インタラクティブシステム論
第3回

梶本裕之
Twitter ID kajimoto
ハッシュタグ #ninshiki

日程

- 4/12 イントロダクション
- 4/19 Scilabの紹介（西6号館3階PCルーム）
- 4/26 フーリエ変換
- 5/03 休日
- 5/10 フーリエ変換と線形システム
- 5/17 信号処理の基礎
- 5/24 信号処理応用1（相関）
- 5/31 信号処理応用2（画像処理）
- 6/07 ～中間チェック～
- 6/14 出張により休講
- 6/21 ラプラス変換
- 6/28 古典制御の基礎
- 7/05 行列
- 7/12 行列と最小二乗法
- 7/19 ロボティクス
- 7/26 ～期末チェック～

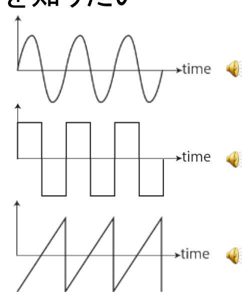
フーリエ変換

信号の「性質」を知りたい

正弦波の音

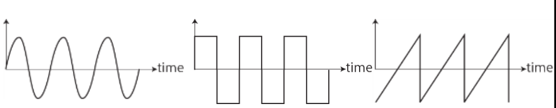
矩形波の音

三角波の音



（Q）この3つは，何が違うのだろうか？

答えは認識の数だけある

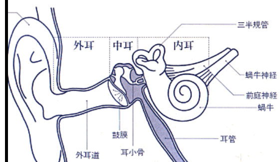


（Q）この3つは，何が違うのだろうか？

(A1)形が違う
(A2)上昇速度，下降速度が違う
(A3)ある閾値以上となる時間幅が違う
etc… すべて正しい

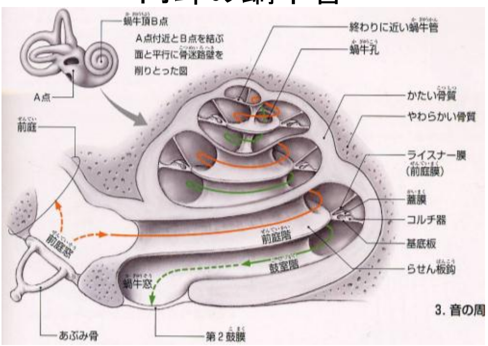
回答の正しさは，現象の本質にどれだけ迫っているかによる．
つまり，現象を認識するシステムによって正答は異なる．

音の「認識」とは？



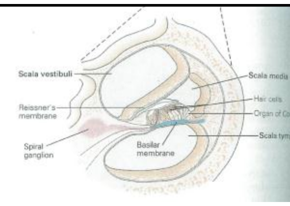
1. 気体の振動
2. 鼓膜の振動
3. つち骨・きぬた骨・あぶみ骨によるリレー
4. 前庭窓の振動
5. リンパ液（液体）の振動
6. 基底膜の振動

