認識行動システム論

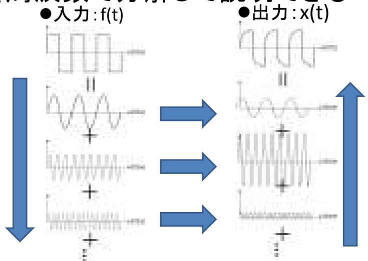
第5回
梶本裕之

日程

11/12　行列
11/19　(調布祭準備のため休講)
11/26　信号処理と行列
12/03　行列と最小二乗法(休講の可能性)
12/10　中間テスト(授業時間中)
12/17　信号処理(アナログ・デジタル)
01/07　古典制御の基礎
01/14　ロボティクス
01/21　画像処理
01/28　期末テスト(授業時間中)

(復習:フーリエ級数展開)
歪みを周波数で分解して説明できる

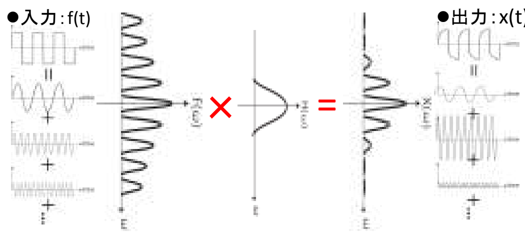
●入力:f(t)　●出力:x(t)



(1)入力f(t)を周波数分解する
(2)周波数ごとの出力の振幅と位相を求める.
(3)合計すると出力が得られる.
これを連続関数で考えるとどうなるか?

(復習:フーリエ変換)
入出力の関係:関数同士の掛け算

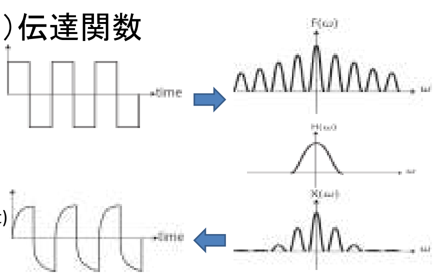
●入力:f(t)　●出力:x(t)



(1)入力f(t)を周波数分解⇒F(ω)
(2)周波数ごとにどれだけ振幅と位相が変わるか:H(ω)
(3)出力(のフーリエ変換):X(ω)=H(ω)*F(ω)
(4)逆フーリエ変換すると出力が得られる:x(t)

(復習)伝達関数

●入力:f(t)
●出力:x(t)



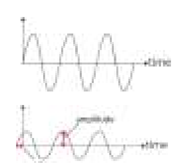
フーリエ空間では、入出力は単なる掛け算で表される.
X(ω)=H(ω)×F(ω)

この入出力関係を定義するシステムの性質H(ω)を
伝達関数と呼ぶ.

(復習)伝達関数H(ω)を求めるには?

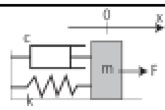
F(ω) → H(ω) → X(ω)

H(ω)は, 周波数ωの信号を入力したときの
出力の振幅と位相を表す. だから. . .



1. ある周波数ωの正弦波を入力.
2. 出力の振幅と位相を測定.
   - 入出力間の振幅の比率amp=|H(ω)|
   - 入出力間の位相差phase=∠H(ω)
3. この周波数での伝達関数は
   - H(ω)=amp×exp(j*phase).
4. 周波数を変えて測定すれば, H(ω)が得られる.

