = [e_1, e_2, \dots, e_M] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_M \end{bmatrix} = e^T e$$

$$\begin{aligned} &= \dots \\ &= \dots \\ &= \dots \\ &= \dots \end{aligned}$$

誤差の「大きさ」を最小化する

$$\|e\|^2 = y^T y - 2y^T Xa + a^T X^T Xa \quad \|e\|^2 = a^2 x^2 - 2ayx + y^2$$

誤差の大きさが最小となる a を見つける

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \|e\|^2 &= \frac{\partial}{\partial a} (y^T y - 2y^T Xa + a^T X^T Xa) \\ &= \dots \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|e\|^2 &= \frac{\partial}{\partial a} (a^2 x^2 - 2ayx + y^2) \\ &= 2x^2 a - 2yx \\ &= 0 \\ x^2 a &= yx \\ a &= y/x \end{aligned}$$

$$a^T =$$

$$a =$$

$$\therefore ((X^T X)^{-1})^T = ((X^T X)^T)^{-1} = (X^T X)^{-1}$$

擬似逆行列

結論: 未知パラメータのベクトル a は次の式で求められる。

$$a = X^\# y$$

ただし

$$X^\# = (X^T X)^{-1} X^T$$

$X^\#$: 擬似逆行列 (Pseudo Inverse)

擬似逆行列は逆行列の拡張である

行列 X が正則な場合

$$X^\# = (X^T X)^{-1} X^T$$

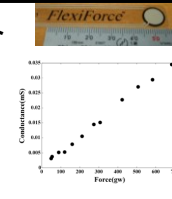
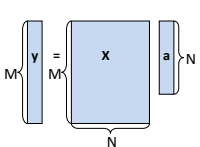
$$\begin{aligned} &= \dots \\ &= \dots \end{aligned}$$

(再考) フィルムセンサの場合

$y = a_1x + a_2$ $\begin{cases} x: \text{力: 既知入力} \\ y: \text{コンダクタンス: 測定結果} \\ a_1, a_2: \text{未知パラメータ} \end{cases}$

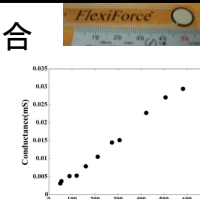
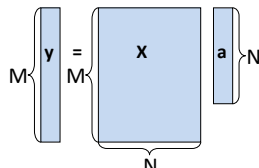
これは $y = a_1x_1 + a_2x_2$ where $x_2 = 1$ とみなせる。

加える力を変え、M回測定する(2回以上)

$$\begin{matrix} y_1 = a_1x_{11} + a_2 \\ y_2 = a_1x_{21} + a_2 \\ \vdots \\ y_M = a_1x_{M1} + a_2 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & 1 \\ x_{21} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{M1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$




(再考) フィルムセンサの場合

よって、 $a = X^\# y$ where $X^\# = (X^T X)^{-1} X^T$ により二つの未知パラメータを求めることができる。

手作業で求めてみる

$$a = X^\# y = (X^T X)^{-1} X^T y$$

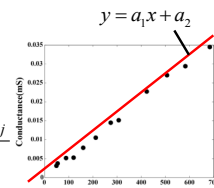
$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_M \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & 1 \\ x_{21} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{M1} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix}$$


手作業で求めてみる

$$a_1 = \frac{M \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_j}{M \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$a_2 = \frac{-\sum x_i \sum x_j y_j + \sum x_i^2 \sum y_j}{M \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

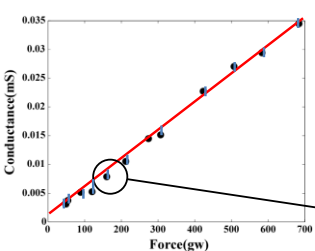
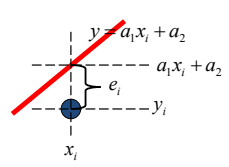
これは、直線によるフィッティングの公式に他ならない



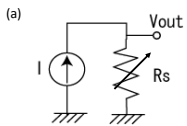
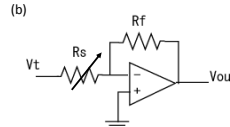
何を最小化したか

