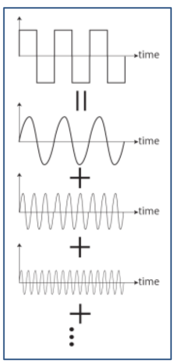
インタラクティブシステム論
第5回

梶本裕之
Twitter ID kajimoto
ハッシュタグ #ninshiki

日程

4/12 イントロダクション
4/19 Scilabの紹介（西6号館3階PCルーム）
4/26 フーリエ変換
5/03 休日
5/10 フーリエ変換と線形システム
5/17 信号処理の基礎
5/24 信号処理応用1（相関）
5/31 信号処理応用2（画像処理）
6/07 ～中間チェック～
6/14 出張により休講
6/21 ラプラス変換
6/28 古典制御の基礎
7/05 行列
7/12 行列と最小二乗法
7/19 ロボティクス
7/26 ～期末チェック～

（復習）：フーリエ級数展開



周期Tの波形 f(t)は次のように分解できる

$$f(t)=a_0+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos(2\pi mt/T)+\sum_{m=1}^{\infty}b_m\sin(2\pi mt/T)$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$ 平均値（DC成分）

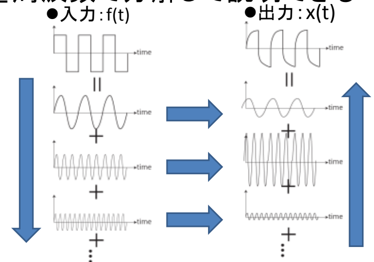
$$a_m=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi mt/T)dt$$

$$b_m=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2\pi mt/T)dt$$

※この授業では係数は気にしない．

（復習：フーリエ級数展開）歪みを周波数で分解して説明できる

●入力：f(t) ●出力：x(t)



（1）入力f(t)を周波数分解する
（2）周波数ごとの出力の振幅と位相を求める．
（3）合計すると出力が得られる．

これを連続関数で考えるとどうなるか？

（復習）フーリエ変換

フーリエ級数展開は周期的な信号を分解するのに使われた．
フーリエ変換は周期的ではない信号に対する変換．
Tを無限大とした極限から導かれる．
逆フーリエ変換によって元に戻すことができる．

フーリエ変換

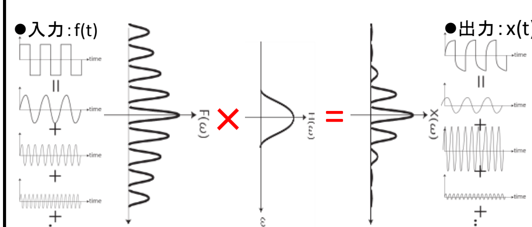
$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

逆フーリエ変換

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

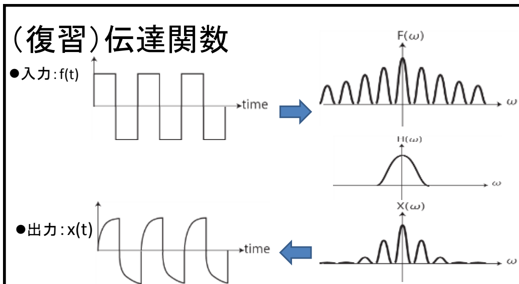
（復習）入出力の関係：関数同士の掛け算

●入力：f(t) ●出力：x(t)



（1）入力f(t)を周波数分解⇒F(ω)
（2）周波数ごとにどれだけ振幅と位相が変わるか：H(ω)
（3）出力（のフーリエ変換）：X(ω)=H(ω)*F(ω)
（4）逆フーリエ変換すると出力が得られる：x(t)

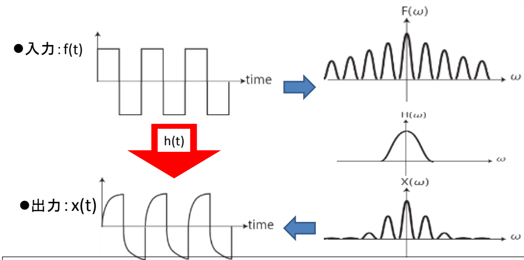
（復習）伝達関数



フーリエ空間では，入出力は単なる掛け算で表される．
X(ω）＝H(ω)×F(ω)

この<u>入出力関係</u>を定義するシステムの性質H(ω)を伝達関数と呼ぶ．

今日の話題：周波数領域ではなく，<u>時間領域のまま</u>議論できないか？



X(ω）＝H(ω)×F(ω)：周波数領域で美しいのは分った．
時間的な現象として何が起きているのか分からない．

式で考えよう

フーリエ変換
$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

逆フーリエ変換
$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

X(ω）＝H(ω)×F(ω)

