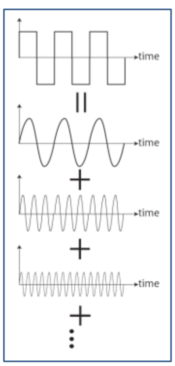
インタラクティブシステム論
第４回

梶本裕之
Twitter ID kajimoto
ハッシュタグ #ninshiki

日程

（復習）：フーリエ級数展開



周期Tの波形 f(t)は次のように分解できる

$$f(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(2\pi mt/T) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(2\pi mt/T)$$

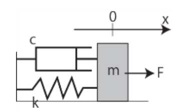
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$ 平均値（DC成分）

$$a_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi mt/T)dt$$

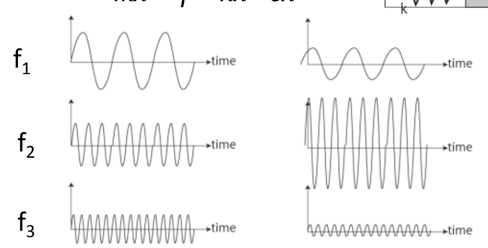
$$b_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2\pi mt/T)dt$$

※この授業では係数は気にしない．

（復習）なぜ正弦波で分解？



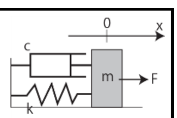
$$m\ddot{x} = f - kx - c\dot{x}$$



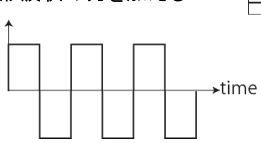
●入力：f(t)=sin(ft)　　●出力：x(t)

正弦波は歪まない．振幅と位相だけ変わる

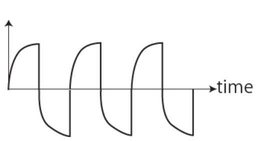
（復習）一般の波は歪む



●入力：f(t) 矩形波状の力を加える

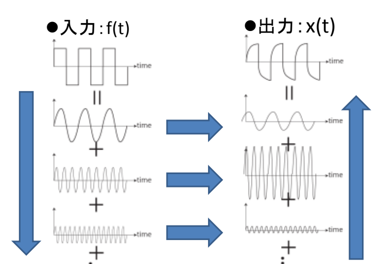


●出力：x(t)



（復習）歪みを周波数で分解して説明できる

●入力：f(t)　　●出力：x(t)



（1）入力f(t)を周波数分解する
（2）周波数ごとの出力の振幅と位相を求める．
（3）合計すると出力が得られる．

波形を正弦波の要素に分ける意義

（復習）フーリエ変換

フーリエ級数展開は周期的な信号を分解するのに使われた.
フーリエ変換は周期的ではない信号に対する変換.
Tを無限大とした極限から導かれる.
逆フーリエ変換によって元に戻すことができる.

フーリエ変換

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

逆フーリエ変換

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

振幅，パワースペクトラム，位相

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

$\omega=2\pi f$　角周波数

$|F(\omega)|$　角周波数ωでの振幅

$|F(\omega)|^2=F(\omega)\overline{F(\omega)}$　角周波数ωでのパワースペクトラム

$\angle F(\omega)$　角周波数ωでの位相

実関数のフーリエ変換

実関数＝実数のみの関数

$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$

$=$

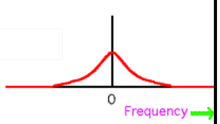
$=$

$F(-\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(j\omega t)dt$

$=$

$\therefore$

$\therefore$



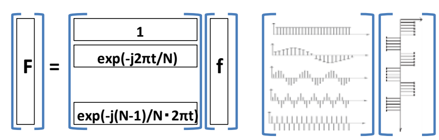
パワースペクトルは原点対称となる

復習：離散フーリエ変換(DFT)

●元信号：f(t)=f(0),f(1),...,f(N-1)
●離散複素フーリエ級数展開：F(k)

