認識行動システム論

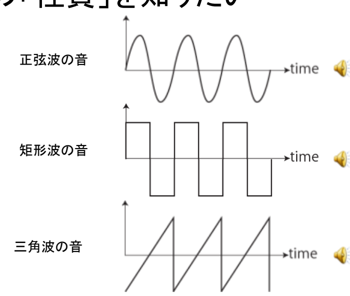
第3回
梶本裕之
http://kaji-lab.jp

日程

10/22 フーリエ変換
10/29 (学会出張のため休講)
11/05 線形システムとフーリエ・ラプラス変換
11/12 行列
11/19 (調布祭準備のため休講)
11/26 信号処理と行列
12/03 行列と最小二乗法(休講の可能性)
12/10 中間テスト(授業時間中)
12/17 信号処理(アナログ・デジタル)
01/07 古典制御の基礎
01/14 ロボティクス
01/21 画像処理
01/28 期末テスト(授業時間中)

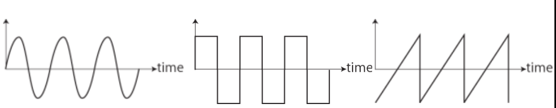
フーリエ変換

信号の「性質」を知りたい



(Q)この3つは，何が違うのだろうか？

答えは認識の数だけある

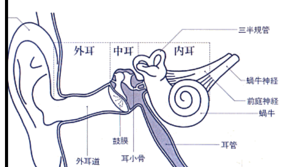


(Q)この3つは，何が違うのだろうか？

(A1)形が違う
(A2)上昇速度，下降速度が違う
(A3)ある閾値以上となる時間幅が違う
etc… すべて正しい

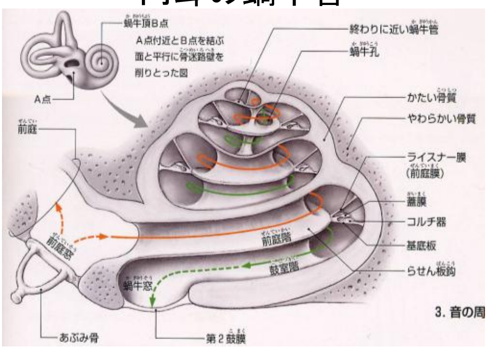
回答の正しさは，現象の本質にどれだけ迫っているかによる．
つまり，現象を認識するシステムによって正答は異なる．

音の「認識」とは？



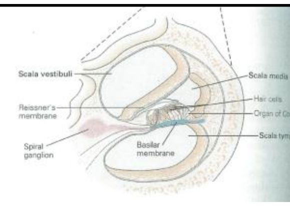
1. 気体の振動
2. 鼓膜の振動
3. つち骨・きぬた骨・あぶみ骨によるリレー
4. 前庭窓の振動
5. リンパ液（液体）の振動
6. 基底膜の振動