（復習）式の上で「計測」



$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f$$

$f=\exp(j\omega t)$ ●ある周波数2πf=ωの正弦波を入力

$x(t)=H(\omega)\exp(j\omega t)$ ●同じ周波数で振幅と位相の異なる出力が得られる

このx(t)の微分は？
$$\dot{x}(t)=j\omega H(\omega)\exp(j\omega t)=j\omega x(t)=sx(t)$$

同様に2階微分は
$$\ddot{x}(t)=(j\omega)^2 H(\omega)\exp(j\omega t)=s^2x(t)$$

jωと書くのがわずらわしいのでsと書く
（本当はもっと意味があるが，とりあえず）

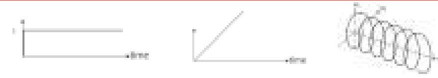
元の式に代入 $(ms^2+cs+k)H(\omega)\cancel{\exp(j\omega t)}=\cancel{\exp(j\omega t)}$

$$\therefore H(\omega)=\frac{1}{ms^2+cs+k}$$

s=jωを代入すれば，システムの伝達関数に他ならない．

（復習）拡張

課題：正弦波の重ね合わせで表現できない入力信号に対処したい



信号を別の関数の重ね合わせで表現したい．

その関数は，
✓exp(-jωt)の自然な拡張でありたい
✓微積分に対する不変性は保ちたい

新たな基底関数として，**exp(-st)**を考える．
ただしsはもはや虚数jωではなく，複素数．

（復習）ラプラス(Laplace)変換

フーリエ変換

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

ラプラス変換

$$L(f(t))=F(s)=\int_{0}^{\infty}f(t)\exp(-st)dt$$

＜ちがい＞
●純虚数jω⇒複素数sに拡張
●積分範囲は無限の過去を扱う必要がないため0から．

ラプラス変換表

1	➡	$\frac{1}{s}$	$\exp(at)$	➡	$\frac{1}{s-a}$
t	➡	$\frac{1}{s^2}$	$t\exp(at)$	➡	$\left(\frac{1}{s-a}\right)^2$
t^n	➡	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\dot{f}(t)$	➡	$sF(s)$
$\sin(\omega t)$	➡	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\int_{t=0}^{t}f(t)dt$	➡	$\frac{1}{s}F(s)$
$\cos(\omega t)$	➡	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$			

通常ラプラス逆変換は，表を見て行う

(前回の補足)ラプラス変換の例：時間遅れ

$f(t)$ のラプラス変換が分かっているとき，$f(t-\tau)$ のラプラス変換は？

$$L(f(t-\tau))=\int_{0}^{\infty}f(t-\tau)\exp(-st)dt$$

=

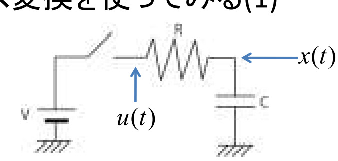
=

=

ただしf(t)はt<0で0であることを利用した．

（ルール）
ラプラス変換では，τの時間遅れはexp(-s τ)をかけることに相当

ラプラス変換を使ってみる(1)

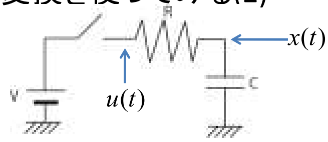


●入力：抵抗Rの左側の電圧 u(t).

●出力：コンデンサの電圧x(t).

（問題）スイッチを入れた後のx(t)の変化を調べよ

ラプラス変換を使ってみる(2)



●電流Iを考えて，

$$u = RI + \frac{1}{C}\int I dt$$

$$x = \frac{1}{C}\int I dt$$

$$I = C\dot{x}$$

$$u = RC\dot{x} + x$$

●xのラプラス変換をX，
●uのラプラス変換をUとすると，

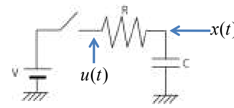
$U =$

（∴（ルール）微分⇒sをかける）

$=$

$X =$

ラプラス変換を使ってみる(3)



$$X = \frac{1}{sRC+1}U$$

t=0でスイッチを入れるから

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V & 0 \le t \end{cases}$$

$U(s) =$

$X =$

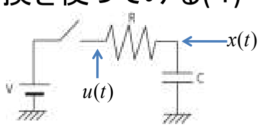
$=$

$=$

部分分数展開
$a = RC$
$b = -RC$

$X =$

ラプラス変換を使ってみる(4)



$$X = V\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}\right)$$

ラプラス変換表を見て逆変換する

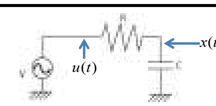
$x(t) =$

定常成分　過渡成分

入力u(t)