両辺を逆フーリエ変換すれば時間領域の信号に戻る．

$x(t)=$

$=$

$=$

$=$

逆順の計算もしておく（ふつうはこちら）

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

フーリエ変換
$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

逆フーリエ変換
$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

両辺をフーリエ変換．

$$\begin{aligned}
X(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-j\omega t)dt\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-j\omega(\tau+(t-\tau))dt\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-j\omega\tau)\cdot\exp(-j\omega(t-\tau))dt\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\qquad d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\qquad dt\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\qquad d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\qquad dt'\\
&=F(\omega)H(\omega)
\end{aligned}$$

コンボリューション定理

$$X(\omega)=F(\omega)H(\omega)=H(\omega)F(\omega)$$

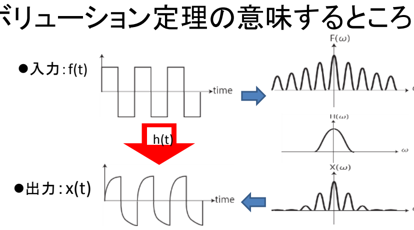
フーリエ逆変換　　フーリエ変換

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

簡略化のため次のようにも表記

$$x(t)=f(t)*h(t)=h(t)*f(t)$$

コンボリューション定理の意味するところ（1）

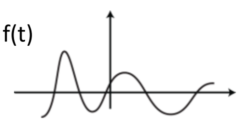


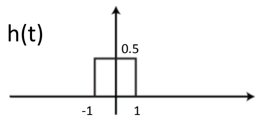
$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad X(\omega)=F(\omega)H(\omega)$$

- <u>h(t)のフーリエ変換がH(ω)</u>であるとする．
- 周波数領域でフィルタH(ω)をかけることは，<u>時間領域</u>では，入力信号x(t)に対する関数h(t)の畳み込み積分（コンボリューション）として表現される．

コンボリューション定理の意味するところ(2)

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau$$



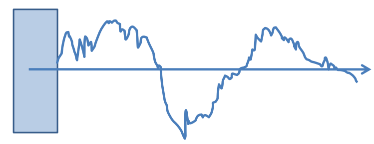


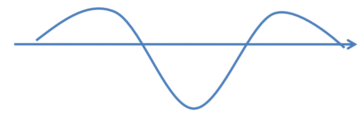
例えば，h(t)=0.5 (-1<t<1)なら，

$x(t)=$

これは，f(t)を平均化していくフィルタ

平均化？



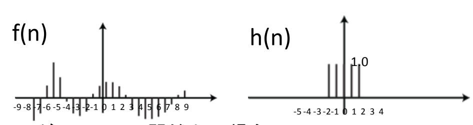


ノイズを「ならし」て大域的な特徴をつかむ

離散化による理解

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau \Rightarrow x(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)\,f(n-i)$$

x(n)=…+ h(-4)f(n+4) + h(-3)f(n+3) +…+ h(3)f(n-3) + h(4)f(n-4)+…



h(n)が，n=-2～2の間だけ1の場合，

x(1)=f(3) + f(2) + f(1) + f(0) + f(-1)
x(2)=f(4) + f(3) + f(2) + f(1) + f(0)
x(3)=f(5) + f(4) + f(3) + f(2) + f(1)
x(4)=f(6) + f(5) + f(4) + f(3) + f(2)
x(n)=f(n+2) + f(n+1) + f(n) + f(n-1) + f(n-2)

出力xは，入力fの「平均化」になっている．

(復習)フーリエ変換の計算例：矩形波

$$h(t)=\begin{cases}1/2 & -1\le t\le 1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$H(\omega)=\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)\,dt$$

$$=$$

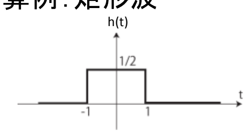
$$=\left[\frac{1}{-j2\omega}\exp(-j\omega t)\right]_{-1}^{1}$$

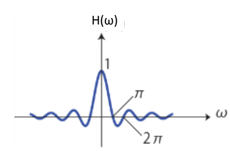
$$=\frac{1}{-j2\omega}\left(\exp(-j\omega)-\exp(j\omega)\right)$$

$$=\frac{1}{-j2\omega}\left(\cos(\omega)-j\sin(\omega)-\cos(\omega)-j\sin(\omega)\right)$$