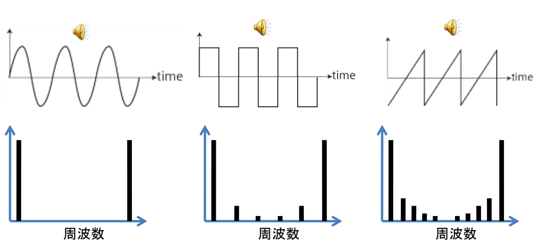
離散フーリエ変換 $F(k)=\sum_{t=0}^{N-1} f(t)\exp(-j2\pi\frac{k}{N}t)$

離散逆フーリエ変換 $f(t)=\sum_{k=0}^{N-1} C(k)\exp(j2\pi\frac{k}{N}t)$



結局、N成分のベクトルをN成分への、行列による変換

前回のレポート



なぜ「折り返す」のだろうか？
⇒実は、実関数(実信号)なら必ずそうなる

実信号の離散フーリエ変換

$F(k)=\sum_{t=0}^{N-1} f(t)\exp\left(-j2\pi\frac{k}{N}t\right)=$

$=$

$F(N-k)=$

$=$

$$\left(\begin{array}{l}\cos\left(2\pi\frac{N-k}{N}t\right)= \quad = \\ \sin\left(2\pi\frac{N-k}{N}t\right)= \quad =-\end{array}\right)$$

$\therefore F(N-k)=$　$=$

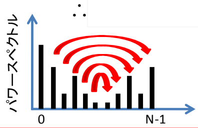
実信号の離散フーリエ変換

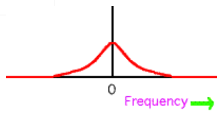
$$F(k)=\sum_{t=0}^{N-1} f(t)\cos(2\pi\frac{k}{N}t)-j\sum_{t=0}^{N-1} f(t)\sin(2\pi\frac{k}{N}t)$$

$$F(N-k)=\sum_{t=0}^{N-1} f(t)\cos(2\pi\frac{k}{N}t)+j\sum_{t=0}^{N-1} f(t)\sin(2\pi\frac{k}{N}t)$$

$$\therefore F(N-k)=\overline{F(k)}$$

$\therefore$

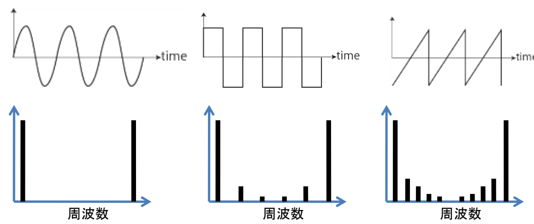




実信号の離散フーリエ変換のパワースペクトルは折り返す

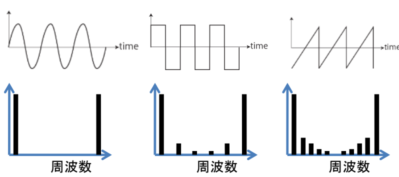
これは、実関数のフーリエ変換が左右対称なのと同値

前回のレポート（再）

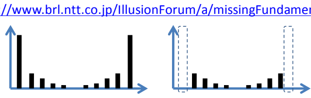


パワースペクトルの「折り返し」を無視して考えると、
●正弦波は一つの周波数成分のみを持つ
●矩形波、三角波は、異なる「倍音」成分をもつ
これが音色の違いを生んだ

参考：（錯聴）ミッシングファンダメンタル

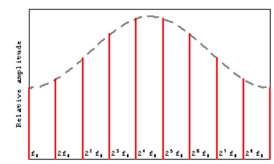


これらを人は、「音色は違うけれど同じ周波数」と思える
⇒倍音間の差を取っているため。
⇒実は基底音が無くなっても、倍音成分だけで基底音を知覚できる（ミッシングファンダメンタル現象）
http://www.brl.ntt.co.jp/IllusionForum/a/missingFundamental/ja/index.html



右の音でも、幻の基底音を感じ、左の音に近く感じる

参考：（錯聴）無限音階



http://www-antenna.ee.titech.ac.jp/~hira/hobby/edu/sonic_wave/sh_tone/index-j.html

人間が倍音成分の構造を知覚していることを利用して、主観的には無限に上昇・下降する音を作ることができる（無限音階、シェパードトーン）

YMO LOOM(1981)

