インタラクティブシステム論
第3回

梶本裕之
Twitter ID kajimoto
ハッシュタグ #ninshiki

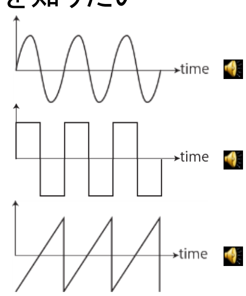
日程

4/10　イントロダクション
4/17 Scilabの紹介（西6号館3階PCルーム）
4/24　フーリエ変換
5/1　出張により休講
5/8　フーリエ変換と線形システム
5/15信号処理の基礎
5/22　信号処理応用1（相関）
5/29　出張により休講　⇒変更！
6/5　信号処理応用2（画像処理)
6/12　中間確認テスト
6/19　ラプラス変換
6/26　出張により休講
7/3　古典制御の基礎
7/10　行列
7/17　行列と最小二乗法
7/24　ロボティクス
8/2〜8　期末テスト

フーリエ変換

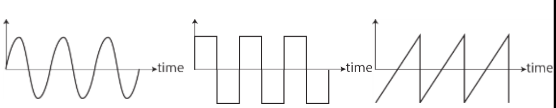
信号の「性質」を知りたい

正弦波の音
矩形波の音
三角波の音



（Q）この3つは，何が違うのだろうか？

答えは認識の数だけある

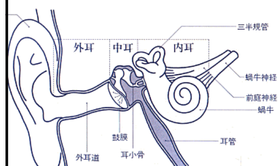


（Q）この3つは，何が違うのだろうか？

(A1)形が違う
(A2)上昇速度，下降速度が違う
(A3)ある閾値以上となる時間幅が違う
etc...　　すべて正しい

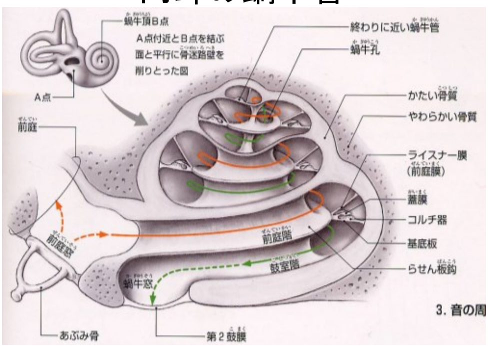
回答の正しさは，現象の本質にどれだけ迫っているかによる．
つまり，現象を認識するシステムによって正答は異なる．

音の「認識」とは？



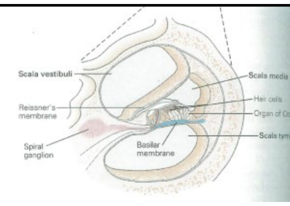
1. 気体の振動
2. 鼓膜の振動
3. つち骨・きぬた骨・あぶみ骨によるリレー
4. 前庭窓の振動
5. リンパ液（液体）の振動
6. 基底膜の振動