出力x(t)

伝達関数



フーリエ変換の時と同様に，
入出力関係を決める「システムの特性」を知りたい

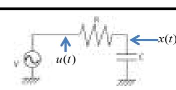
●先程の例では
xのラプラス変換をX，uのラプラス変換をUとしたとき，

$$X = \boxed{\frac{1}{sRC+1}}U$$

この部分が入出力関係を決めている．伝達関数．
s=jωを代入すればフーリエ変換の伝達関数と全く同じ．

伝達関数

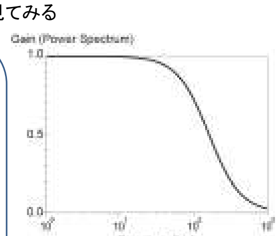
$$H(\omega) = \frac{1}{sRC+1} = \frac{1}{RC}\frac{1}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$



s=jωを代入して，周波数応答を見てみる

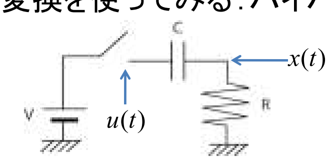
Scilabソース

```
R=1000;          //抵抗 1kΩ
C=10^(-6);       //コンデンサ1μF
f=[0:1000];      //周波数
w=2 * %pi * f;   //角周波数

//応答
H=1/(R*C) * ones(f) ./ (%i*w + 1/(R*C));

//パワースペクトル
power_spec = H .* conj(H);

//片対数グラフで表示
plot2d1("oln",f,power_spec);
```



1kΩの抵抗と1μFのコンデンサで，
1kHz程度以上の周波数を阻止する
ローパスフィルタが出来た．

ラプラス変換を使ってみる：ハイパス(1)

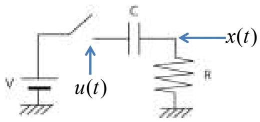


●入力：コンデンサの左側の電圧 u(t).

●出力：抵抗の電圧x(t).

（問題）スイッチを入れた後のx(t)の変化を調べよ

ラプラス変換を使ってみる：ハイパス(2)



●電流Iを考えて，

$$u = RI + \frac{1}{C}\int Idt$$

$$x = RI$$

$$I = \frac{x}{R}$$

$$u = x + \frac{1}{C}\int \frac{x}{R}dt$$

●xのラプラス変換をX，
●uのラプラス変換をUとすると，

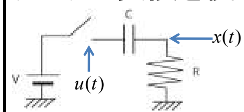
$U =$

（∵（ルール）積分⇒sで割る）

$=$

$X =$

ラプラス変換を使ってみる：ハイパス(3)



$$X = \frac{sCR}{sCR+1}U$$

t=0でスイッチを入れるから

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V & 0 \le t \end{cases}$$

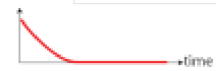
$U(s) =$

$X =$

$=$

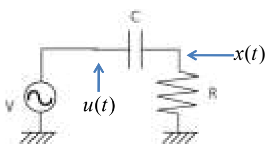
ラプラス変換の表を使って

$x(t) =$



一瞬だけ電流が流れることがわかる

レポート課題（1）：ハイパスフィルタの伝達関数



ローパスの場合を参考に，上記回路の伝達関数を求め，
R=32Ω，C=100μFの場合をグラフ表示するコードを書け．

大体何Hz以下を阻止するハイパスフィルタになっているか，
観察の結果をコード中にコメントすること．

行列

行列．．．1，2年でやったはず

今日の内容

●固有値とは，固有ベクトルとは
●行列の対角化：どうやるか，なぜうれしいのか
●制御における行列：さわりだけ

キーワードは，

固有値，固有ベクトル，対角化

行列：データ列を変換するもの

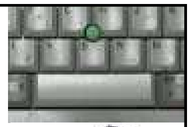
$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