フーリエ変換とインパルス

フーリエ変換を手計算してみる：単独の矩形波

$$f(t)=\begin{cases}1/2 & -1\le t\le 1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$F(\omega)=\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

$$=\int_{t=-1}^{1}\frac{1}{2}\exp(-j\omega t)dt$$

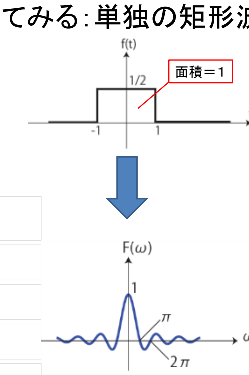
=

=

=

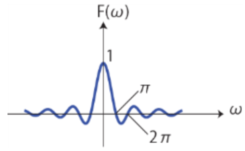
=

=



SINC関数

$$F(\omega)=\frac{\sin(\omega)}{\omega}$$



●ω=0の極限では,

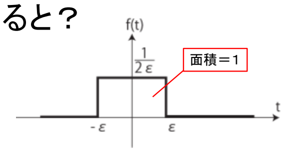
これは直流成分(平均値)が1であることを示す.

●ω=π, 2π, . . . で周期的に0となる.

●ωが大きくなるにつれて1/ωの速度で小さくなる.

矩形波の幅が変わると？

$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{2\varepsilon} & -\varepsilon\le t\le\varepsilon \\ 0 & otherwise\end{cases}$$



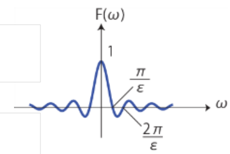
面積一定のまま矩形波の幅を変える

$$F(\omega)=\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

=

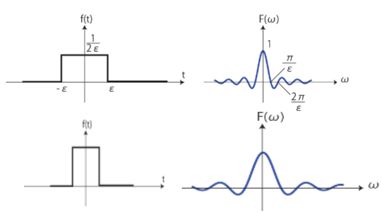
=…

=



矩形波の幅が変わると？

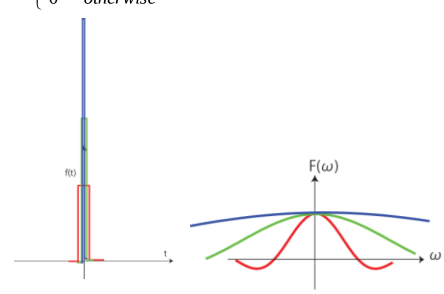
$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{2\varepsilon} & -\varepsilon\le t\le\varepsilon \\ 0 & otherwise\end{cases} \Rightarrow F(\omega)=\frac{\sin(\varepsilon\omega)}{\varepsilon\omega}$$



矩形波の幅を狭くする ⇒ フーリエ変換結果は幅広に

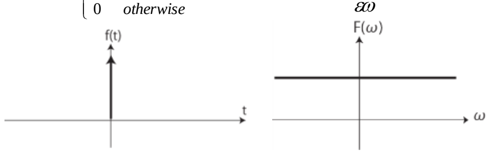
さらに幅を狭めていくと. . .

$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{2\varepsilon} & -\varepsilon\le t\le\varepsilon \\ 0 & otherwise\end{cases} \qquad F(\omega)=\frac{\sin(\varepsilon\omega)}{\varepsilon\omega}$$



極限としてのインパルス

$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{2\varepsilon} & -\varepsilon\le t\le\varepsilon \\ 0 & otherwise\end{cases} \qquad F(\omega)=\frac{\sin(\varepsilon\omega)}{\varepsilon\omega}$$



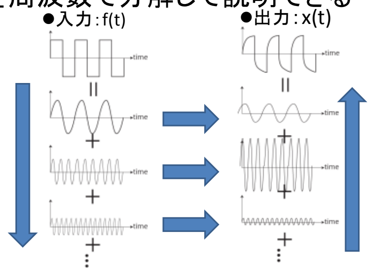
ε⇒0, すなわち矩形波の幅を無限小にしたものをインパルスと呼ぶ.
ただし面積＝1は保存されている(高さは無限大)

インパルスはδ(t)と表記する.