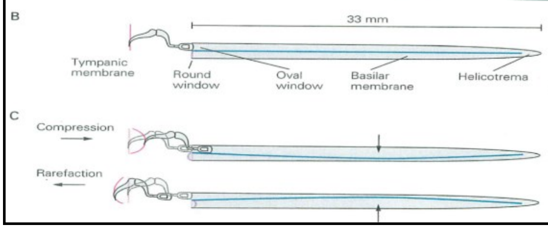
内耳の蝸牛管



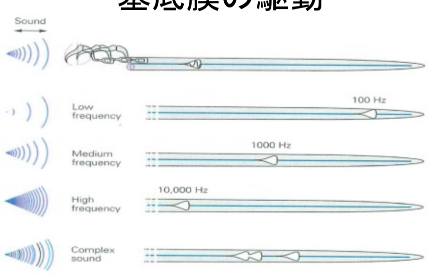
蝸牛内の基底膜

- 管を上下に仕切る膜



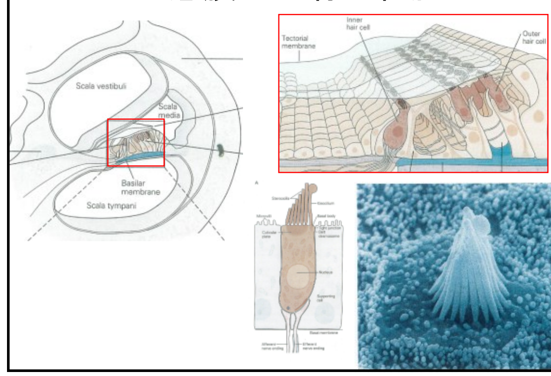


基底膜の駆動

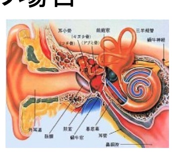


- 基底膜上に進行波を形成
- 低周波ほど減衰せずに奥まで到達する（周波数分解）

基底膜上の有毛細胞



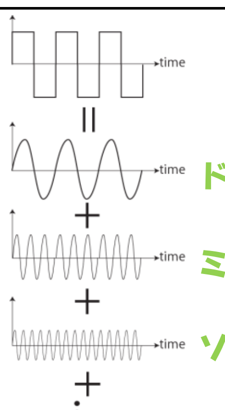
音の場合



耳は音を，周波数で分解して認識.

⇒周波数成分がアルファベット，
その合成が単語に相当

⇒音の場合の答え：
「周波数成分が違う」



他の多くの場合でも周波数が重要

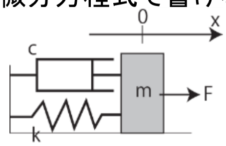
●耳は音を，周波数分解して認識する装置

●耳に限らず，多くの生体センサは周波数分解によって現象を把握（例：皮膚）

（Q）なぜ周波数なのだろうか

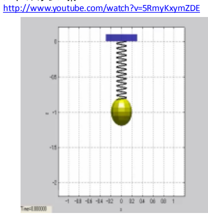
言い換えると，
正弦波はなぜ多くの場合，要素，成分，アルファベットにふさわしいのだろうか？

物理現象の多くは線形な微分方程式で書ける



(例)バネ・マス・ダンパ系
おもりに加わる力は,
F:外力
cx':粘性による力
Kx:バネによる力
ニュートンの法則ma=Fより,

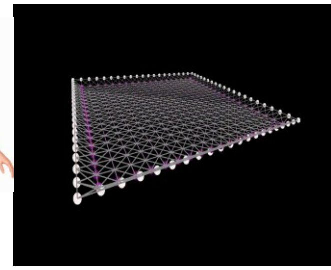
バネマスダンパ系
http://www.youtube.com/watch?v=5RmyKxymZDE



●システムの「入力」と「応答」
- ✓ 入力:F(t):おもりに加える外力
- ✓ 応答:x(t):おもりの動き

(参考)バネ・マス・ダンパ系による記述例

Syflex
http://www.youtube.com/watch?v=IS3vZxj_xLw

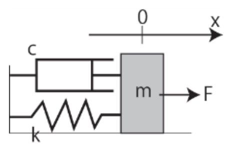


布のシミュレーション
http://www.youtube.com/watch?v=ib1vmRDs8Vw

「入力」と「応答」の関係を知りたい

$$m\ddot{x} = F - kx - c\dot{x}$$

- ✓ 入力:F(t):おもりに加える外力
- ✓ 応答:x(t):おもりの動き



「ある入力波形,F(t)を加えた時に,応答x(t)はどうなるか」

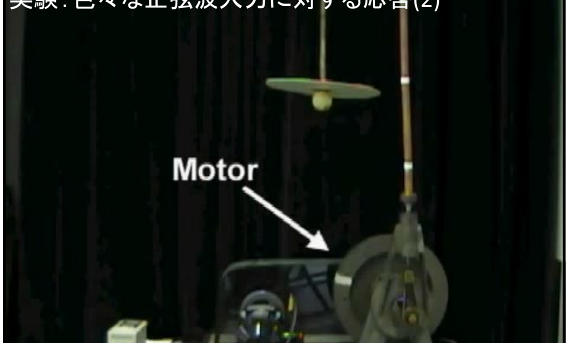
この問題に一般的に答えることは出来るか?