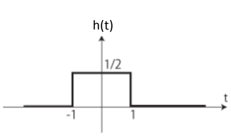
$$=\frac{-j\sin(\omega)}{-j\omega}$$

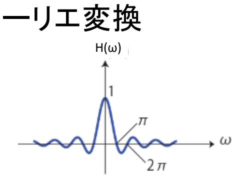
$$=$$





h(t)とH(ω)の関係：フーリエ変換

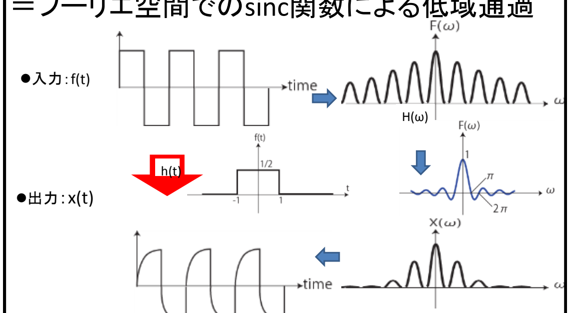




つまり，h(t)のフーリエ変換H(ω)は，大雑把には
「低い周波数で大きな値をとり，高い周波数で小さな値をとる」
すなわち，低域通過フィルタ(LPF：Low Pass Filter)である．

時間領域での「平均化(平滑化)フィルタ」
≒周波数領域での「ローパスフィルタ」

実時間での矩形波による平均化
＝フーリエ空間でのsinc関数による低域通過

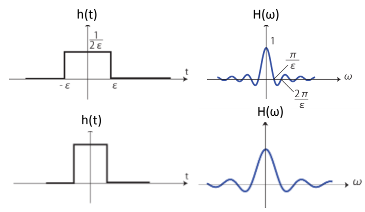


$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$　　$X(\omega)=F(\omega)H(\omega)$

（復習）矩形波の幅が変わると？

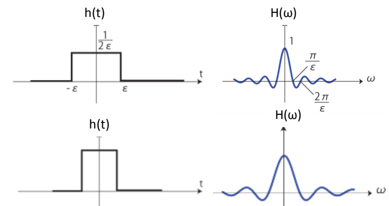
$$h(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon} & -\varepsilon\le t\le\varepsilon \\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$H(\omega)=$$



矩形波の幅を狭くする ⇒ フーリエ変換結果は幅広に

平均化の時間幅と周波数帯域の関係

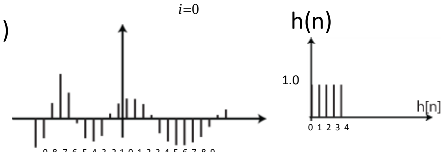


矩形波の幅を狭くする ⇒ フーリエ変換結果は幅広に

時間的な平均化（平滑化）フィルタの幅が広いほど
周波数的には低い周波数しか通さなくなる．

時間軸の離散化：FIRフィルタによる実装

$$x(n)=\sum_{i=0}^{\infty}h(i)\,f(n-i)$$



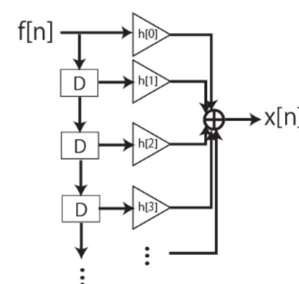
i=0から始める：未来のデータ が使えないことを意味する．
この例は，元データf(n)を，４個平均して出力する．

•未来のデータが使えない例：リアルタイム制御
•先のデータが使える例：画像処理

FIRフィルタの図的理解

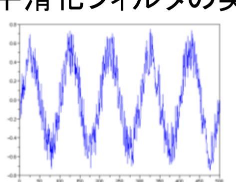
$x(n)=$

D:Delay，遅延器，メモリ．
h[n]：増幅器



FIR＝Finite Impulse Response
個々のインパルス応答を有限個足し合わせたもの．

平滑化フィルタの実例（1）

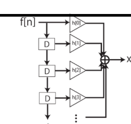


元の信号に
高周波ノイズが含まれている．

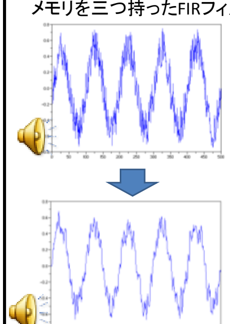
Scilabコード例

```
time = [0:0.01:100];

//振幅0.5の正弦波に最大振幅0.5のノイズが混入
wave=0.5*sin(time*2*%pi) + 0.5*(rand(time)-0.5);
playsnd(wave);
savewave('wave.wav',wave);
plot(wave(1:500));
```