インパルスにはあらゆる周波数の波が一様に含まれる.

伝達関数

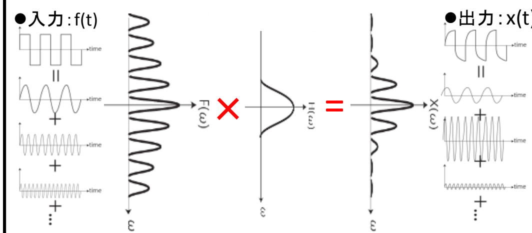
（復習：フーリエ級数展開）歪みを周波数で分解して説明できる



（1）入力f(t)を周波数分解する
（2）周波数ごとの出力の振幅と位相を求める．
（3）合計すると出力が得られる．

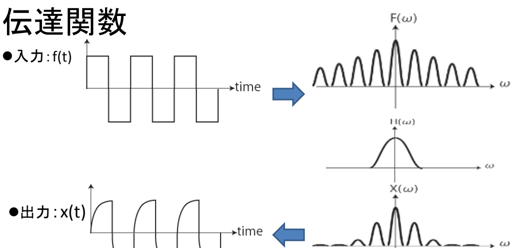
これを連続関数で考えるとどうなるか？

入出力の関係：関数同士の掛け算



（1）入力f(t)を周波数分解⇒F(ω)
（2）周波数ごとにどれだけ振幅と位相が変わるか：H(ω)
（3）出力（のフーリエ変換）：X(ω)=H(ω)*F(ω)
（4）逆フーリエ変換すると出力が得られる：x(t)

伝達関数



フーリエ空間では，入出力は単なる掛け算で表される．
X(ω)＝H(ω)×F(ω)

この入出力関係を定義するシステムの性質H(ω)を伝達関数と呼ぶ．

伝達関数(Transfer Function)

F(ω) → H(ω) → X(ω)　X(ω)＝H(ω)×F(ω)

システムの入出力関係．「伝わり方」を周波数空間で記述したもの．

伝達関数は単純な掛算でよい
複数のフィルタの特性は周波数領域では単純に掛け算をすればよい

（例）
ローパスフィルタとハイパスフィルタを続けてかけることでバンドパスフィルタを作成可能
フィルタをかける順番にも依存しない．

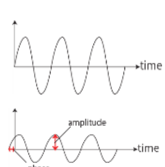
F(ω) → H1(ω) → H2(ω) → X(ω)

X(ω)＝H1(ω)×H2(ω)×F(ω)

伝達関数H(ω)を求めるには？

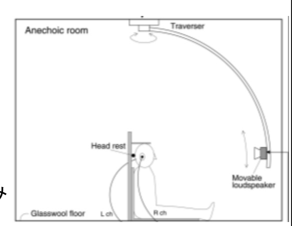
F(ω) → H(ω) → X(ω)

H(ω)は，周波数ωの信号を入力したときの出力の振幅と位相を表す．だから．．．



1. ある周波数ωの正弦波を入力．
2. 出力の振幅と位相を測定．
   - 入出力間の振幅の比率amp=|H(ω)|
   - 入出力間の位相差phase＝∠H(ω)
3. この周波数での伝達関数は
   - H(ω)=amp×exp(j*phase)．
4. 周波数を変えて測定すれば，H(ω)が得られる．

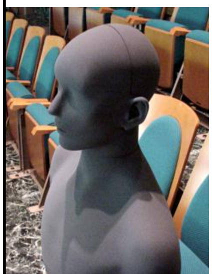
（参考）頭部伝達関数



- HRTF
  Head-Related Transfer Function
- 音波が耳に入るとき、
  - 頭部による反射・回込み
  - 耳介内での反射

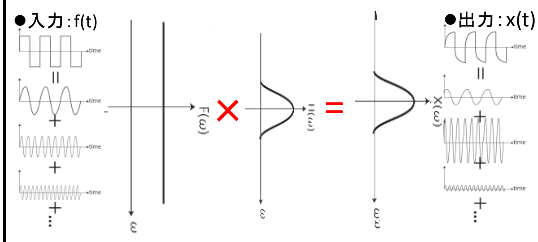
  などにより生じる音の変化．
  人はこの現象を利用し音源の方向を知る情報源とする
- 音の方向（θ，ψ）と周波数fの3変数関数となる