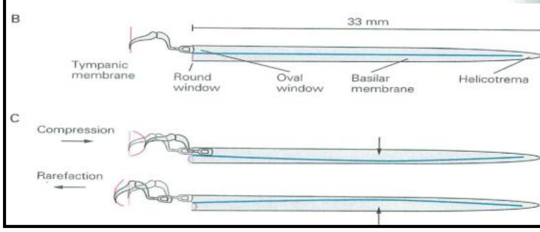
内耳の蝸牛管



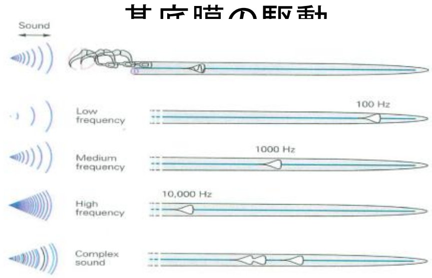
蝸牛内の基底膜

- 管を上下に仕切る膜



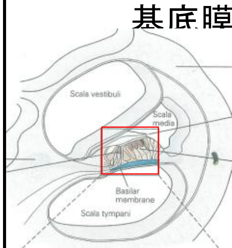


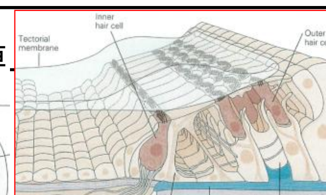
基底膜の駆動

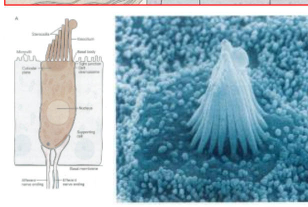


- 基底膜上に進行波を形成
- 低周波ほど減衰せずに奥まで到達する（周波数分解）

基底膜





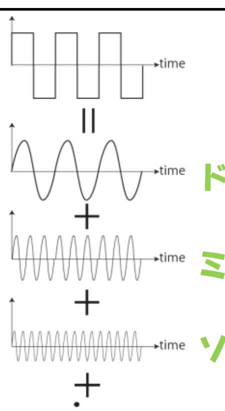


音の場合

耳は音を，周波数で分解して認識．

⇒周波数成分がアルファベット，
その合成が単語に相当

⇒音の場合の答え：
「周波数成分が違う」



他の多くの場合でも周波数が重要

●耳は音を，周波数分解して認識する装置

●耳に限らず，多くの生体センサは周波数分解によって現象を把握（例：皮膚）

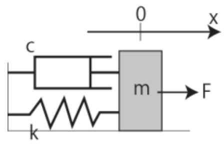
（Q）なぜ周波数なのだろうか

言い換えると，
正弦波はなぜ多くの場合，要素，成分，アルファベットにふさわしいのだろうか？

正弦波は歪まない

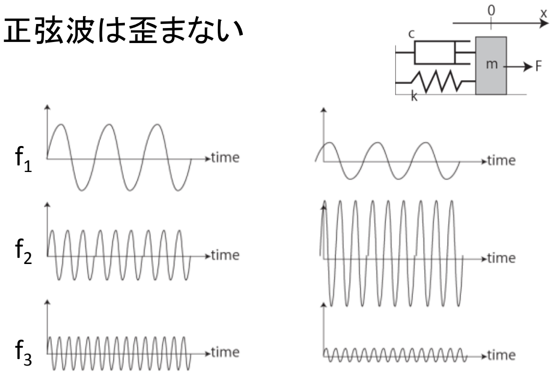
●線形な微分方程式で記述されるシステムでは，正弦波の入力は「振幅」と「位相」を変えるものの，同じ周波数の正弦波のままになる．

(例)バネ・マス・ダンパ系
おもりに加わる力は，
F:外力
cx’:粘性による力
Kx:バネによる力
ニュートンの法則ma=Fより，



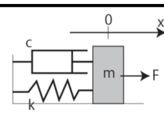
●入力：F(t)=sin(ft) カをヨーヨーのように加える
●出力：x(t)　　　おもりはどのように動くか？

正弦波は歪まない

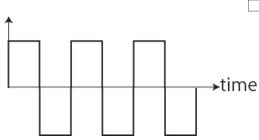


●入力：F(t)=sin(ft)　　●出力：x(t)

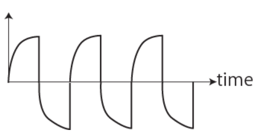
一般の波は歪む



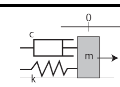
●入力：F(t) 矩形波状の力を加える

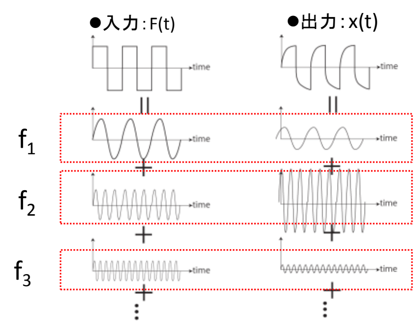


●出力：x(t)

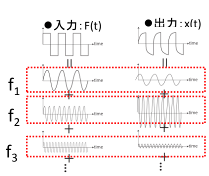


歪みを周波数で分解して説明





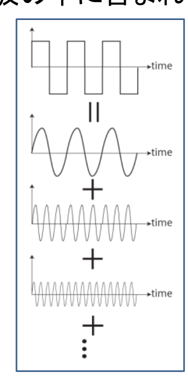
(Q)正弦波はなぜ多くの場合，要素としてふさわしいのだろうか？



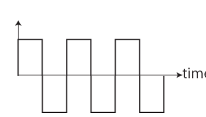
(A1)　正弦波入力に対する出力も
　　　同じ周波数の正弦波となる(と近似できる事が多い)から