$y = Xa + e$
 $e = y - Xa$
 $\|e\|^2 = e^T e = \sum_{i=1}^M e_i^2$
 $y_i = a_1x_i + a_2 + e_i$
 $e_i = y_i - a_1x_i - a_2$

データと直線の、「y軸に沿った距離」の二乗の和を最小化した。

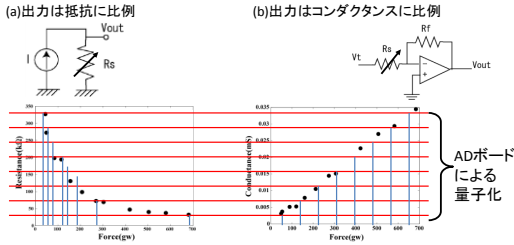



(参考) 実際の測定回路

- 「抵抗」を測定するなら
 - (a) 
 $V_{out} = I \times R_s$
出力電圧は抵抗に比例
- 「コンダクタンス(抵抗の逆数)」を測定するなら
 - (b) 
 $V_{out} = R_f / R_s \times V_t$
V_tが一定なら出力電圧は抵抗に反比例

「抵抗」を測定して逆数をとればよいのでは？

別にそれでもよい。しかし玄人な理由はある。

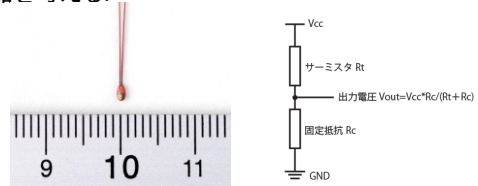


- アナログ部による線形化の意義
=ADボードによる量子化の影響を低減
「**ダイナミックレンジを広げる**」とも言う。

31

(参考2) 実際の測定のための回路設計

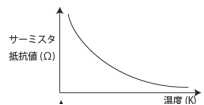
- 例えば温度を測定したいと考える
- 「サーミスタ」を使えばよいことが分かる。
- サーミスタはやはり温度に反比例(正確には違う)な感じで抵抗値が下がるので、逆数に近い電圧が出る回路を考える。



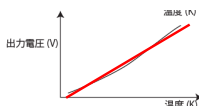
ではこの固定抵抗はどのように決めたらよいのか？

(参考2) 実際の測定のための回路設計

- 温度変化に対して抵抗値を測定する



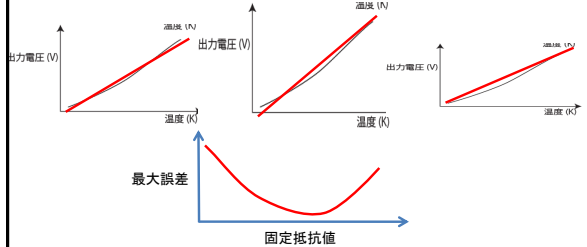
- 固定抵抗が例えば10kΩで電源が5Vの時、出力電圧がどのように変化するかをシミュレートする。



- 直線フィッティングで生じる最大の誤差を求めるこの誤差が、測定システムの「性能」になる。

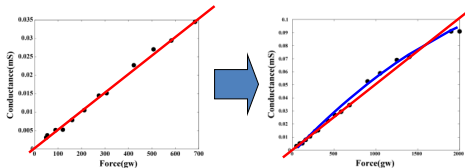
(参考2) 実際の測定のための回路設計

- 固定抵抗を色々変えた場合をシミュレートすると、最大誤差の変化が分かる。



- 最大誤差が最小になる値が求める固定抵抗値

フィルムセンサを限界性能まで使いきりたい。



直線近似 $y = a_1x + a_2$ ではフィッティングできない気が、
(直線領域だけで使う、という方針も正しい)

多項式によるフィッティングを試みる。

$$y = a_1x + a_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = a_1x^2 + a_2x + a_3 \\ y = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 \end{cases}$$

もはや直線フィッティングの公式は使えない。

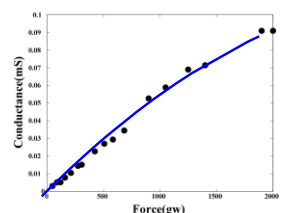
35

多項式近似

$$y = a_1x^2 + a_2x + a_3 \quad \begin{cases} x: \text{力: 既知入力} \\ y: \text{コンダクタンス: 測定出力} \\ a_1, a_2, a_3: \text{未知パラメータ} \end{cases}$$