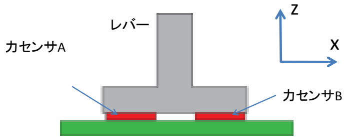
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

（例1）
y:観測データ，A：システムの性質，x：媒介変数

（例2）
y:フーリエ空間での周波数成分，A：フーリエ変換行列，
x:実空間でのデータ系列

（例）2軸力センサ

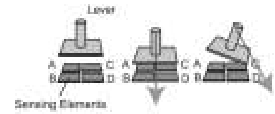


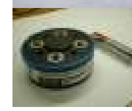


$$F_Z = x_A + x_B$$
$$F_X = k(x_A - x_B)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}}_{\text{2x1ベクトル}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & -k \end{bmatrix}}_{\text{2x2行列}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}}_{\text{2x1ベクトル}}$$

（例）多軸力センサ





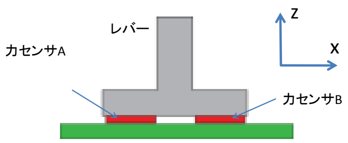
$$F_Z = k_1\left(x_A + x_B + x_C + x_D\right)$$
$$F_X = k_2\left(\left(x_A + x_B\right) - \left(x_C + x_D\right)\right)$$
$$F_Z = k_3\left(\left(x_A + x_C\right) - \left(x_B + x_D\right)\right)$$

$$3\left\{\begin{bmatrix} F_z \\ F_x \\ F_x \end{bmatrix}\right. = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\text{3x4行列}} \left.\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}\right\}4$$

一般には正方行列ではない！！

（例）6軸力センサには8つ以上のセンサエレメント内蔵

力センサのキャリブレーション（較正）

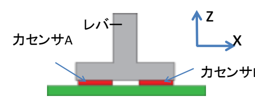


$$F_Z = k_1 x_A + k_2 x_B$$
$$F_X = k_3 x_A + k_4 x_B$$

$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

k1～k4のパラメータは元々未知．
これを求めなければ使えない！！

逆行列



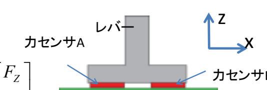
$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

これを $\mathbf{f} = \mathbf{Ax}$ と書く．

ここで，
「ある力を加えたときの各センサ出力は？」
という逆の関係を考える．

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{Gf} \qquad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

逆行列の「測定」



$$\mathbf{x} = \mathbf{Gf} \qquad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

(1) Fz=1，Fx=0の力を加え，各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \boxed{\quad\quad} = \boxed{\quad\quad}$$

各センサの出力に，逆行列の成分g1，g3が現れる！

(2) Fz=0,Fx=1の力を加え，各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \boxed{\quad\quad} = \boxed{\quad\quad}$$

各センサの出力に，逆行列の成分g2，g4が現れる！

逆行列の「測定」

$$\mathbf{x} = \mathbf{Gf} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} \qquad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

G=A⁻¹の成分，g1～g4が得られたので，
その逆行列を計算すればAが得られる．

$$\mathbf{f} = \mathbf{Ax}$$

まとめると，

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 \\ g_4 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}$$

行列に単位行列をかけたことに相当

単位力でなくて良い

1回目の入力　1回目の出力

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boxed{f_{z1}} & \boxed{f_{z2}} \\ \boxed{f_{x1}} & \boxed{f_{x2}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boxed{m_1} & \boxed{m_2} \\ \boxed{m_1} & \boxed{m_2} \end{bmatrix}$$