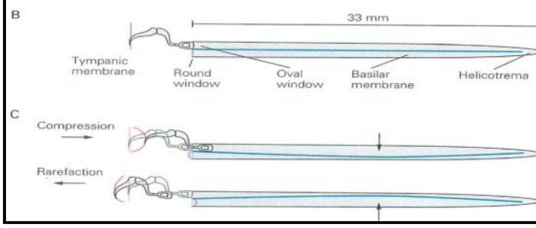
内耳の蝸牛管



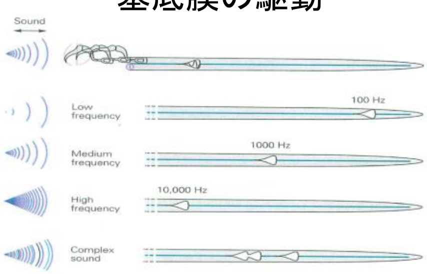
蝸牛内の基底膜

- 管を上下に仕切る膜



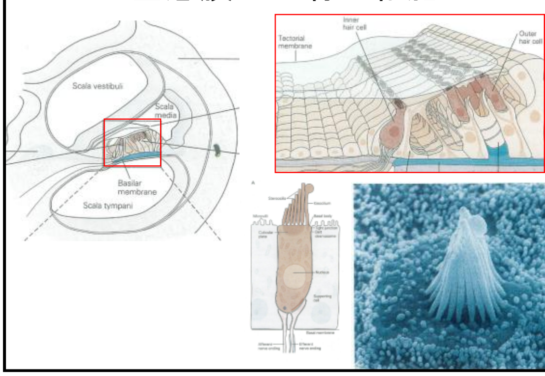


基底膜の駆動

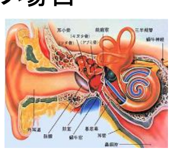


- 基底膜上に進行波を形成
- 低周波ほど減衰せずに奥まで到達する(周波数分解)

基底膜上の有毛細胞



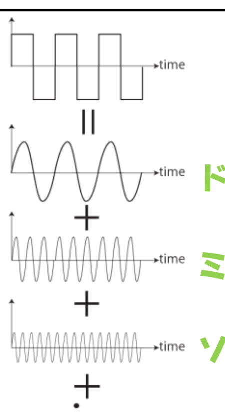
音の場合



耳は音を，周波数で分解して認識.

⇒周波数成分がアルファベット，
その合成が単語に相当

⇒音の場合の答え：
「周波数成分が違う」



他の多くの場合でも周波数が重要

●耳は音を，周波数分解して認識する装置

●耳に限らず，多くの生体センサは周波数分解によって現象を把握（例：皮膚）

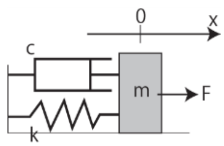
(Q)なぜ周波数なのだろうか

言い換えると，
正弦波はなぜ多くの場合，要素，成分，アルファベットにふさわしいのだろうか？

正弦波は歪まない

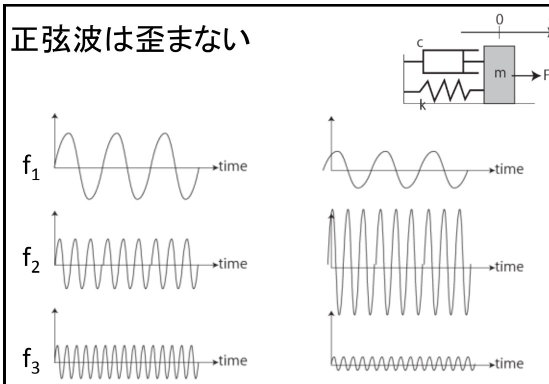
●線形な微分方程式で記述されるシステムでは，正弦波の入力は「振幅」と「位相」を変えるものの，同じ周波数の正弦波のままになる．

（例）バネ・マス・ダンパ系
おもりに加わる力は，
F:外力
cx':粘性による力
Kx:バネによる力
ニュートンの法則ma=Fより，



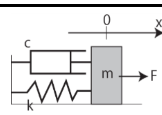
●入力：F(t)=sin(ft) 力をヨーヨーのように加える
●出力：x(t)　　　おもりはどのように動くか？

正弦波は歪まない

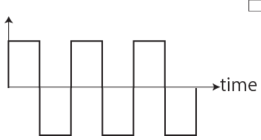


●入力：F(t)=sin(ft)　　●出力：x(t)

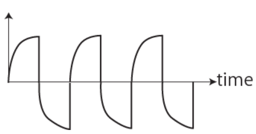
一般の波は歪む



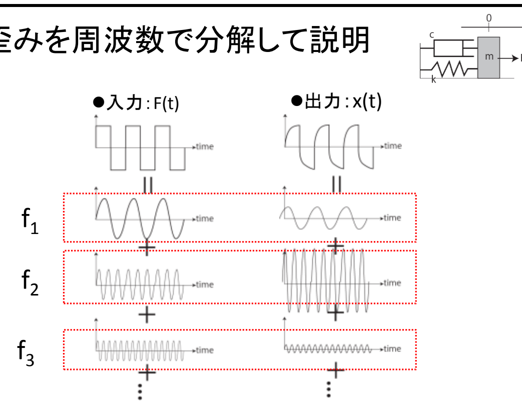
●入力：F(t) 矩形波状の力を加える



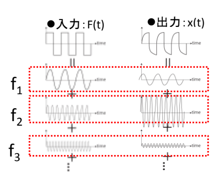
●出力：x(t)