出来る.正弦波入力を考えることによって

実験:色々な正弦波入力に対する応答 (1)

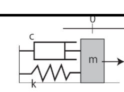
spring-mass second order system frequency response
http://www.youtube.com/watch?v=_XTI_ePIxFI

実験:色々な正弦波入力に対する応答(2)

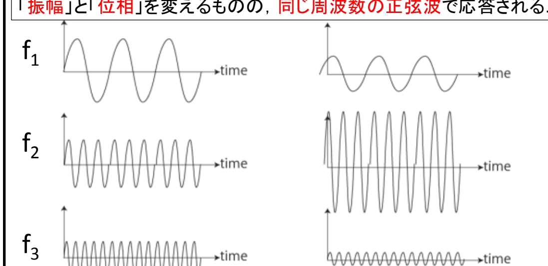


MIT Physics Demo -- Driven Mechanical Oscillator
http://www.youtube.com/watch?v=aZNnwQ8HJHU

正弦波は歪まない

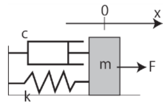


●線形な微分方程式で記述されるシステムでは,正弦波の入力は「振幅」と「位相」を変えるものの,同じ周波数の正弦波で応答される.

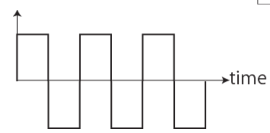


●入力:F(t)=sin(ft) ●応答:x(t)

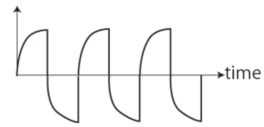
一般の波は（もちろん）歪む



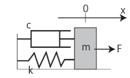
●入力：F(t) 矩形波状の力を加える

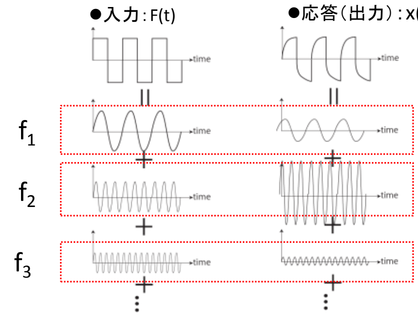


●応答（出力）：x(t)

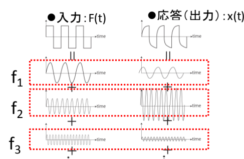


歪みを周波数で分解して説明





(Q)正弦波はなぜ多くの場合，要素としてふさわしいのだろうか？



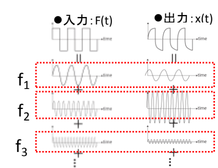
(A1)　正弦波入力に対する出力も
同じ周波数の正弦波となる（と近似できる事が多い）から

(A2)　周波数成分ごとの入出力関係から，
一般の入力に対する応答（出力）を合成できるから

（今は参考まで）「線形」微分方程式の意味

$$m\ddot{x} = F - kx - c\dot{x}$$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$



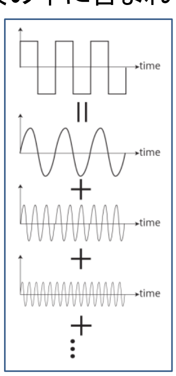
$$m\ddot{x}_1(t) + c\dot{x}_1(t) + kx_1(t) = F_1(t)$$

$$m\ddot{x}_2(t) + c\dot{x}_2(t) + kx_2(t) = F_2(t)$$

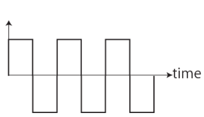
$$m(\ddot{x}_1(t) + \ddot{x}_2(t)) + c(\dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t)) + k(x_1(t) + x_2(t)) = F_1(t) + F_2(t)$$