(A2)　周波数成分ごとの入出力関係から，
　　　一般の入力に対する出力を合成できるから

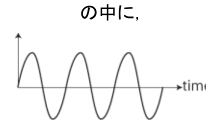
波の中に含まれる正弦波の成分を調べたい



第一段階として，



の中に，



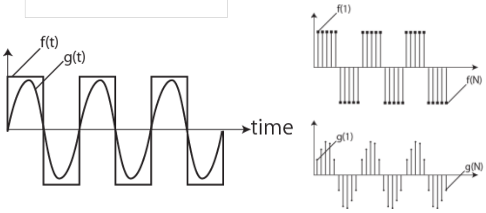
はどれだけ含まれるだろうか？

波形fに波形gはどれだけ含まれるか

波形f中の，波形gの成分

$= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)dt$ （連続関数）

= （離散化して考えた場合）

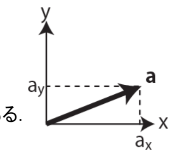


ベクトル空間と内積(復習)

ベクトル **a**=[a_x, a_y] のx成分は？. . . . . a_x

これはベクトル**a**とベクトル **x**=[1,0]との内積である.

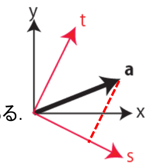
a・**x** = [a_x, a_y]・[1,0] = a_x



回転した座標軸，s, tを考える.
ベクトル **a**=[a_x, a_y] の，s 成分は？

これはベクトル**a**とベクトル **s**=[s_x, s_y]との内積である.

a・**s** = [a_x, a_y]・ [s_x, s_y]

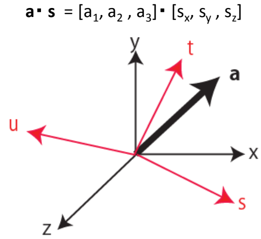


内積は，あるベクトルが別のベクトルの成分をどれだけ持つかを表す

さらに

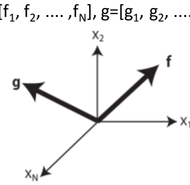
3次元空間に，座標軸 s,t,uを考える.
ベクトル **a**=[a_x, a_y , a_z] の，s 成分は？

これはベクトル**a**とベクトル **s**との内積である.
a・ **s** = [a_1, a_2 , a_3]・ [s_x, s_y , s_z]



では

N次元空間で，二つのベクトル
f=[f_1, f_2, ... ,f_N], g=[g_1, g_2, ... ,g_N] を考える.



内積 **f**・**g**は，ベクトルfの，g軸成分(または逆)を表す.

=

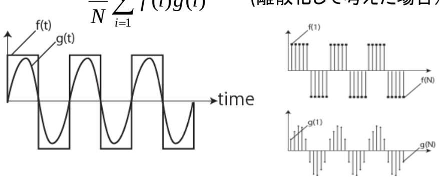
=

波形fに波形gはどれだけ含まれるか（再）

波形f中の，波形gの成分

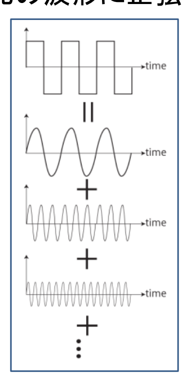
$= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)dt$ （連続関数）

$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(i)g(i)$ （離散化して考えた場合）



これは二つの波をベクトルと考えた時の内積に他ならない
※内積を連続関数に対して定義

元の波形に正弦波がどれだけ含まれるか



元の波形：周期Tの波形 f(t)

周期Tのcosine波はどれだけ含まれるか

$a_1 =$

周期Tのsine波はどれだけ含まれるか

$b_1 =$

周期2Tのcosine波はどれだけ含まれるか

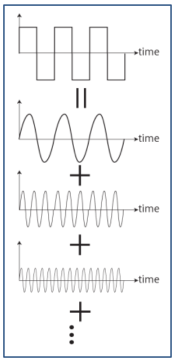
$a_2 =$

周期2Tのsine波はどれだけ含まれるか

$b_2 =$

以下a_3, b_3, a_4, b_4, ...