歪みを周波数で分解して説明



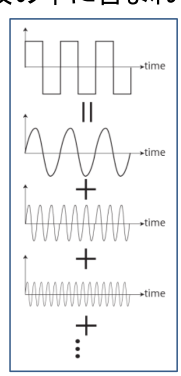
(Q)正弦波はなぜ多くの場合，要素としてふさわしいのだろうか？



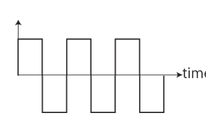
(A1)　正弦波入力に対する出力も
　　　同じ周波数の正弦波となる（と近似できる事が多い）から

(A2)　周波数成分ごとの入出力関係から，
　　　一般の入力に対する出力を合成できるから

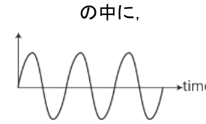
波の中に含まれる正弦波の成分を調べたい



第一段階として，



の中に，



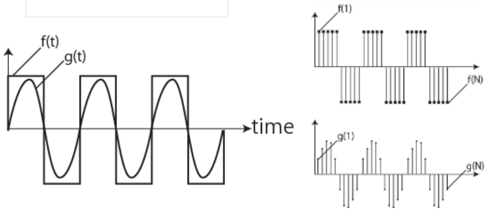
はどれだけ含まれるだろうか？

波形*f*に波形*g*はどれだけ含まれるか

波形*f*中の，波形*g*の成分

$= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)dt$　(連続関数)

$=$　(離散化して考えた場合)

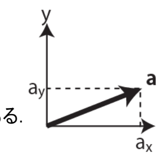


ベクトル空間と内積(復習)

ベクトル **a**=[a_x, a_y] のx成分は？. . . . . a_x

これはベクトル**a**とベクトル **x**=[1,0]との内積である.

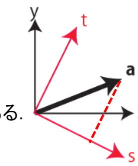
a・**x** = [a_x, a_y]・[1,0] = a_x



回転した座標軸，s, tを考える.
ベクトル **a**=[a_x, a_y] の，s 成分は？

これはベクトル**a**とベクトル **s**=[s_x, s_y]との内積である.

a・**s** = [a_x, a_y]・[s_x, s_y]

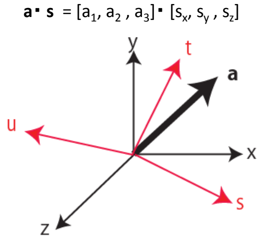


内積は，あるベクトルが別のベクトルの成分をどれだけ持つかを表す

さらに

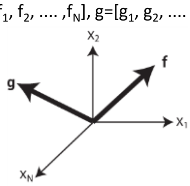
3次元空間に，座標軸 s,t,uを考える.
ベクトル **a**=[a_x, a_y , a_z] の， s 成分は？

これはベクトル**a**とベクトル **s**との内積である.
a・ **s** = [a_1, a_2 , a_3]・ [s_x, s_y , s_z]



では

N次元空間で，二つのベクトル
f=[f_1, f_2, ... ,f_N], g=[g_1, g_2, ... ,g_N] を考える.



内積 **f**・**g**は，ベクトルfの，g軸成分(または逆)を表す.

=

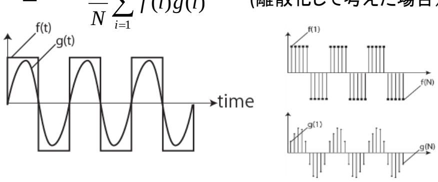
=

波形*f*に波形*g*はどれだけ含まれるか（再）

波形*f*中の，波形*g*の成分

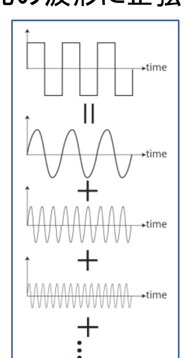
$= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)dt$　(連続関数)