2つの微分方程式を足しあわせても成立する
（波形の重ね合わせが成立する）
（例えばもし$x^2(t)$等の項があるとこれは成立しない）

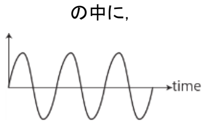
波の中に含まれる正弦波の成分を調べたい



第一段階として，



の中に，



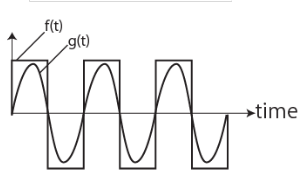
はどれだけ含まれるだろうか？

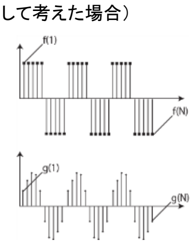
波形fに波形gはどれだけ含まれるか

波形f中の，波形gの成分

$= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)dt$　（連続関数）

$=$　　　　（離散化して考えた場合）



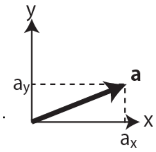


ベクトル空間と内積(復習)

ベクトル **a**=[a_x, a_y] のx成分は？. . . . . a_x

これはベクトル**a**とベクトル **x**=[1,0]との内積である.

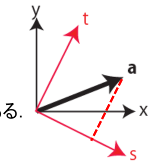
a･**x** = [a_x, a_y]･[1,0] = a_x



回転した座標軸，s, tを考える.
ベクトル **a**=[a_x, a_y] の，s 成分は？

これはベクトル**a**とベクトル **s**=[s_x, s_y]との内積である.

a･**s** = [a_x, a_y]･ [s_x, s_y]

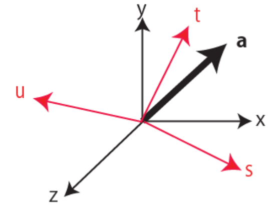


内積は，あるベクトルが別のベクトルの成分をどれだけ持つかを表す

さらに

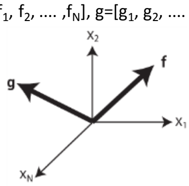
3次元空間に，座標軸 s,t,uを考える.
ベクトル **a**=[a_x, a_y , a_z] の， s 成分は？

これはベクトル**a**とベクトル **s**との内積である.
a･ **s** = [a_1, a_2 , a_3]･ [s_x, s_y , s_z]



では

N次元空間で，二つのベクトル
f=[f_1, f_2, ... ,f_N], g=[g_1, g_2, ... ,g_N] を考える.



内積 **f**･**g**は，ベクトル**f**の，**g**軸成分(または逆)を表す.

=

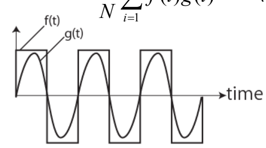
=

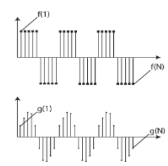
波形*f*に波形*g*はどれだけ含まれるか（再）

波形*f*中の，波形*g*の成分

$$= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)dt$$ （連続関数）

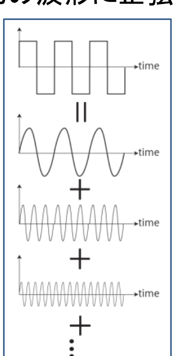
$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(i)g(i)$$ （離散化して考えた場合）





これは二つの波をベクトルと考えた時の内積に他ならない
※内積を連続関数に対して定義

元の波形に正弦波がどれだけ含まれるか



元の波形：周期Tの波形 f(t)

周期Tのcosine波はどれだけ含まれるか

$a_1 =$

周期Tのsine波はどれだけ含まれるか

$b_1 =$

周期2Tのcosine波はどれだけ含まれるか

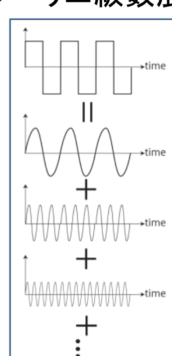
$a_2 =$

周期2Tのsine波はどれだけ含まれるか

$b_2 =$

以下a_3, b_3, a_4, b_4, …

フーリエ級数展開：定義



周期Tの波形 f(t)は次のように分解できる

$$f(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(2\pi mt/T) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(2\pi mt/T)$$

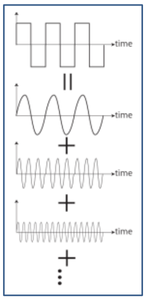
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$ 平均値（DC成分）

$$a_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi mt/T)dt$$

$$b_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2\pi mt/T)dt$$

※この授業では係数は気にしない.