2回目の入力　2回目の出力

$$\mathbf{GF}=\mathbf{M}$$

$$\mathbf{G}=\mathbf{MF}^{-1}$$

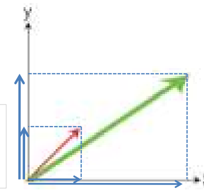
1. 2回**既知の**力ベクトルを加えて，各センサの出力を得る
2. 力ベクトルを並べたものを力行列**F**，
   センサ出力を並べたものを行列**M**とする
3. 力行列の逆行列$\mathbf{F}^{-1}$を**M**にかければ，行列**G**が得られる．
4. **Gの逆行列が望んだ「較正行列」A**

ほとんどすべての行列は，ベクトルを「引き延ばす」ものである（1）

$$\mathbf{v}=\mathbf{Au}\qquad \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ の時，

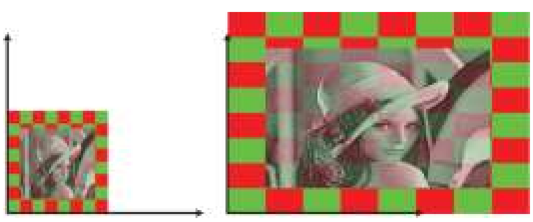
$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}=$$



（作用）x軸成分を3倍，y軸成分を2倍に引き延ばす

ほとんどすべての行列は，ベクトルを「引き延ばす」ものである（1）

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

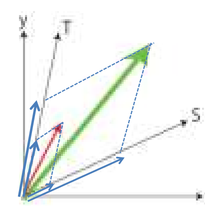


（作用）x軸成分を3倍，y軸成分を2倍に引き延ばす

ほとんどすべての行列は，ベクトルを「引き延ばす」ものである（2）

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$ の時は？．．．．ちょっと分からない．

作用が，
●謎のS軸成分をs倍，
●謎のT軸成分をt倍
に引き延ばすことだと仮定してみる．

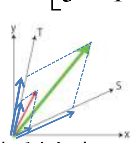


ただしもはや，謎のS,T軸は直交していなくて良い．

固有ベクトルと固有値

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

固有ベクトル，固有値とは，
謎のS，T軸，およびs,t倍
のことである．



（求める手続き）
(1) λ倍されるだけで方向不変のベクトルがあると仮定

$$\mathbf{Au}=\lambda\mathbf{u}$$

(2) 式変形

$$\mathbf{Au}=\lambda\mathbf{u}=\lambda\mathbf{Iu}$$
$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{u}=\mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 8-\lambda & -2 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}=0$$

固有ベクトルと固有値

$$\begin{bmatrix} 8-\lambda & -2 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}=0$$

$$(a-\lambda)u_x+bu_y=0 \longrightarrow u_y=-(a-\lambda)u_x/b$$

$$cu_x+(d-\lambda)u_y=0$$

$$cu_x-(d-\lambda)(a-\lambda)u_x/b=0$$

$$((a-\lambda)(d-\lambda)-bc)u_x=0$$

$$\therefore (a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0$$

この解λ1，λ2を固有値と呼び，
対応するベクトルを固有ベクトルと呼ぶ．

固有ベクトルと固有値

$$\begin{bmatrix} 8-\lambda & -2 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

$\lambda_1 = 2$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 8-2 & -2 \\ 3 & 1-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

大きさを1とすれば，$k = 1/\sqrt{10}$

$\lambda_2 = 7$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 8-7 & -2 \\ 3 & 1-7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