平滑化フィルタの実例（2）



メモリを三つ持ったFIRフィルタによって平滑化

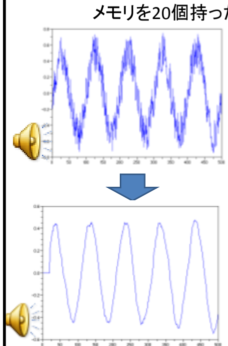


Scilabコード例

```
time = [0:0.01:100];
//振幅0.5の正弦波に最大振幅0.5のノイズが混入した信号
wave=0.5*sin(time*2*%pi) + 0.5*(rand(time)-0.5);

out=zeros(wave);
//3つを平均する.
for n=3:length(wave),
  for i=0:2,
    out(n)=out(n)+wave(n-i)/3;
  end
end
playsnd(out);
savewave('wave.wav',out);
plot(out(1:500));
```

平滑化フィルタの実例（3）

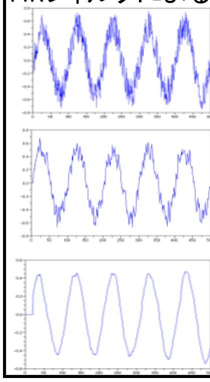
メモリを20個持ったFIRフィルタによって平滑化

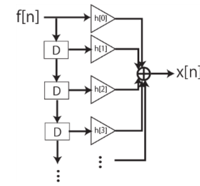


Scilabコード例

```
time = [0:0.01:100];
//振幅0.5の正弦波に最大振幅0.5のノイズが混入した信号
wave=0.5*sin(time*2*%pi) + 0.5*(rand(time)-0.5);

out=zeros(wave);

//20個を平均する.
for n=20:length(wave),
  for i=0:19,
    out(n)=out(n)+wave(n-i)/20;
  end
end

playsnd(out);
savewave('wave.wav',out);
plot(out(1:500));
```

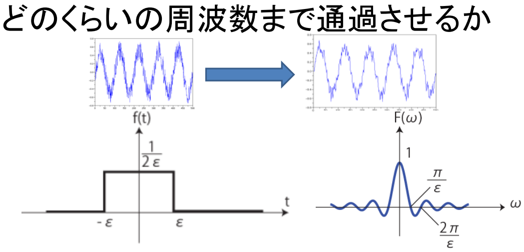
FIRフィルタによる平滑化の効果と弊害





ステップ数が多くなるほど
＜効果＞
平滑化の効果が高い
（＝低域の通過周波数が下がる）
＜弊害＞
計算量の増大
ステップ数分の「時間遅れ」が必ず生じる

どのくらいの周波数まで通過させるか

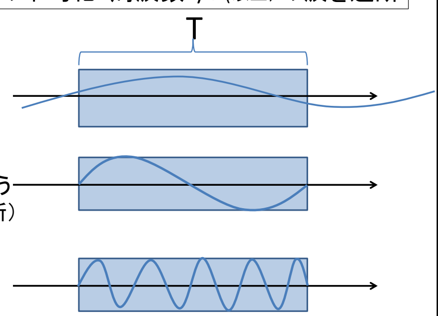


幅2εの矩形波のフーリエ変換：角周波数π/εで0

時間幅Tで平均化する場合：
角周波数2π/T（周波数1/T）(以上)の波を遮断.

平均化による遮断

時間幅Tの平均化：周波数1/T (以上)の波を遮断.

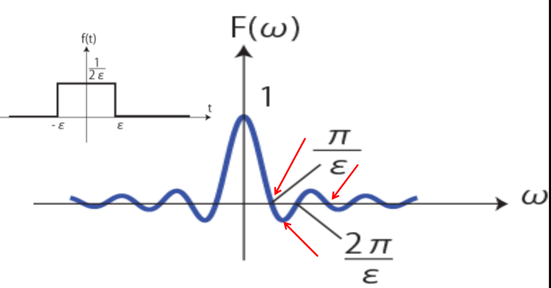


ほぼ通過

打ち消し合う
（完全に遮断）

ほぼ遮断

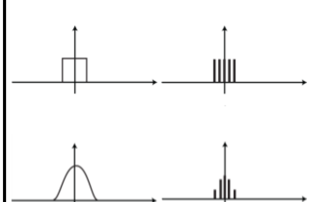
単純平均化によるローパスの落とし穴

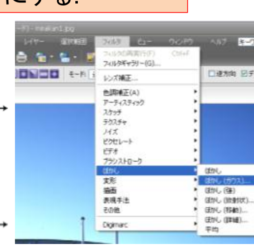


特定の周波数は全く通さないが，高周波成分の遮断が周期的ふるまいを示す.