フーリエ級数展開の意味するところ



元の波形：周期Tの波形f(t)

周期Tのcosine波はどれだけ含まれるか
$$a_1 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi t/T)dt$$

周期Tのsine波はどれだけ含まれるか
$$b_1 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2\pi t/T)dt$$

周期2Tのcosine波はどれだけ含まれるか
$$a_2 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi t\times 2/T)dt$$

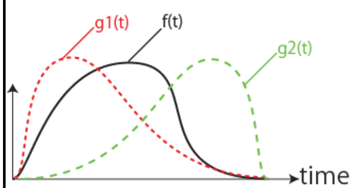
周期2Tのsine波はどれだけ含まれるか
$$b_2 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2\pi t\times 2/T)dt$$

以下a_3, b_3, a_4, b_4, ...

①分解の仕方は一通り
②分解した各成分を合成すると元に戻る

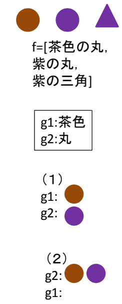
これは当たり前のことではない！！

①分解の仕方は一通り？



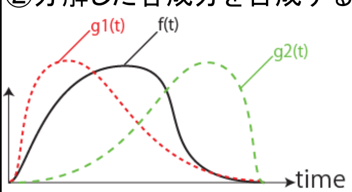
f(t)を，g1(t)成分と，g2(t)成分と，残りに分けたい．

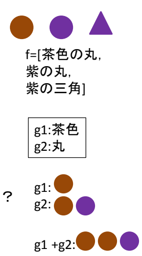
f(t)から，
（1）まずg1(t)成分を抽出し，残りからg2(t)成分を抽出する
（2）まずg2(t)成分を抽出し，残りからg1(t)成分を抽出する
このニつは，通常は異なる結果を生む．



普通，分解の仕方は抽出の順番に依存

②分解した各成分を合成すると元に戻る？





ある成分を抽出した「残り」から次の成分を抽出したことが問題？
では
f(t)からg1(t)成分を抽出
f(t)からg2(t)成分を抽出
すれば抽出の順番は関係なくなる？？

このニ成分を合成すると，元のf(t)より大きくなってしまう．

普通，合成しても元に戻らない

つまり

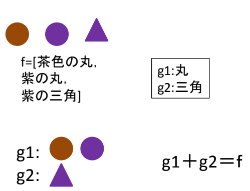
ある関数f(t)を，
関数群$g_1(t)$, ... , $g_\infty(t)$の成分に分解するとき，
(たとえばフーリエ変換ではsin,cos．これを基底関数と呼ぶ)

分解方法が一通りで，
分解結果を合成して元に戻るのは

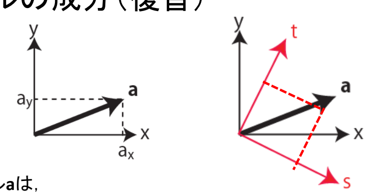
稀で特殊

うまくいくのは

任意の基底関数同士が，
お互いの要素を持たないとき，
分解の仕方は一通りとなる．



ベクトルの成分（復習）

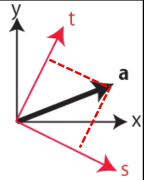


ベクトルaは，
●ベクトルxとyの成分に一意に分けられる．各成分は**a・x**，**a・y.**
●ベクトルsとtの成分に一意に分けられる．各成分は**a・s**，**a・t.**