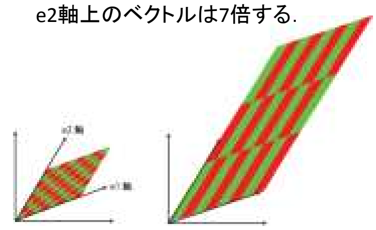
大きさを1とすれば，$k = 1/\sqrt{5}$

作用：e1軸上のベクトルは2倍，
　　　e2軸上のベクトルは7倍する．

固有ベクトルと固有値

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

作用：e1軸上のベクトルは2倍，
　　　e2軸上のベクトルは7倍する．

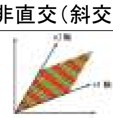


- やはり引き延ばす作用である
- ただし引き延ばす軸（固有ベクトル）は非直交

行列と座標変換

- 引き延ばす作用である
- ただし引き延ばす軸（固有ベクトル）は非直交（斜交）

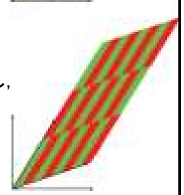
いまいちわかりにくい．．．



行列の作用を，

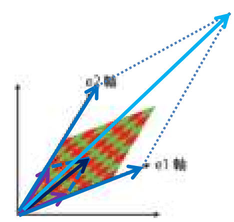
（1）引き延ばし軸での成分表示に変換し，
（2）各成分を引き延ばし，
（3）合成して元に戻す

ように分解すればわかりやすい．．．はず？？



まとめると

行列Tの作用は次の3段階に分解できる．
（1）引き延ばし軸での成分表示に変換し，
（2）各成分を引き延ばし，
（3）合成して元に戻す



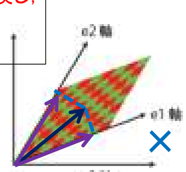
引き延ばし軸での成分表示（誤）

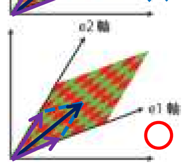
行列の作用を，
（1）引き延ばし軸での成分表示に変換し，
（2）各成分を引き延ばし，
（3）合成して元に戻す

内積で成分を取れる？．．．誤り

斜交座標では
「成分を取り出す操作」≠「内積」

先に（3）「合成」を考えよう．
（1）はその逆のはず





合成して元に戻す操作

行列の作用を，
（1）引き延ばし軸での成分表示に変換し，
（2）各成分を引き延ばし，
（3）合成して元に戻す

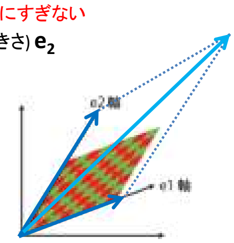
この操作は単なるベクトルの足し算にすぎない

($\mathbf{e}_1$成分の大きさ) $\mathbf{e_1}$ +($\mathbf{e}_2$成分の大きさ) $\mathbf{e_2}$

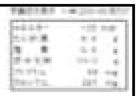
$$= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1\text{軸成分} \\ \mathbf{e}_2\text{軸成分} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}$ とおいて

$$= \mathbf{P}\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1\text{軸成分} \\ \mathbf{e}_2\text{軸成分} \end{bmatrix}$$



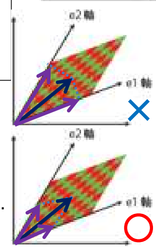
引き延ばし軸での成分表示(改)



行列の作用を,
(1)引き延ばし軸での成分表示に変換し,
(2)各成分を引き延ばし,
(3)合成して元に戻す

(3)「合成」が,

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1\text{軸成分}\\ \mathbf{e}_2\text{軸成分}\end{bmatrix}$$



で出来るのだから,(1)はその逆のはず.
すなわち

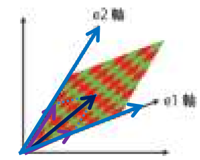
$$\mathbf{P}^{-1}\begin{bmatrix}x\text{軸成分}\\ y\text{軸成分}\end{bmatrix}$$

により**引き延ばし軸での成分表示**ができる

引き延ばし軸での引き延ばし

行列の作用を,
(1)引き延ばし軸での成分表示に変換し,
(2)各成分を引き延ばし,
(3)合成して元に戻す

各成分を
固有ベクトル$\mathbf{e}_1$軸に沿ってλ_1倍,
固有ベクトル$\mathbf{e}_2$軸に沿ってλ_2倍する.