フーリエ級数展開：定義



周期Tの波形 f(t)は次のように分解できる

$$f(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(2\pi mt/T) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(2\pi mt/T)$$

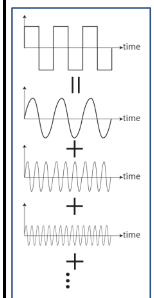
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$ 平均値（DC成分）

$$a_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi mt/T)dt$$

$$b_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2\pi mt/T)dt$$

※この授業では係数は気にしない．

フーリエ級数展開の意味するところ



元の波形：周期Tの波形 f(t)

周期Tのcosine波はどれだけ含まれるか

$$a_1 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi t/T)dt$$

周期Tのsine波はどれだけ含まれるか

$$b_1 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2\pi t/T)dt$$

周期2Tのcosine波はどれだけ含まれるか

$$a_2 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi t\times 2/T)dt$$

周期2Tのsine波はどれだけ含まれるか

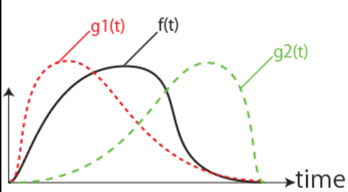
$$b_2 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2\pi t\times 2/T)dt$$

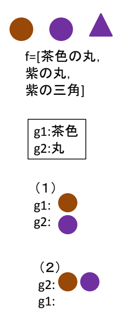
以下a_3, b_3, a_4, b_4, …

①分解の仕方は一通り
②分解した各成分を合成すると元に戻る

これは当たり前のことではない！！

①分解の仕方は一通り？



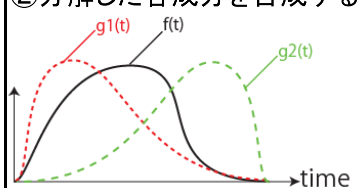


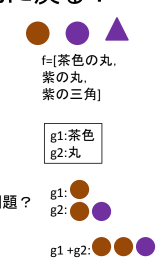
f(t)を，g1(t)成分と，g2(t)成分と，残りに分けたい．

f(t)から，
（1）まずg1(t)成分を抽出し，残りからg2(t)成分を抽出する
（2）まずg2(t)成分を抽出し，残りからg1(t)成分を抽出する
この二つは，通常は異なる結果を生む．

普通，分解の仕方は抽出の順番に依存

②分解した各成分を合成すると元に戻る？





ある成分を抽出した「残り」から次の成分を抽出したことが問題？
では
f(t)からg1(t)成分を抽出
f(t)からg2(t)成分を抽出
すれば抽出の順番は関係なくなる？？

この二成分を合成すると，元のf(t)より大きくなってしまう．

普通，合成しても元に戻らない

つまり

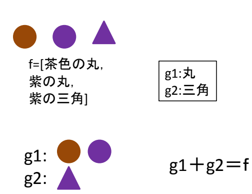
ある関数f(t)を，
関数群$g_1(t)$, … , $g_\infty(t)$の成分に分解するとき，
(たとえばフーリエ変換ではsin,cos．これを基底関数と呼ぶ)

分解方法が一通りで，
分解結果を合成して元に戻るのは

稀で特殊

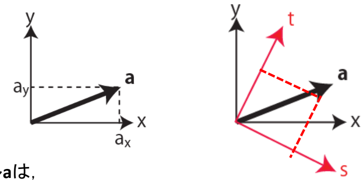
うまくいくのは

任意の基底関数同士が，
お互いの要素を持たないとき，
分解の仕方は一通りとなる．



g1＋g2＝f

ベクトルの成分(復習)

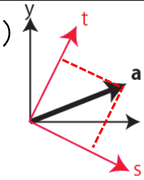


ベクトルaは,
●ベクトルxとyの成分に一意に分けられる. 各成分は**a•x, a•y.**
●ベクトルsとtの成分に一意に分けられる. 各成分は**a•s, a•t.**

これは
●ベクトルxとyが, お互いの成分を持たないから.
●ベクトルsとtが, お互いの成分を持たないから.

このとき, **x**と**y(s**と**t)**は直交しているという.

直交ベクトルと直交基底(復習)

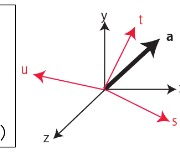


直交ベクトル同士は, 内積が0である.

$x \cdot y=[1,0] \cdot [0,1]=0$
$s \cdot t=[s_x,s_y] \cdot [t_x,t_y]=0$

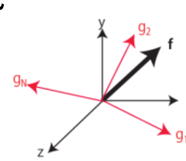
逆に, 内積が0であることが直交基底であることの条件!