実際のローパス

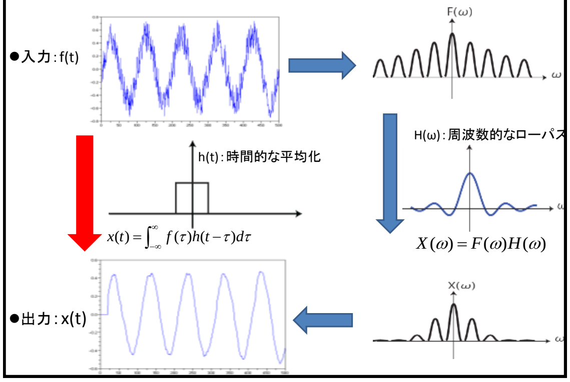
周波数空間での周期的ふるまいを無くすため，なだらかにする.





画像の世界では．．．「ガウスぼかし」

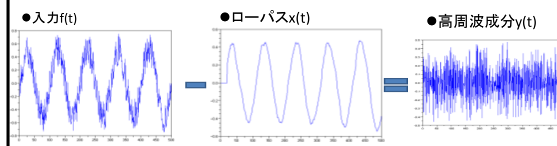
平均化によるローパスフィルタ：まとめ



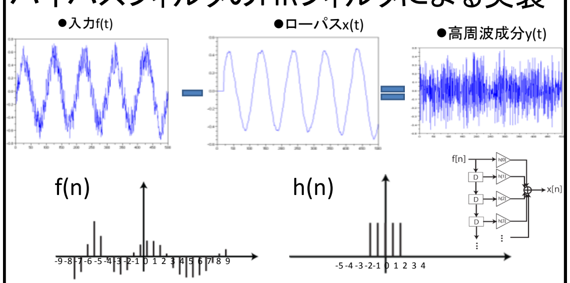
逆に高い周波数成分だけ取り出すには？

●ローパスフィルタ：低い周波数成分だけを取り出した

●元信号と低周波信号の差をとれば，高周波数成分だけ取り出せる？



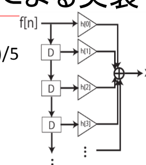
ハイパスフィルタのFIRフィルタによる実装



ローパス例：x(n)=(f(n+2) + f(n+1) + f(n) + f(n-1) + f(n-2))/5
ハイパス例：y(n)=f(n)-x(n)
=-1/5・f(n+2) -1/5・f(n+1) +4/5f(n) -1/5・f(n-1) -1/5・f(n-2)

ハイパスフィルタのFIRフィルタによる実装

ローパス：
強　x(n)=(f(n+2) + f(n+1) + f(n) + f(n-1) + f(n-2))/5
↑　x(n)=(f(n+1) + f(n) + f(n-1) + f(n-2))/4
↓　x(n)=(f(n+1) + f(n) + f(n-1))/3
弱　x(n)=(f(n) + f(n-1))/2

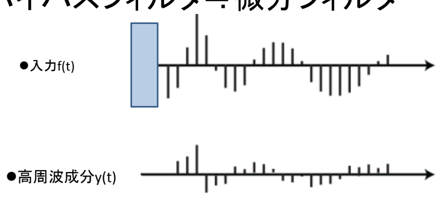


ハイパス：y(n)=f(n)-x(n)

ローパスが{強い・弱い}ほど，ハイパスは{弱く・強く}なる

最も簡単な場合：
x(n)=(f(n) + f(n-1))/2
ハイパス：
y(n) = f(n)-x(n) =
つまり，直前との「差分（微分）」．

ハイパスフィルタ≒微分フィルタ



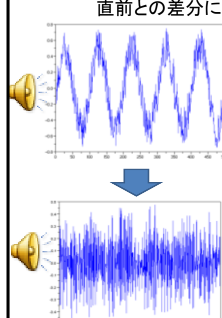
y(1) = (f(1) - f(0))/2
y(2) = (f(2) - f(1))/2
y(3) = (f(3) - f(2))/2…

用語整理

（周波数表現）		（時間軸表現）
ローパスフィルタ＝低域通過フィルタ	＝	平滑化フィルタ
ハイパスフィルタ＝高域通過フィルタ	＝	微分フィルタ

ハイパスフィルタの例

直前との差分によってハイパス

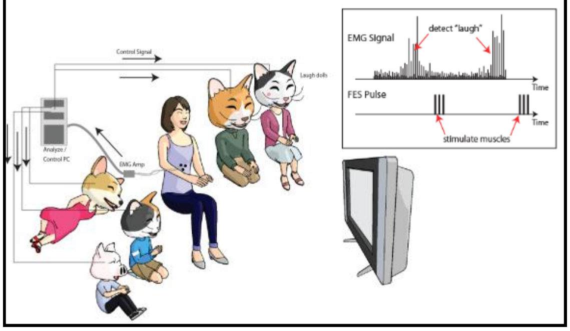


Scilabコード例

```
time = [0:0.01:100];
//振幅0.5の正弦波に最大振幅0.5のノイズが混入した信号
wave=0.5*sin(time*2*%pi) + 0.5*(rand(time)-0.5);

out=zeros(wave);

//差分をとる
for n=2:length(wave),
  out(n)=wave(n)-wave(n-1);
End

playsnd(out);
savewave('wave.wav',out);
plot(out(1:500));
```