$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(i)g(i)$　(離散化して考えた場合)



これは二つの波をベクトルと考えた時の内積に他ならない
※内積を連続関数に対して定義

元の波形に正弦波がどれだけ含まれるか



元の波形：周期Tの波形 f(t)

周期Tのcosine波はどれだけ含まれるか

$a_1 =$

周期Tのsine波はどれだけ含まれるか

$b_1 =$

周期2Tのcosine波はどれだけ含まれるか

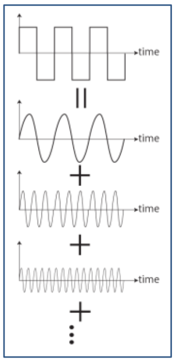
$a_2 =$

周期2Tのsine波はどれだけ含まれるか

$b_2 =$

以下a_3, b_3, a_4, b_4, ...

フーリエ級数展開：定義



周期Tの波形 f(t)は次のように分解できる

$$f(t)=a_0+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos(2\pi mt/T)+\sum_{m=1}^{\infty}b_m\sin(2\pi mt/T)$$

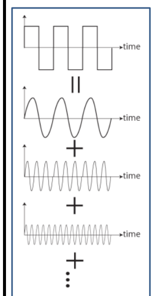
$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$ 平均値（DC成分）

$$a_m=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi mt/T)dt$$

$$b_m=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2\pi mt/T)dt$$

※この授業では係数は気にしない．

フーリエ級数展開の意味するところ



元の波形：周期Tの波形 f(t)

周期Tのcosine波はどれだけ含まれるか

$$a_1=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi t/T)dt$$

周期Tのsine波はどれだけ含まれるか

$$b_1=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2\pi t/T)dt$$

周期2Tのcosine波はどれだけ含まれるか

$$a_2=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi t\times 2/T)dt$$

周期2Tのsine波はどれだけ含まれるか

$$b_2=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2\pi t\times 2/T)dt$$

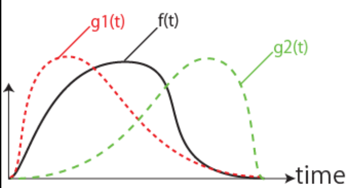
以下a_3, b_3, a_4, b_4, …

①分解の仕方は一通り

②分解した各成分を合成すると元に戻る

これは当たり前のことではない！！

①分解の仕方は一通り？



f=[茶色の丸，
紫の丸，
紫の三角]

g1:茶色
g2:丸

（1）
g1:
g2:

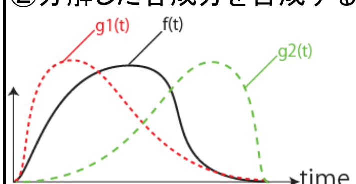
（2）
g2:
g1:

f(t)を，g1(t)成分と，g2(t)成分と，残りに分けたい．

f(t)から，
（1）まずg1(t)成分を抽出し，残りからg2(t)成分を抽出する
（2）まずg2(t)成分を抽出し，残りからg1(t)成分を抽出する
この二つは，通常は異なる結果を生む．

普通，分解の仕方は抽出の順番に依存

②分解した各成分を合成すると元に戻る？



f=[茶色の丸，
紫の丸，
紫の三角]

g1:茶色
g2:丸

g1:
g2:

g1 +g2:

ある成分を抽出した「残り」から次の成分を抽出したことが問題？
では
f(t)からg1(t)成分を抽出
f(t)からg2(t)成分を抽出
すれば抽出の順番は関係なくなる？？

この二成分を合成すると，元のf(t)より大きくなってしまう．

普通，合成しても元に戻らない

つまり

ある関数f(t)を，
関数群$g_1(t)$, … , $g_\infty(t)$の成分に分解するとき，
(たとえばフーリエ変換ではsin,cos．これを基底関数と呼ぶ)