（参考）ダミーヘッド



- 頭部伝達関数を極力人間に似せた頭部人形
- 精巧なものは
  - 形状だけでなく表面やわらかさも再現
  - 個人用に作成
- 耳にマイクを内蔵
- 人間と同じように音をとらえることが出来る

伝達関数をもっと簡単に測定したい

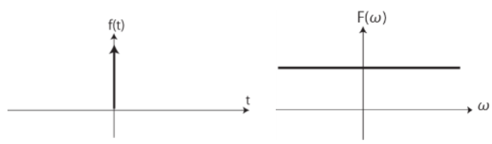


もしも，入力のF(ω)が常に1だったら？
⇒出力には伝達関数そのものが現れる！

インパルス応答とは何か？

入力のF(ω)が常に1　⇒ 「すべての周波数を一様に含む関数」

すでに我々はそのような関数を知っている！！．．．インパルスδ(t)



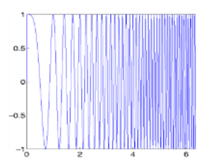
システムにインパルスを入力すると
出力信号は伝達関数H(ω)そのものとなる．

このことから，伝達関数をインパルス応答とも呼ぶ

（参考）音場の再現

- HRTFと同様に，ホールなどの「響き具合」，すなわち伝達関数を計測

12面体無指向性スピーカ：
ステージに置く



音：周波数が連続的に変化するチャープ信号や，インパルス信号を用いる．

無指向性マイク：
客席に置く

音場の再現

無響室での録音

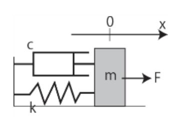
ホールの伝達関数をかけた結果

（モデルがあるなら）式から直接伝達関数を得たい

$$m\ddot{x} = f - kx - c\dot{x}$$

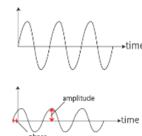
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f$$

●入力：f(t)　●出力：x(t)

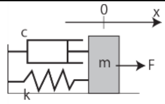


●伝達関数の計測方法を思い出そう！！
正弦波を入力して，その出力を得ればよかった．

入力：f(t)=exp(jωt)を入力したとき，
出力：x(t)=H*exp(jωt)となったとすれば，
|H|が伝達関数の大きさ，∠Hが偏角．



式の上で「計測」してみる



$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f$$

$f=\exp(j\omega t)$ ●ある周波数2πf=ωの正弦波を**入力**

$x(t)=H(\omega)\exp(j\omega t)$ ●同じ周波数で振幅と位相の異なる**出力**が得られる

このx(t)の微分は？

$\dot{x}(t)=$

$=$

同様に2階微分は

$\ddot{x}(t)=$

$=$

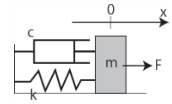
jωと書くのがわずらわしいのでsと書く

元の式に代入 $(ms^2+cs+k)H(\omega)\cancel{\exp(j\omega t)}=\cancel{\exp(j\omega t)}$

$\therefore$

s=jωを代入すれば,
システムの伝達関数に他ならない.

（例）伝達関数



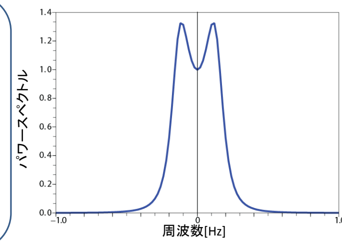
$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f$$

$$H(\omega)=\frac{1}{ms^2+cs+k}$$

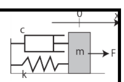
s=jωを代入してシステムの伝達関数が得られる.