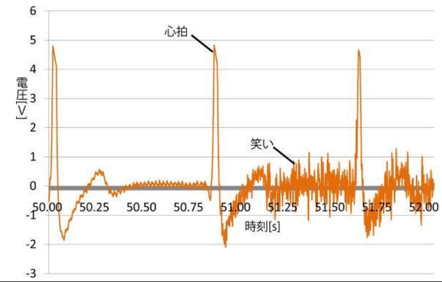
フィルタリング．．．研究の現場で

筋電計測による笑いの検出→増幅は可能か？

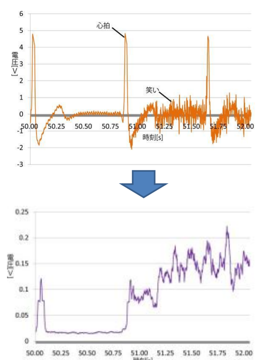


研究の現場で

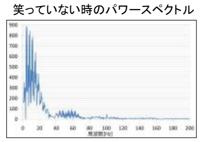
筋電計測：
●心拍による成分：非常に大きいが，低周波
●笑いによる成分：小さいが，高周波



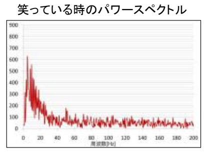
研究の現場で



笑っていない時のパワースペクトル

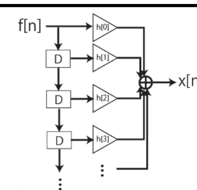


笑っている時のパワースペクトル



（1）ハイパスフィルタで笑い成分を抽出
（2）絶対値化フィルタで正の値に変換
（3）ローパスフィルタで笑い領域を確定

参考：エコー



エコー＝時間遅れ信号の重畳．
これもFIRフィルタで実装できる．

Scilabコード例

```
wave = loadwave('aiueo.wav');

out=zeros(wave);

//エコー（1000ステップ前の信号を重畳）
for n=1000:length(wave),
   out(n)=wave(n)+0.9*wave(n-999);
end

playsnd(out,11000);      //11kHzサンプリングで再生
savewave('wave.wav',out,[11000]);
```

原音

1000ステップ前の
信号を重畳

1000ステップ前＋
2000ステップ前の
信号を重畳

沢山重畳

レポート課題１

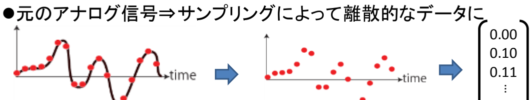
適当なwaveファイルに対して次の三つの操作を行う．
（1）FIRフィルタによるローパスフィルタをかけて音をくもらせる．
（2）FIRフィルタによる適当なハイパスフィルタをかけて音をとがらせる．
（3）エコーを掛けてカラオケのようにする．

Scilabのソースファイル，原音のwaveファイル，
処理後のwaveファイルを添付すること．
（ただし添付ファイルは1Mbyte以下に抑えてください．）

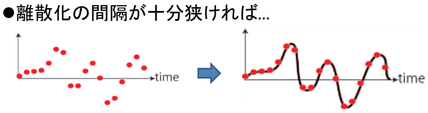
※注：Waveファイルの形式によってはScilabで扱えない場合があります。その場合は、例えばWindows標準のWaveサウンドファイル（Windows開始音等）を使うとうまくいきます。C:¥Windows¥Mediaの下にあります。