N次元空間でN個のベクトルが,
どの二つをとっても直交しているとき,
これを直交基底と呼び,
その空間の任意の点は,
直交基底の成分で表せる.
(図では**x,y,z**が直交基底. **s,t,u**も直交基底)



N次元空間の直交基底

N次元空間で, N個のベクトル
$\mathbf{g_1}=[g_{11}, g_{12}, \ldots ,g_{1N}]$,
$\mathbf{g_2}=[g_{21}, g_{22}, \ldots ,g_{2N}]$,
…
$\mathbf{g_N}=[g_{N1}, g_{N2}, \ldots ,g_{NN}]$を考える.



すべてのペアの内積 $\mathbf{g_i} \cdot \mathbf{g_j}$が0なら,

$\mathbf{g_i} \bullet \mathbf{g_j}$ =

=

=

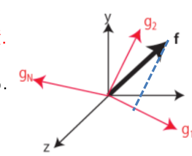
$\mathbf{g_1}$ ~$\mathbf{g_N}$は直交基底であり,

任意のN次元ベクトルfは, $\mathbf{g_1}$ ~$\mathbf{g_N}$の各成分の和で一意に表せる.

N次元空間の直交基底の成分

N次元ベクトル**f**の$\mathbf{g_i}$成分は, **f**と$\mathbf{g_i}$の内積.

結局, ベクトルfは, 次のように分解される.



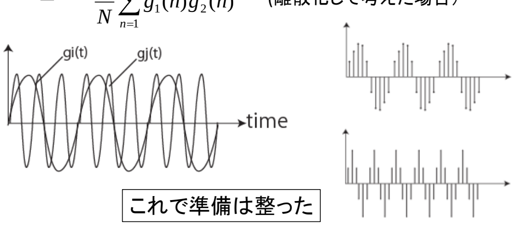
$$\mathbf{f} = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g_1})\, \mathbf{g_1} + (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g_2})\, \mathbf{g_2} + \ldots + (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g_N})\, \mathbf{g_N}$$

$$[f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_N] \bullet [g_{11} \quad g_{12} \quad \cdots \quad g_{1N}]$$
$$= \sum_{n=1}^{N} f_n g_{1n}$$

関数でも「直交」を内積から定義できる

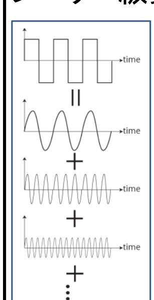
波形$g1$と$g2$の内積を取る.

$$= \frac{1}{T}\int_0^T g_1(t) g_2(t) dt \quad \text{(連続関数)}$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g_1(n) g_2(n) \quad \text{(離散化して考えた場合)}$$



これで準備は整った

フーリエ級数展開の意味するところ(再)



元の波形:周期Tの波形 f(t)

周期Tのcosine波はどれだけ含まれるか
$$a_1 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi t/T)dt$$

周期Tのsine波はどれだけ含まれるか
$$b_1 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2\pi t/T)dt$$

周期2Tのcosine波はどれだけ含まれるか
$$a_2 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi t \times 2/T)dt$$

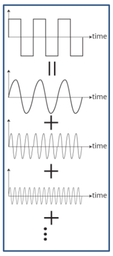
周期2Tのsine波はどれだけ含まれるか
$$b_2 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2\pi t \times 2/T)dt$$

以下a_3, b_3, a_4, b_4, …

①分解の仕方は一通り
②分解した各成分を合成すると元に戻る

これは当たり前のことではない!!

フーリエ級数の各基底関数の内積を取る



二つの基底関数，cos(2πmt/T)，cos(2πnt/T)の内積は？

$$\int_0^T \cos(2\pi mt/T)\cos(2\pi nt/T)dt$$

=

これはm=nでなければ必ず0

二つの基底関数，cos(2πmt/T)，sin(2πnt/T)の内積は？

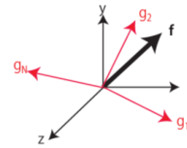
$$\int_0^T \cos(2\pi mt/T)\sin(2\pi nt/T)dt$$

=

これも必ず0

任意の基底関数の内積が0.
⇒直交基底となる！！

フーリエ級数の基底関数は直交基底



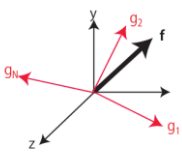
g1=cos(2π×1t/T)
g2=sin(2πt×1t/T)
g3=cos (2π×2t/T)
g4=sin(2πt×2t/T)
g5=cos (2π×3t/T)
g6=sin(2πt×3t/T)
…

これらは，たがいに直交するベクトルであり，
直交基底を構成する

よって，任意の関数 f はg1～gNによって一意に表現できる.