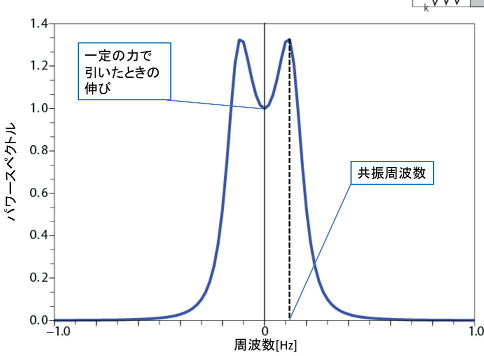
Scilabコード

```
m=1.0;              //質量
c=1.0;              //ダンパ
k=1.0;              //バネ

f=[-1:0.02:1];      //周波数
w=2 * %pi * f;
s=%i * w;

//応答(注：割り算）
HH=ones(s) ./ (m.*s .*s + c .*s + k);

//パワースペクトル
power_spec = H .* conj(H);
plot(f,power_spec);
```

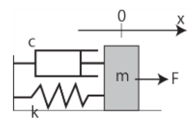


（例）伝達関数





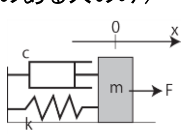
レポート課題１



サンプルコードを参考に,
・重さ
・ばねの強さ
・ダンパ
を変えた時に，共振周波数がどう変わるか観察せよ.
結果とその物理的妥当性をメール本文にコメントすること.

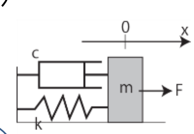
レポート課題2（アドバンスト：余裕のある人のみ）

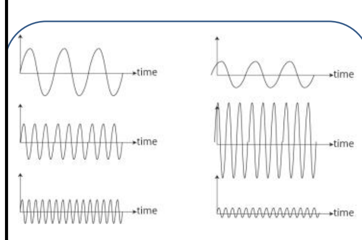
先程の例では、システムのモデルから伝達関数を直接計算した。ここでは、シミュレーションと観察によって求める。



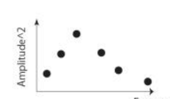
レポート１と同じシステムに対して、挙動をシミュレーションするプログラムを書き、力Fとして様々な周波数の正弦波を加えてみよ。（ヒント：第二回Scilab入門時のシミュレーションプログラム）
その上で、運動の軌跡をプロットすることで、各周波数での応答振幅を観察、メモする。
このメモを元に、横軸に周波数、縦軸に振幅の二乗をプロットせよ。レポート１の結果と比較した結果をメール本文にコメント。

（レポート課題2（イメージ））





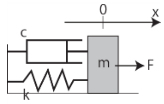
シミュレーションと観察



プロット

そもそもなぜ入力が正弦波のとき出力も正弦波なのか？

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx= f$$



上のような（線形な）微分方程式であらわされるシステムでは，正弦波入力の出力は正弦波

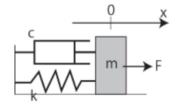
．．．ということを前提として話を進めてきた

これは何故？
なぜ正弦波は微分方程式で形が変わらないのか？

微積分に対するexp(jωt)の不変性

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx= f$$

一般化すると $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^n}{dt^n} x(t) = f(t)$



●入力　f(t)　は　正弦波　exp(jωt)であるとする．
●仮に，出力x(t)が周波数ω以外の成分，たとえばω′を持っているとする

（重要）微積分に対して正弦波exp(jωt)は複素係数がかかる以外は不変

$\frac{d}{dt}\exp(j\omega t) =$ 　　 $\frac{d^2}{dt^2}\exp(j\omega t) =$

左辺に代入すると，

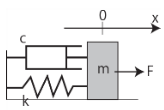
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^n}{dt^n} x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^n}{dt^n}\exp(j\omega' t) =$$

という，周波数ω′の成分が残ってしまう．つまり右辺とは一致し得ない．

これは矛盾．よってx(t)もexp(jωt)の成分しか持たない．

これまでのまとめ：システムの性質を知りたい

$$m\ddot{x} = f - kx - c\dot{x}$$
$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx= f$$



●微分方程式で表わされるシステムの性質は，
「ある周波数の入力を与えたらどのように振幅・位相が変わるか」
で定義される．つまり周波数の関数となる．
この関数H（ω）を伝達関数と呼ぶ

●伝達関数を得る次の方法を紹介した
（1）入力波形として正弦波を用意し、周波数をスイープして計測
（2）入力波形としてインパルスを用意し、「響き」を計測
（3）モデルから直接求める