分解方法が一通りで，
分解結果を合成して元に戻るのは

稀で特殊

うまくいくのは

任意の基底関数同士が，
お互いの要素を持たないとき，
分解の仕方は一通りとなる．

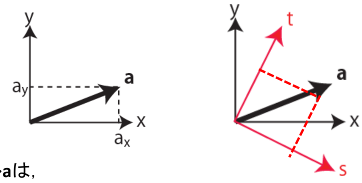
f=[茶色の丸，
紫の丸，
紫の三角]

g1:丸
g2:三角

g1:
g2:

g1＋g2＝f

ベクトルの成分（復習）

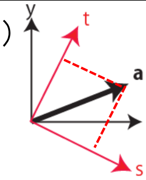


ベクトルaは，
●ベクトルxとyの成分に一意に分けられる．各成分は**a・x，a・y.**
●ベクトルsとtの成分に一意に分けられる．各成分は**a・s，a・t.**

これは
●ベクトルxとyが，お互いの成分を持たないから．
●ベクトルsとtが，お互いの成分を持たないから．

このとき，**x**と**y(s**と**t)**は直交しているという．

直交ベクトルと直交基底（復習）

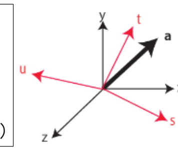


直交ベクトル同士は，内積が0である．

x・y=[1,0]・[0,1]=0
s・t=[s_x,s_y]・[t_x,t_y]=0

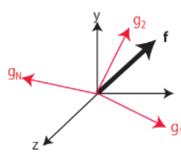
逆に，内積が0であることが直交基底であることの条件！

N次元空間でN個のベクトルが，
どの二つをとっても直交しているとき，
これを直交基底と呼び，
その空間の任意の点は，
直交基底の成分で表せる．
（図では**x,y,z**が直交基底．**s,t,u**も直交基底）



N次元空間の直交基底

N次元空間で，N個のベクトル
g_1 =[g_{11}, g_{12}, …. ,g_{1N}],
g_2 =[g_{21}, g_{22}, …. ,g_{2N}],
…
g_N =[g_{N1}, g_{N2}, …. ,g_{NN}]を考える．



すべてのペアの内積 g_i・g_jが0なら，

$g_i \bullet g_j$ =

=

=

g_1 ～g_Nは直交基底であり，

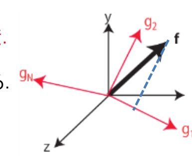
任意のN次元ベクトルfは，g_1 ～g_Nの各成分の和で一意に表せる．

N次元空間の直交基底の成分

N次元ベクトルfのg_i 成分は，fとg_i の内積．

結局，ベクトルfは，次のように分解される．

f = (f・g_1) g_1 + (f・g_2) g_2 + … + (f・g_N) g_N



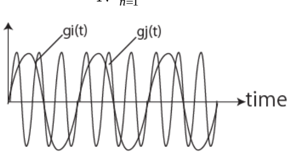
$$[f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_N] \bullet [g_{11} \quad g_{12} \quad \cdots \quad g_{1N}]$$
$$= \sum_{n=1}^{N} f_n g_{1n}$$

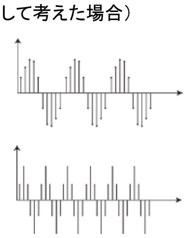
関数でも「直交」を内積から定義できる

波形$g1$と$g2$の内積を取る．

$$= \frac{1}{T}\int_0^T g_1(t) g_2(t) dt \quad \text{（連続関数）}$$

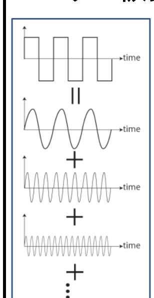
$$= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g_1(n) g_2(n) \quad \text{（離散化して考えた場合）}$$





これで準備は整った

フーリエ級数展開の意味するところ（再）



元の波形：周期Tの波形 f(t)

周期Tのcosine波はどれだけ含まれるか
$$a_1 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi/T)dt$$

周期Tのsine波はどれだけ含まれるか
$$b_1 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2\pi/T)dt$$

周期2Tのcosine波はどれだけ含まれるか
$$a_2 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi \times 2/T)dt$$

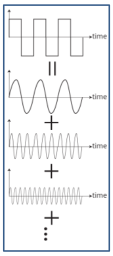
周期2Tのsine波はどれだけ含まれるか
$$b_2 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2\pi \times 2/T)dt$$