離散フーリエ級数展開

有限長さの関数(0<t<T)を，N分割して離散的に表す．f(t) ⇒ [f1,f2,...,fN]



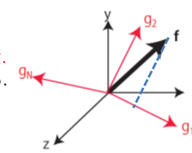
基底関数⇒N次元基底ベクトルに
g1=cos(2π×1t/T) = [g11,g12,...,g1N]
g2=sin(2πt×1t/T) = [g21,g22,...,g2N]
g3=cos (2π×2t/T) = [g31,g32,...,g3N]
g4=sin(2πt×2t/T) = [g41,g42,...,g4N]
g5=cos (2π×3t/T) = [g51,g52,...,g5N]
g6=sin(2πt×3t/T) = [g61,g62,...,g6N]
…

これらは，たがいに直交するN次元ベクトルであり，
直交基底を構成する

よって，任意の波形 f，すなわちベクトル[f1,f2,...fN]
はg1～gNによって一意に表現できる.

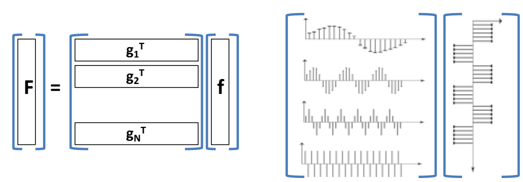
行列による表現

N次元ベクトルfのg_i 成分は，fとg_i の内積．
結局，ベクトルfは，次のように分解される．
$\mathbf{f} = (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}_1)\,\mathbf{g}_1 + (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}_2)\,\mathbf{g}_2 + \dots + (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}_N)\,\mathbf{g}_N$

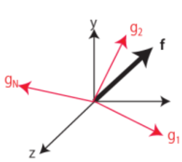


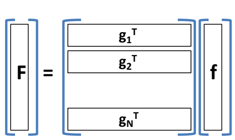
g1の成分．フーリエ級数

フーリエ級数を求めるには，$\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}_1$，$\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}_2$，... $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}_N$なる，
N個の内積を計算すればよい．



フーリエ級数展開とは





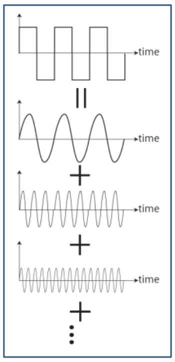
つまり
行列特に回転行列による座標変換の一種であり，
実空間の値で表されているベクトル f を
フーリエ空間の値で表されるベクトル F で表現するもの.

フーリエ○○

フーリエ級数展開
⇒離散フーリエ級数展開（済）
⇒複素フーリエ級数展開

⇒フーリエ変換
⇒離散フーリエ変換

複素フーリエ級数展開：定義



周期Tの波形 f(t)は次のように分解できる

$$f(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \exp(j2\pi mt/T)$$

$$c_m=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp(-j2\pi mt/T)dt$$

sin(2πmt/T)，cos(2πmt/T)の代わりに，
exp(i2πmt/T)を用いて整理したもの．
係数c_mはもはや複素数である．

exp(j2πmt/T)は直交関数系である．すなわち

が，m=n以外で成り立つ．

フーリエ変換：定義

“周期T”ではない波形 f(t)に対する変換．Tを無限大とした極限から導かれる．

逆フーリエ変換

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

$$f(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \exp(j2\pi mt/T)$$

フーリエ変換

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

$$c_m=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp(-j2\pi mt/T)dt$$

振幅，パワースペクトラム，位相

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

$\omega=2\pi f$ 角周波数

角周波数ωでの振幅

角周波数ωでのパワースペクトラム

角周波数ωでの位相

フーリエ変換の役割：信号に含まれる周波数成分を観察する．

離散フーリエ変換(DFT)：定義

f(t), F(ω)を離散化したもの．Discrete Fourier Transform
時間を有限とすると離散複素フーリエ級数展開と同じ．

離散逆フーリエ変換

$$f_t=\sum_{k=0}^{N-1} C_k \exp(j\omega_0 kt)$$

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

離散フーリエ変換

$$C_k=\sum_{t=0}^{N-1} f_t \exp(-j\omega_0 kt)$$

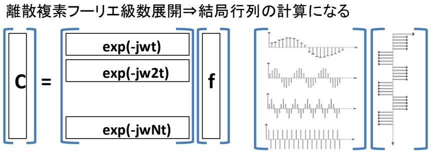
$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