PCで信号を扱う＝離散化

●元のアナログ信号⇒サンプリングによって離散的なデータに

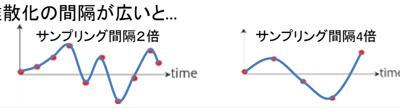


●離散化の間隔が十分狭ければ…



元に戻せそう

●離散化の間隔が広いと…



元に戻せなそう

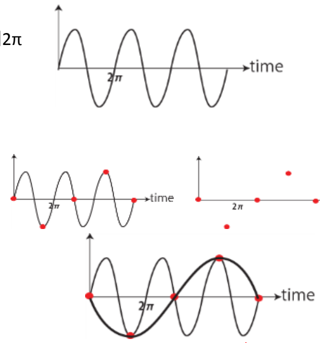
この違いはなんだろうか？　「元に戻す」とはなんだろうか？

元に戻せない（＝元が推測できない）場合

元の信号：sin(x)，周期2π

離散化の間隔　3/2 π

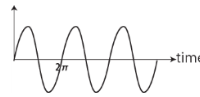
なめらかに結ぶと…



元と全く異なる波形となる＝エリアシング

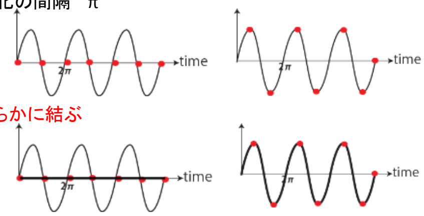
離散化に際して：ナイキスト周波数

元の信号：sin(x)，周期2π



離散化の間隔　π

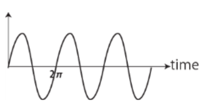
なめらかに結ぶ



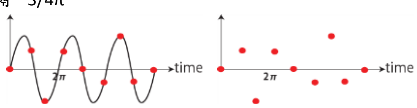
うまくいく場合と、うまくいかない場合がありそう

離散化に際して：ナイキスト周波数未満

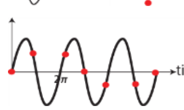
元の信号：sin(x)，周期2π



離散化の間隔　3/4π



正弦波でなめらかに結ぶ



元の波形が再現できる！！

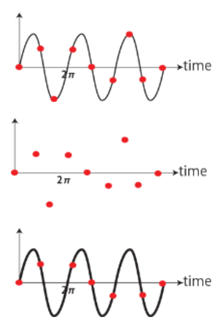
サンプリング定理（標本化定理）

元信号に含まれる最高周波数の，

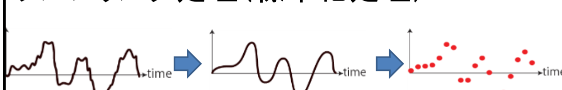
倍より高い周波数でサンプリング（標本化）していれば，

元の信号はサンプリング点から完全に再生できる．

倍の周波数＝ナイキスト周波数



サンプリング定理（標本化定理）



逆に，エリアシングを生じないために，

サンプリング周波数の半分以上の周波数は，**あらかじめカット**する必要がある．（後でカットしても意味無し！）

カットしないとエリアシングを生じ，偽の低い周波数が観察される．

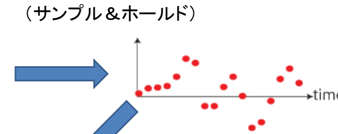
（例）蛍光灯下の扇風機，テレビ画面のビデオ撮影

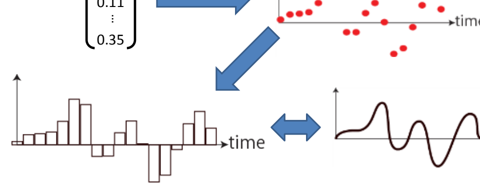
カットはアナログ回路によるローパスフィルタなどを用いる事が多い

サンプリングデータを元に戻す（再生）とは？

一番簡単な方法：サンプリングされたデータを、単純に電圧出力する（サンプル＆ホールド）

$$\begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.10 \\ 0.11 \\ \vdots \\ 0.35 \end{bmatrix}$$

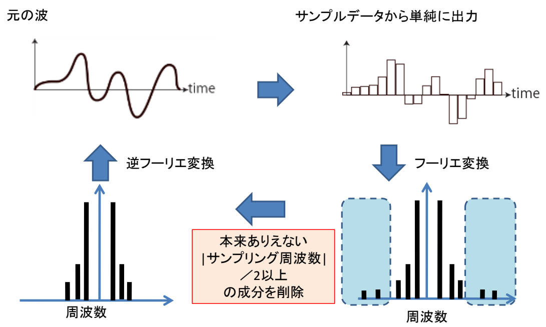




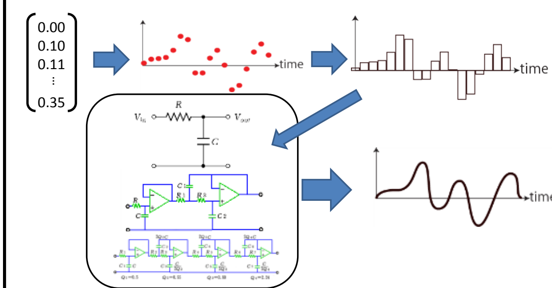
大体同じ。でも微妙な違い

元の波が、ナイキスト周波数未満の成分しかないとすると、単純に、「高い周波数をカットすれば元に戻る」はず

元の波に含まれない周波数をカット(イメージ)