以下a_3, b_3, a_4, b_4, …

①分解の仕方は一通り
②分解した各成分を合成すると元に戻る

これは当たり前のことではない！！

フーリエ級数の各基底関数の内積を取る



二つの基底関数，cos(2πmt/T)，cos(2πnt/T)の内積は？

$$\int_0^T \cos(2\pi mt/T)\cos(2\pi nt/T)dt$$
$$=$$

これはm=nでなければ必ず0

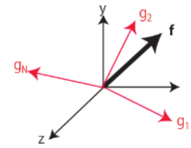
二つの基底関数，cos(2πmt/T)，sin(2πnt/T)の内積は？

$$\int_0^T \cos(2\pi mt/T)\sin(2\pi nt/T)dt$$
$$=$$

これも必ず0

任意の基底関数の内積が0.
⇒直交基底となる！！

フーリエ級数の基底関数は直交基底



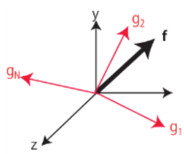
g1=cos(2π×1t/T)
g2=sin(2πt×1t/T)
g3=cos (2π×2t/T)
g4=sin(2πt×2t/T)
g5=cos (2π×3t/T)
g6=sin(2πt×3t/T)
…

これらは，たがいに直交するベクトルであり，
直交基底を構成する

よって，任意の関数 f はg1～gNによって一意に表現できる.

離散フーリエ級数展開

有限長さの関数(0<t<T)を，N分割して離散的に表す．f(t) ⇒ [f1,f2,...,fN]



基底関数⇒N次元基底ベクトルに
g1=cos(2π×1t/T) = [g11,g12,...,g1N]
g2=sin(2πt×1t/T) = [g21,g22,...,g2N]
g3=cos (2π×2t/T) = [g31,g32,...,g3N]
g4=sin(2πt×2t/T) = [g41,g42,...,g4N]
g5=cos (2π×3t/T) = [g51,g52,...,g5N]
g6=sin(2πt×3t/T) = [g61,g62,...,g6N]
…

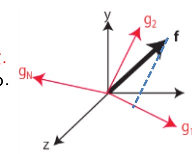
これらは，たがいに直交するN次元ベクトルであり，
直交基底を構成する

よって，任意の波形 f，すなわちベクトル[f1,f2,...fN]
はg1～gNによって一意に表現できる（しかも余らない）.

行列による表現

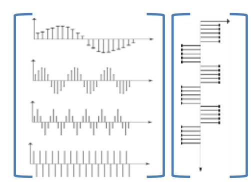
N次元ベクトルfのg_i成分は，fとg_iの内積.
結局，ベクトルfは，次のように分解される.
$\mathbf{f} = (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}_1)\,\mathbf{g}_1 + (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}_2)\,\mathbf{g}_2 + \ldots + (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}_N)\,\mathbf{g}_N$

g1の成分．フーリエ級数

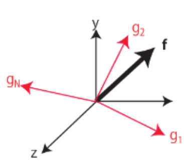


フーリエ級数を求めるには，$\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}_1$，$\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}_2$，… $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}_N$なる，
N個の内積を計算すればよい.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^T \\ \mathbf{g}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{g}_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \end{bmatrix}$$



フーリエ級数展開とは



$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^T \\ \mathbf{g}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{g}_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \end{bmatrix}$$

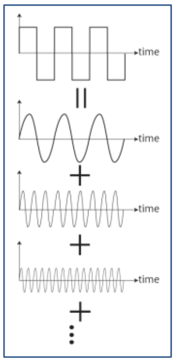
つまり
行列特に回転行列による座標変換の一種であり，
実空間の値で表されているベクトル f を
フーリエ空間の値で表されるベクトル F で表現するもの.