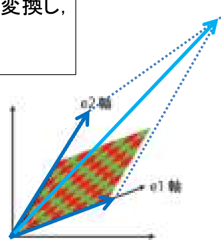
この操作は,

$$\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1\text{軸成分を}\lambda_1\text{倍}\\ \mathbf{e}_2\text{軸成分を}\lambda_1\text{倍}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1\text{軸成分}\\ \mathbf{e}_2\text{軸成分}\end{bmatrix}$$

合成して元に戻す

行列の作用を,
(1)引き延ばし軸での成分表示に変換し,
(2)各成分を引き延ばし,
(3)合成して元に戻す

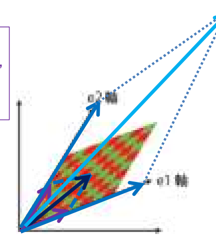
この操作は,
(これまでに求めた$\mathbf{e}_1$成分の大きさ) $\mathbf{e}_1$
+
(これまでに求めた$\mathbf{e}_2$成分の大きさ) $\mathbf{e}_2$



$$=\mathbf{P}\begin{bmatrix}\text{これまでに求めた}\mathbf{e}_1\text{軸成分}\\ \text{これまでに求めた}\mathbf{e}_2\text{軸成分}\end{bmatrix}\qquad \mathbf{P}=[\mathbf{e}_1\quad \mathbf{e}_2]$$

まとめると

行列Tの作用は次の3段階に分解できる.
(1)引き延ばし軸での成分表示に変換し,
(2)各成分を引き延ばし,
(3)合成して元に戻す



$$\mathbf{Ax}=\mathbf{P}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_0\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$$

固有値を対角成分に並べた行列を**T**と置く. $\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_0\end{bmatrix}$

$$\mathbf{Ax}=$$

重要な応用:$\mathbf{A}^n$

$$\mathbf{A}^n\mathbf{x}=\left(\mathbf{PTP}^{-1}\right)^n\mathbf{x}$$
$$=\mathbf{PTP}^{-1}\mathbf{PTP}^{-1}\mathbf{PTP}^{-1}\cdots\mathbf{PTP}^{-1}\mathbf{x}$$
$$=\mathbf{PT}^n\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$$
$$=\mathbf{P}\begin{bmatrix}\lambda_1^n & 0\\ 0 & \lambda_2^n\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$$

$$\because \mathbf{T}^n=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1^n & 0\\ 0 & \lambda_2^n\end{bmatrix}$$

行列のn乗を簡単に計算することができる

重要な結論:nが非常に大きくなった時の$\mathbf{A}^n$

$$\mathbf{A}^n\mathbf{x}=\mathbf{P}\begin{bmatrix}\lambda_1^n & 0\\ 0 & \lambda_2^n\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$$

行列の固有値λの絶対値が引き延ばしの倍率だから,

固有値が

- 一つでも1より大きければ,A^nは**発散**する
- 全て1より小さければ,A^nは0に収束する

例：$\mathbf{A}^n$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 & -18 \\ 27 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 & -18 \\ 27 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 410 & -134 \\ 201 & -59 \end{bmatrix}$$

$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{5} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 7$ を代入して，

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{P}\mathbf{T}^3\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{5} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 7^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{5} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \cdots = \begin{bmatrix} 410 & -134 \\ 201 & -59 \end{bmatrix}$$

固有値が大きいのでどんどん大きくなる

ほとんどすべての行列は，ベクトルを「引き延ばす」ものである（3）

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ の時は？．．．．回転と習ったはず

以前と同様に固有値と固有ベクトルを求めてみる．

$$\begin{bmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

$$(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$$

$$(\cos\theta - \lambda)(\cos\theta - \lambda) + \sin^2\theta = 0$$

回転行列の固有値＝exp(jθ)

$$(\cos\theta - \lambda)(\cos\theta - \lambda) + \sin^2\theta = 0$$

$$\cos^2\theta - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2 + \sin^2\theta = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2}$$

$$= \frac{2\cos\theta \pm j\sqrt{4\sin^2\theta}}{2}$$

$$= \cos\theta \pm j\sin\theta$$

$$= \exp(\pm j\theta)$$

回転行列の固有ベクトル

$\cos\theta + j\sin\theta$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta - \cos\theta - j\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \cos\theta - j\sin\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$

$$= \sin\theta\begin{bmatrix} -j & -1 \\ 1 & -j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