これは
●ベクトルxとyが，お互いの成分を持たないから．
●ベクトルsとtが，お互いの成分を持たないから．

このとき，xとy(sとt)は直交しているという．

直交ベクトルと直交基底（復習）

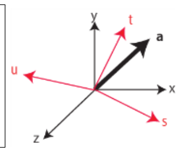


直交ベクトル同士は，内積が0である．

x・y=[1,0]・[0,1]=0
s・t=[s_x,s_y]・[t_x,t_y]=0

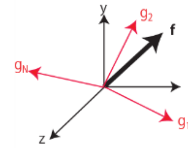
逆に，内積が0であることが直交基底であることの条件！

N次元空間でN個のベクトルが，
どの二つをとっても直交しているとき，
これを直交基底と呼び，
その空間の任意の点は，
直交基底の成分で表せる．
（図ではx,y,zが直交基底．s,t,uも直交基底）



N次元空間の直交基底

N次元空間で，N個のベクトル
$\mathbf{g_1}$=[g_{11}, g_{12}, …. ,g_{1N}],
$\mathbf{g_2}$=[g_{21}, g_{22}, …. ,g_{2N}],
…
$\mathbf{g_N}$=[g_{N1}, g_{N2}, …. ,g_{NN}]を考える．



すべてのペアの内積 $\mathbf{g_i}$・$\mathbf{g_j}$が0なら，

$\mathbf{g}_i \bullet \mathbf{g}_j =$

$=$

$=$

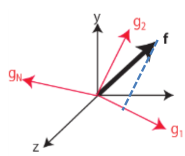
$\mathbf{g_1}$ ～$\mathbf{g_N}$は直交基底であり，

任意のN次元ベクトルfは，$\mathbf{g_1}$ ～$\mathbf{g_N}$の各成分の和で一意に表せる．

N次元空間の直交基底の成分

N次元ベクトルfの$\mathbf{g_i}$ 成分は，fと$\mathbf{g_i}$ の内積．

結局，ベクトルfは，次のように分解される．



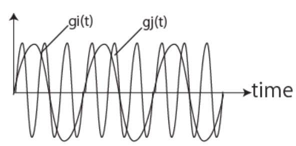
f = (f・g_1) g_1+ (f・g_2) g_2 + … + (f・g_N) g_N

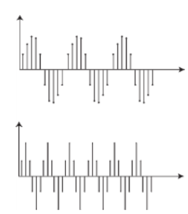
$$[f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_N]\bullet[g_{11} \quad g_{12} \quad \cdots \quad g_{1N}]$$
$$=\sum_{n=1}^{N} f_n g_{1n}$$

関数でも「直交」を内積から定義できる

波形*g1*と*g2*の内積を取る．

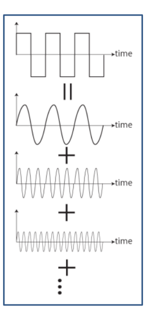
$$= \frac{1}{T}\int_0^T g_1(t)g_2(t)dt \quad \text{（連続関数）}$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g_1(n)g_2(n) \quad \text{（離散化して考えた場合）}$$





これで準備は整った

フーリエ級数展開の意味するところ（再）



元の波形：周期Tの波形f(t)

周期Tのcosine波はどれだけ含まれるか
$$a_1 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi t/T)dt$$

周期Tのsine波はどれだけ含まれるか
$$b_1 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2\pi t/T)dt$$

周期2Tのcosine波はどれだけ含まれるか
$$a_2 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi t \times 2/T)dt$$

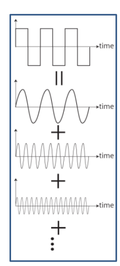
周期2Tのsine波はどれだけ含まれるか
$$b_2 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2\pi t \times 2/T)dt$$