フーリエ○○

フーリエ級数展開
　⇒離散フーリエ級数展開（済）
　⇒複素フーリエ級数展開

⇒フーリエ変換
　⇒離散フーリエ変換

複素フーリエ級数展開：定義



周期Tの波形 f(t)は次のように分解できる

$$f(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \exp(j2\pi mt/T)$$

$$c_m=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp(-j2\pi mt/T)dt$$

sin(2πmt/T), cos(2πmt/T)の代わりに,
exp(i2πmt/T)を用いて整理したもの.
係数c_mはもはや複素数である.

exp(j2πmt/T)は直交関数系である. すなわち

が, m=n以外で成り立つ.

フーリエ変換：定義

“周期T” ではない波形 f(t)に対する変換. Tを無限大とする.

フーリエ変換

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

$$c_m=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp(-j2\pi mt/T)dt$$

逆フーリエ変換

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

$$f(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \exp(j2\pi mt/T)$$

離散フーリエ変換(DFT)：定義

f(t), F(ω)を離散化したもの. Discrete Fourier Transform
時間を有限とすると離散複素フーリエ級数展開と同じ.

離散フーリエ変換

$$F(k)=\sum_{t=0}^{N-1} f(t)\exp(-j2\pi\frac{k}{N}t)$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

離散逆フーリエ変換

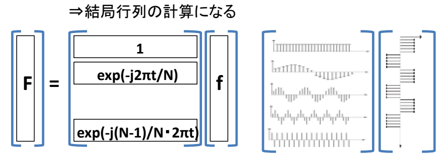
$$f(t)=\sum_{k=0}^{N-1} C(k)\exp(j2\pi\frac{k}{N}t)$$

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

高速フーリエ変換(FFT)：紹介のみ

離散フーリエ変換 $F(k)=\sum_{t=0}^{N-1} f(t)\exp(-j2\pi\frac{k}{N}t)$

⇒結局行列の計算になる



一般に行列×ベクトルは行列サイズの数だけ乗算が必要（N×Nのオーダー）
しかし,
•exp(-j2πk/N・t)は繰り返し構造をとる
•特にNが2の階乗の時, 行列全体にフラクタル的な繰返し構造が生じる
という特徴をうまく使うと, 乗算回数を抑えられる(N×logNのオーダー)
リアルタイムにフーリエ変換を行う必要がある応用に必須.

振幅, パワースペクトラム, 位相

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$ 一般的に複素数の関数

$$\omega=2\pi f$$ 角周波数

角周波数ωでの振幅

角周波数ωでのパワースペクトラム

角周波数ωでの位相

パワースペクトラムで、元の信号がもつ周波数成分を観察できる

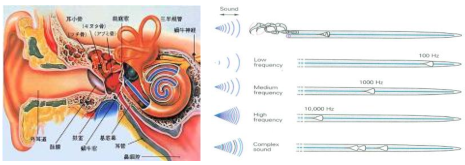
パワースペクトラムの観察

スペクトラム・アナライザ

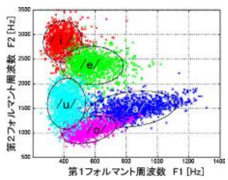
アイウエオ

低 周波数 高

音声認識の手がかり：フォルマント



- 母音は主な周波数（第一フォルマント）と，次に多い周波数（第二フォルマント）で認識
- 関連話題
  - フォルマント合成による合成音声
  - 音声のピッチ変換時のフォルマント補正



（参考）しゃべるピアノ

Youtube: Speaking Piano
http://www.youtube.com/watch?v=muCPjK4nGY4&feature=player_embedded

レポート

次のサンプルを参考に，同じ周期の正弦波，矩形波，三角波をフーリエ変換し，パワースペクトルを観察，比較せよ．
レポートでは
●3つのパワースペクトルを一つのグラフに表示する一つのソースコード
●そこからわかったこと，すなわち音色の違いの原因の考察をメール本文に

```
//一周期100の矩形波(ただし直流成分を無くすため平均値0としている)
wave=[ones(1,50), zeros(1,50)] - 0.5;

//5回繰り返す（回数は適当）
wave = [wave,wave,wave,wave,wave];

//フーリエ変換
fourier = fft(wave);

//パワースペクトルを計算
power_spec = fourier .* conj(fourier);

//計算結果を表示
plot(power_spec);
```