何度も測定する

$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1^2 + a_2x_1 + a_3 \\ y_2 = a_1x_2^2 + a_2x_2 + a_3 \\ \vdots \\ y_M = a_1x_M^2 + a_2x_M + a_3 \end{cases}$$



36

多項式近似

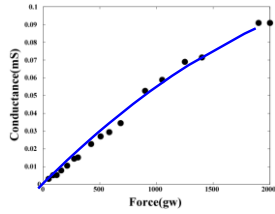
$$y_1 = a_1x_1^2 + a_2x_1 + a_3$$

$$y_2 = a_1x_2^2 + a_2x_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$y_M = a_1x_M^2 + a_2x_M + a_3$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_M^2 & x_M & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$



$y = Xa$ の形に出来たので、

$$a = X^\# y \quad \text{where} \quad X^\# = (X^T X)^{-1} X^T$$

により3つの未知パラメータを求めることができる。(計算機のごとく)

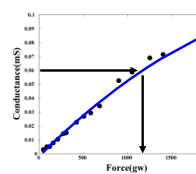
37

我に返って... 何をしたかったか

- (1) $y = a_1x + a_2$
- (2) $y = a_1x^2 + a_2x + a_3$
- (3) $y = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$

x : 力: 既知の入力
 y : コンダクタンス. 測定した出力
 a_1, \dots, a_n : 未知パラメータ

モデルの未知パラメータを求めるのがゴールではない.
 測定出力 y から力 x を逆算することがゴール.



- (1) $x = (y - a_2) / a_1$
- (2) $a_1x^2 + a_2x + (a_3 - y) = 0$

$$x = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1(a_3 - y)}}{2a_1}$$
- (3) $a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + (a_4 - y) = 0$
 $x = \dots$ (3次方程式の解の公式)

38

係数は別に整数でなくて良い

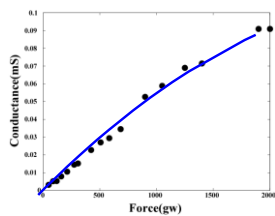
$$y_1 = a_1x_1^{1/2} + a_2$$

$$y_2 = a_1x_2^{1/2} + a_2$$

$$\vdots$$

$$y_M = a_1x_M^{1/2} + a_2$$

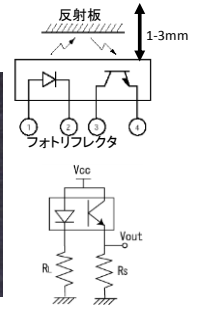
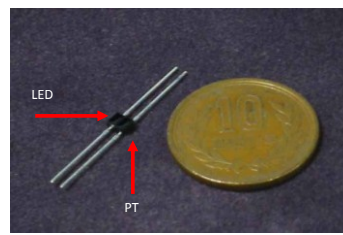
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{1/2} & 1 \\ x_2^{1/2} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_M^{1/2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$



関数であっても良い。たとえば $\log(x)$ など。

39

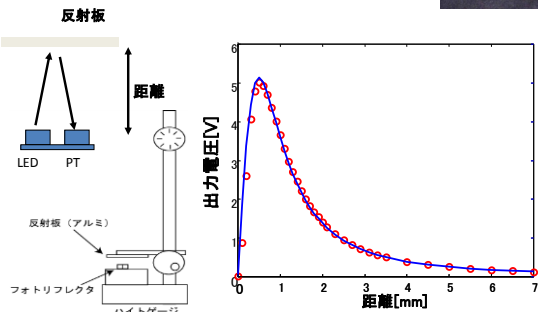
(ケーススタディ) フォトリフレクタを用いた近接距離計の較正



出力電圧は反射光量に比例。
 出力電圧から反射板との距離を得たい。

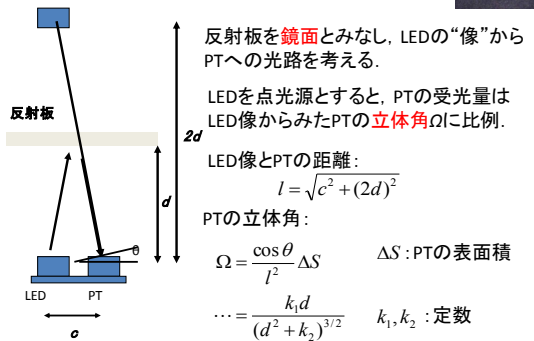
40

測定



いかにして較正曲線を求め、センサとして使えるようにするか?!