$\therefore u_x = ju_y$ $\quad \mathbf{e}_1 = k\begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix}$ 大きさを1とすれば例えば，$k = 1/\sqrt{2}$

$\cos\theta - j\sin\theta$ に対応する固有ベクトルは

$\mathbf{e}_2 = k\begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$ 大きさを1とすれば例えば，$k = 1/\sqrt{2}$

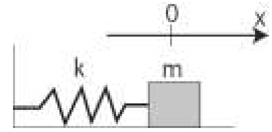
（参考）回転行列も（拡張された）引き延ばしである

- 一般の行列は，固有値，固有ベクトル共に複素数．
- x,y軸に加えて，複素軸も含めた4次元空間中でこれまでと同様の引き延ばしを行う演算とみなせる．
- 複素固有値の絶対値が引き延ばし倍率，偏角が回転角度を表す．

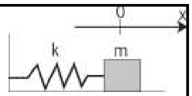
制御における行列（導入編）

おもりの挙動をシミュレートしたい（第2回参照）．

```
m=1.0;   //重さ
k=1.0;   //ばね定数
x=1.0;   //初期位置
v=0;     //初期速度
dt=0.1;  //時間刻み
record=[];//記録用
for time= 0:dt:10          //時刻
    F=-k*x;                //ばねによって生じる力
    a=F/m;                 //生じる加速度
    v= v+a*dt;             //速度
    x= x+v*dt;             //位置
    record = [record,x]; //記録（※テクニック：ベクトルが伸びていく）
end
plot([0:dt:10],record);
```



制御における行列（導入編）



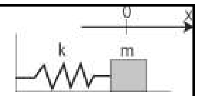

```
for time= 0:dt:10          //時刻
    F=-k*x;                //ばねによって生じる力
    a=F/m;                 //生じる加速度
    v= v+a*dt;             //速度
    x= x+v*dt;             //位置
end
```

位置，速度，加速度を並べた「状態ベクトル」xを定義 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ v \\ a \end{bmatrix}$

上の関係から，dt時間後の新たな位置，速度，加速度は

$$\begin{bmatrix} x_n \\ v_n \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ v_{n-1} \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{Ax}$$

制御における行列（導入編）



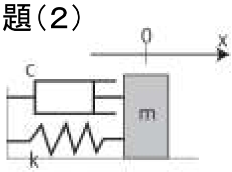
Scilabコード

```
m=1.0;   //重さ
k=1.0;   //ばね定数
x=1.0;   //初期位置
v=0;     //初期速度
a=-k/m*x;  //初期加速度
dt=0.01;  //時間刻み
record=[];//記録用

state=[x;v;a];

A=[1,dt,0;0,1,dt;-k/m,0,0];

for time= 0:dt:10  //時刻
  state= A*state;
  record = [record,state(1)];
end

plot([0:dt:10],record);
```

$$\begin{bmatrix} x_n \\ v_n \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & dt & 0 \\ 0 & 1 & dt \\ -k/m & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ v_{n-1} \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{Ax}_{n-1} = \cdots = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0$$

- 行列Aのn乗を使えば，n時刻先の状態をシミュレート可能
- 行列Aの固有値を見れば，システムが将来(n=∞)収束するか発散するか予測可能！

レポート課題（２）



●ダンパを加えた際の行列を考え，
同様のシミレーションプログラムを書け

●行列Aの固有値の絶対値が1よりも小さいこと，
すなわち位置が収束することを確認し，コメントに記せ
(Scilabでは固有値はspec()で求められる)

注意：ここで導入した行列はあくまで導入編用で，シミュレーションとしては不正確です．