以下a_3, b_3, a_4, b_4, …

①分解の仕方は一通り
②分解した各成分を合成すると元に戻る

これは当たり前のことではない！！

フーリエ級数の各基底関数の内積を取る



二つの基底関数，cos(2πmt/T)，cos(2πnt/T)の内積は？

$$\int_0^T \cos(2\pi mt/T)\cos(2\pi nt/T)dt$$
$$=$$

これはm=nでなければ必ず0

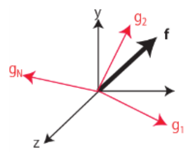
二つの基底関数，cos(2πmt/T)，sin(2πnt/T)の内積は？

$$\int_0^T \cos(2\pi mt/T)\sin(2\pi nt/T)dt$$
$$=$$

これも必ず0

任意の基底関数の内積が0.
⇒直交基底となる！！

フーリエ級数の基底関数は直交基底



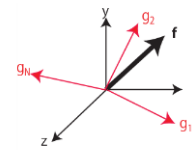
g1=cos(2π×1t/T)
g2=sin(2πt×1t/T)
g3=cos (2π×2t/T)
g4=sin(2πt×2t/T)
g5=cos (2π×3t/T)
g6=sin(2πt×3t/T)
...

これらは，たがいに直交するベクトルであり，
直交基底を構成する

よって，任意の関数 f はg1～gNによって一意に表現できる．

離散フーリエ級数展開

有限長さの関数(0<t<T)を，N分割して離散的に表す．f(t) ⇒ [f1,f2,...,fN]



基底関数⇒N次元基底ベクトルに
g1=cos(2π×1t/T) = [g11,g12,...,g1N]
g2=sin(2πt×1t/T) = [g21,g22,...,g2N]
g3=cos (2π×2t/T) = [g31,g32,...,g3N]
g4=sin(2πt×2t/T) = [g41,g42,...,g4N]
g5=cos (2π×3t/T) = [g51,g52,...,g5N]
g6=sin(2πt×3t/T) = [g61,g62,...,g6N]
...

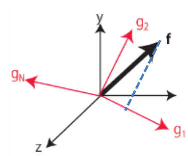
これらは，たがいに直交するN次元ベクトルであり，
直交基底を構成する

よって，任意の波形 f，すなわちベクトル[f1,f2,...fN]
はg1～gNによって一意に表現できる(しかも余らない)．

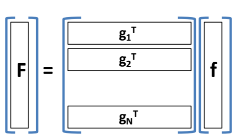
行列による表現

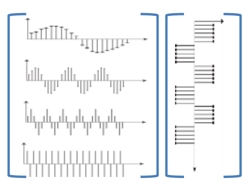
N次元ベクトル**f**のg_i 成分は，**f**とg_i の内積．
結局，ベクトルfは，次のように分解される．
f = (f･g$_1$) g$_1$ + (f･g$_2$) g$_2$ + ... + (f･g$_N$) g$_N$

g1の成分．フーリエ級数

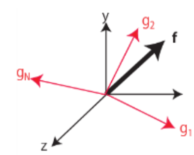


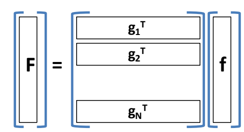
フーリエ級数を求めるには，**f･g$_1$，f･g$_2$，...f･g$_N$**なる，
N個の内積を計算すればよい．





フーリエ級数展開とは





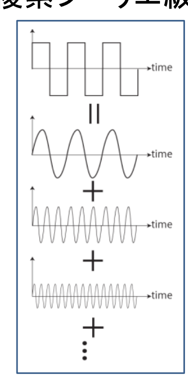
つまり
行列特に回転行列による座標変換の一種であり，
実空間の値で表されているベクトル f を
フーリエ空間の値で表されるベクトル F で表現するもの．