モデル化(1)

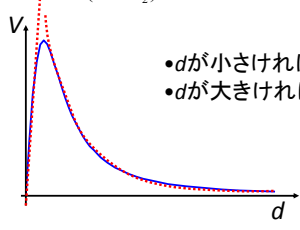
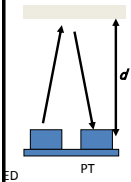


42

モデル化(2)

PTの受光量が立体角Ωに比例するから、出力電圧も同様。

$$V = \frac{k_1 d}{(d^2 + k_2)^{3/2}} \quad \text{: 理論曲線}$$



- d が小さければ V は d に比例
- d が大きければ $1/d^2$ に比例

未知パラメータ k_1, k_2 を求めれば
入出力関係が記述できる

43

フィッティングの準備

$$V = \frac{k_1 d}{(d^2 + k_2)^{3/2}} \quad \left\{ \begin{array}{l} d: \text{入力(距離)} \\ V: \text{出力(電圧)} \\ k_1, k_2: \text{未知パラメータ} \end{array} \right.$$

変形(線形化)

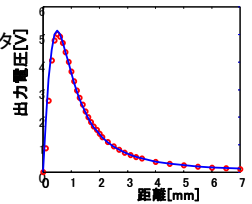
$$V^{2/3}(d^2 + k_2) = k_1^{2/3} d^{2/3}$$

$$V^{2/3} d^2 = k_1^{2/3} d^{2/3} - V^{2/3} k_2$$

$$\left. \begin{array}{l} V^{2/3} d^2 = y \\ k_1^{2/3} = a_1 \\ d^{2/3} = x_1 \\ -V^{2/3} k_2 = x_2 \\ k_2 = a_2 \end{array} \right\} \text{と置けば}$$

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

$\left\{ \begin{array}{l} x_1, x_2, y: \text{既知} \\ a_1, a_2: \text{未知} \end{array} \right.$ 最小二乗法によって
パラメータを同定できる. 44



多数の測定から、

$$\begin{array}{l} y_1 = a_1 x_{11} + a_2 x_{12} \\ y_2 = a_1 x_{21} + a_2 x_{22} \\ \vdots \\ y_M = a_1 x_{M1} + a_2 x_{M2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ll} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots \\ x_{M1} & x_{M2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \end{array} \right]$$

evaluation of reflective photocoupler

$y = Xa$ の形なので、

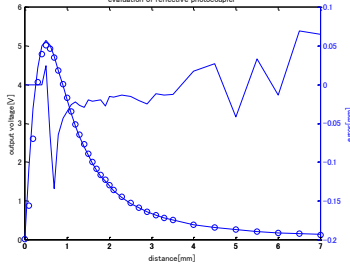
$$a = X^\# y$$

$$\text{where } X^\# = (X^T X)^{-1} X^T$$

によって a を求める。
最後に

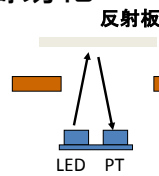
$$k_1^{2/3} = a_1, k_2 = a_2$$

から k_1, k_2 を得る。



45

簡易化

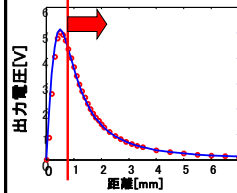


- 出力電圧から距離に変換する際
- 2値性がある
 - 3次方程式の根を得る必要がある
- ($V = \frac{k_1 d}{(d^2 + k_2)^{3/2}}$ の変形から)