高速フーリエ変換(FFT)：ほんのさわりだけ

離散フーリエ変換

$$C_k=\sum_{t=0}^{N-1} f_t \exp(-j\omega_0 kt)$$

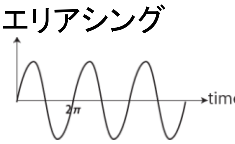
離散複素フーリエ級数展開⇒結局行列の計算になる



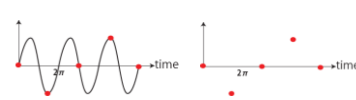
一般に行列×ベクトルは行列サイズの数だけ乗算が必要（N×Nのオーダー）
しかし，
•exp(-jwkt)は繰り返し構造をとる
•特にNが2の階乗の時，行列全体にフラクタル的な繰返し構造が生じる
という特徴をうまく使うと，乗算回数を抑えられる(N×logNのオーダー)
リアルタイムにフーリエ変換を行う必要がある応用に必須．

離散化に際して：エリアシング

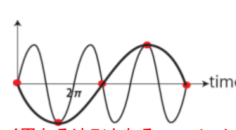
元の信号：sin(x)，周期2π



離散化の間隔　3/2 π



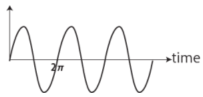
なめらかに結ぶ



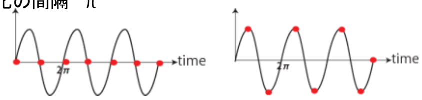
元と全く異なる波形となる＝エリアシング

離散化に際して：ナイキスト周波数

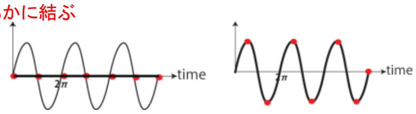
元の信号：sin(x)，周期2π



離散化の間隔　π



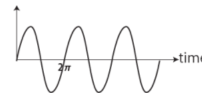
なめらかに結ぶ



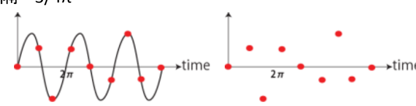
やはり元と異なる波形となる

離散化に際して：ナイキスト周波数未満

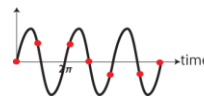
元の信号：sin(x)，周期2π



離散化の間隔　3/4π



なめらかに結ぶ



元の波形が再現できる！！

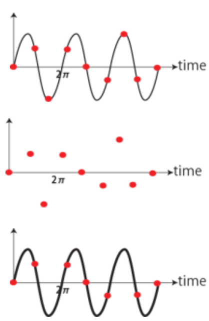
サンプリング定理（標本化定理）

元信号に含まれる最高周波数の，

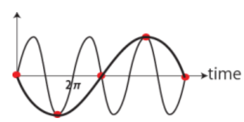
倍より高い周波数でサンプリング（標本化）していれば，

元の信号はサンプリング点から完全に再生できる．

倍の周波数＝ナイキスト周波数



サンプリング定理（標本化定理）



逆に，エリアシングを生じないために，

サンプリング周波数の半分以上の周波数は，アナログ的にカットする必要がある．

カットしないとエリアシングを生じ，偽の低い周波数が観察される．
（例）蛍光灯下の扇風機，テレビ画面のビデオ撮影

レポート

次のサンプルを参考に，同じ周期の正弦波，矩形波，三角波をフーリエ変換し，パワースペクトルを観察，比較せよ．
レポートでは
- 3つのパワースペクトルを一つのグラフに表示する一つのソースコード
- そこからわかったこと，すなわち音色の違いの原因の考察をメール本文に

```
//一周期100の矩形波(ただし直流成分を無くすため平均値0としている)
wave=[ones(1,50), zeros(1,50)] - 0.5;

//5回繰り返す（回数は適当）
wave = [wave,wave,wave,wave,wave];

//フーリエ変換
fourier = fft(wave);

//パワースペクトルを計算
power_spec = fourier .* conj(fourier);

//計算結果を表示（長さは見やすくなるように適当に変える）
plot(power_spec(1:100));
```