フーリエ○○

フーリエ級数展開
⇒離散フーリエ級数展開(済)
⇒複素フーリエ級数展開

⇒フーリエ変換
⇒離散フーリエ変換

複素フーリエ級数展開：定義



周期Tの波形 f(t)は次のように分解できる

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \exp(j2\pi mt/T)$$

$$c_m = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp(-j2\pi mt/T)dt$$

sin(2πmt/T)，cos(2πmt/T)の代わりに，
exp(i2πmt/T)を用いて整理したもの．
係数c_mはもはや複素数である．

exp(j2πmt/T)は直交関数系である．すなわち

が，m=n以外で成り立つ．

フーリエ変換：定義

“周期T” ではない波形 f(t)に対する変換．Tを無限大とする．

フーリエ変換

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

$$c_m=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp(-j2\pi mt/T)dt$$

逆フーリエ変換

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

$$f(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \exp(j2\pi mt/T)$$

離散フーリエ変換(DFT)：定義

f(t), F(ω)を離散化したもの．Discrete Fourier Transform
時間を有限とすると離散複素フーリエ級数展開と同じ．

離散フーリエ変換

$$F(k)=\sum_{t=0}^{N-1} f(t)\exp(-j2\pi\frac{k}{N}t)$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

離散逆フーリエ変換

$$f(t)=\sum_{k=0}^{N-1} C(k)\exp(j2\pi\frac{k}{N}t)$$

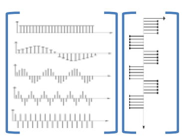
$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

高速フーリエ変換(FFT)：紹介のみ

離散フーリエ変換 $F(k)=\sum_{t=0}^{N-1} f(t)\exp(-j2\pi\frac{k}{N}t)$

⇒結局行列の計算になる

$$\begin{bmatrix} F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(-j2\pi t/N) \\ \vdots \\ \exp(-j(N-1)/N\cdot 2\pi t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \end{bmatrix}$$



一般に行列×ベクトルは行列サイズの数だけ乗算が必要（N×Nのオーダー）
しかし，
•exp(-j2πk/N・t)は繰り返し構造をとる
•特にNが2の階乗の時，行列全体にフラクタル的な繰返し構造が生じる
という特徴をうまく使うと，乗算回数を抑えられる(N×logNのオーダー)
リアルタイムにフーリエ変換を行う必要がある応用に必須．

振幅，パワースペクトラム，位相

$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$　一般的に複素数の関数

$\omega=2\pi f$　角周波数

角周波数ωでの振幅

角周波数ωでのパワースペクトラム

角周波数ωでの位相

パワースペクトラムで、元の信号がもつ周波数成分を観察できる

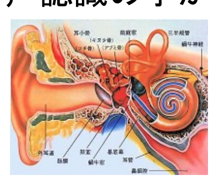
パワースペクトラムの観察

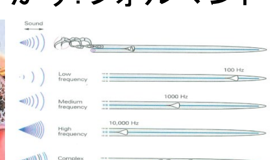
スペクトラム・アナライザ

低　周波数　高

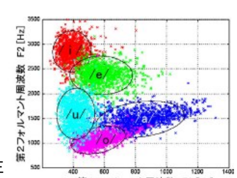
アイウエオ

音声認識の手がかり：フォルマント





- 母音は主な周波数（第一フォルマント）と，次に多い周波数（第二フォルマント）で認識
- 関連話題
  - フォルマント合成による合成音声
  - 音声のピッチ変換時のフォルマント補正



（参考）しゃべるピアノ

Youtube: Speaking Piano

http://www.youtube.com/watch?v=muCPjK4nGY4&feature=player_embedded

レポート

次のサンプルを参考に，同じ周期の正弦波，矩形波，三角波をフーリエ変換し，パワースペクトルを観察，比較せよ．

レポートでは

●3つのパワースペクトルを一つのグラフに表示する一つのソースコード

●そこからわかったこと，すなわち音色の違いの原因の考察をメール本文に

```
//一周期100の矩形波(ただし直流成分を無くすため平均値0としている)
wave=[ones(1,50), zeros(1,50)] - 0.5;

//5回繰り返す（回数は適当）
wave = [wave,wave,wave,wave,wave];

//フーリエ変換
fourier = fft(wave);

//パワースペクトルを計算
power_spec = fourier .* conj(fourier);

//計算結果を表示
plot(power_spec);
```