ストップバーを設ける。
距離が離れるのでモデルの簡易化可能

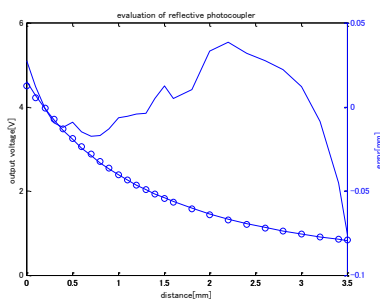
$$V = \frac{k_1}{(d + k_2)^2}$$

同じように $y = a_1 x_1 + a_2 x_2$ の形に変形



46

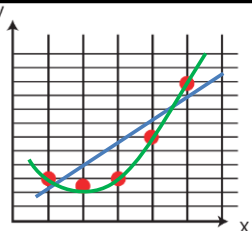
簡易化(結果)



47

レポート課題(1)

次のデータ系列に対して、
Scilabを用いて、
(1) 直線による近似、
(2) 2次曲線による近似を適用、
パラメータを求め、
曲線とデータをグラフに描け



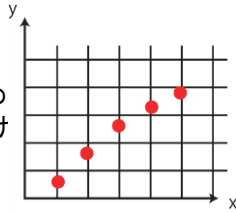
| | | | | | |
|---|-----|-----|-----|-----|------|
| x | 1.0 | 2.0 | 3.0 | 4.0 | 5.0 |
| y | 3.0 | 2.5 | 3.0 | 6.0 | 10.0 |

なおScilabでは行列Aの擬似逆行列は `pinv(A)` で直接求めることができる。
当然自分で `inv(A'*A)*A'` とやっても同じ。

48

レポート課題(2) (余裕のある場合)

次のデータ系列に対して,
 $y = a_1 * \log(x) + a_2$
 を仮定してパラメータを求め
 曲線とデータをグラフに描け
 (やや難?)



| | | | | | |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|
| x | 1.0 | 2.0 | 3.0 | 4.0 | 5.0 |
| y | 0.5 | 1.9 | 2.7 | 3.3 | 3.7 |

49

計測と行列(事例): CT

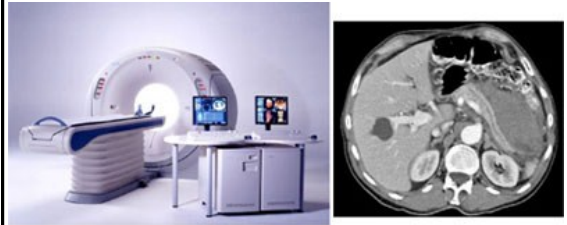
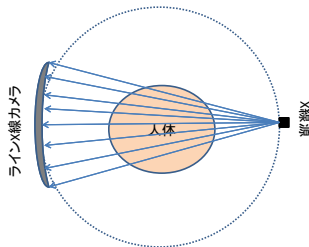


図1. X線CTと画像例

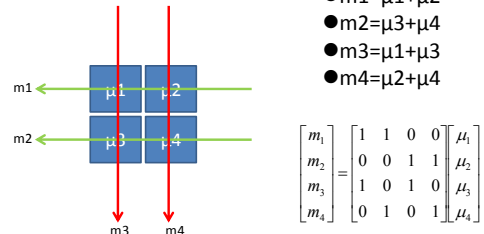
CT: Computational Tomography: 計算による断層撮影
 周囲からの計測により, 断面/3D形状を再構成

X線CT



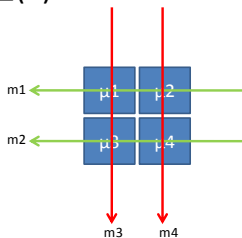
- 体内を貫通したX線をライン状カメラで検出=射影
- 装置自体を回転することで, 射影データを一周分取得

(参考)X線CT



- $m_1 = \mu_1 + \mu_2$
- $m_2 = \mu_3 + \mu_4$
- $m_3 = \mu_1 + \mu_3$
- $m_4 = \mu_2 + \mu_4$
- 人体が4ブロックに分かれていたとする。
- それぞれX線を吸収する能力(線減衰係数)が異なる。 $\mu_1 \sim \mu_4$ とする(未知数)
- 2方向から観測, 断層データ2種. データ数4獲得
- 連立方程式 \Rightarrow 行列 \Rightarrow 逆行列 $\Rightarrow \mu_1 \sim 4$ を取得

レポート課題(3)



計測データがそれぞれ
 $m_1=8, m_2=9, m_3=6, m_4=5$
 の時, Scilabを用いて断面の透過分布 $\mu_1 \sim \mu_4$ を求めよ。

53