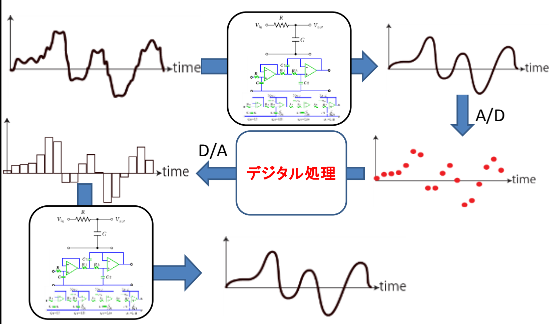


サンプリングデータ(デジタルデータ)からアナログ波形の出力の実際



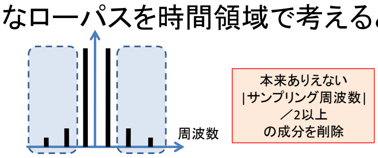
実際には**アナログ回路**で高周波成分をカットする場合がほとんど
カット周波数＝サンプリング周波数の半分

「デジタル」処理のための「アナログ」処理まとめ



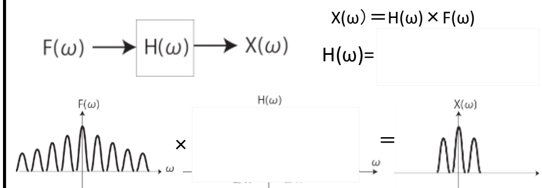
①A/D前にサンプリング定理を満たすためのローパス
②D/A後にサンプリング定理を満たすためのローパス

理想的なローパスを時間領域で考えると?



信号のフーリエ変換F(ω)にフィルタH(ω)をかけることを意味する

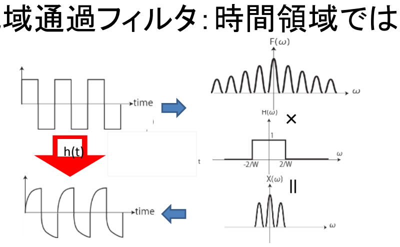
X(ω)＝H(ω)×F(ω)



理想的低域通過フィルタ：時間領域では?

●入力：f(t)

●出力：x(t)



$$H(\omega)=\begin{cases}1 & (|\omega|<W/2)\\ 0 & (|\omega|\geqq W/2)\end{cases}$$

逆フーリエ変換でh(t)を求めてみる

$h(t)=$

$=$

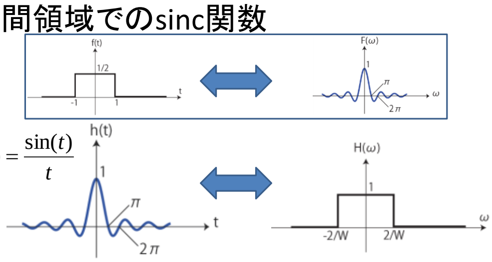
$=$

$=$

$=$

$=$

時間領域でのsinc関数

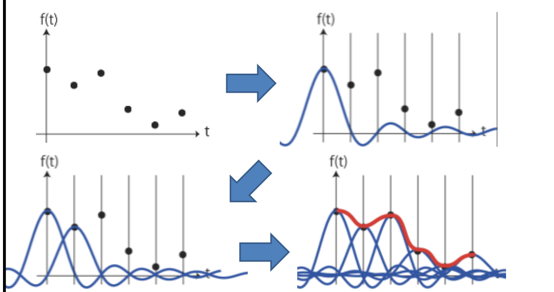


$$h(t)=\frac{\sin(t)}{t}$$

周波数領域での理想的な低域通過フィルタは、
時間領域でのsinc関数に他ならない

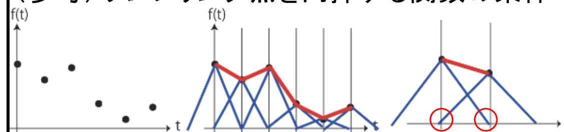
ただし無限に長いフィルタになるので、
結局矩形波(＝平均化)や、よりなだらかな波形が用いられる。

（参考）サンプリング点を「なだらかに内挿する」関数としてのsinc関数

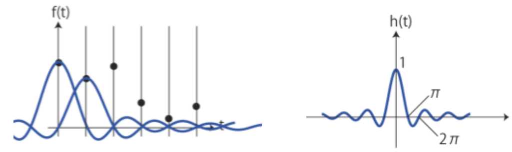


Sinc関数での「畳込み積分」：
サンプリング点ごとにsinc関数を重ねあわせていく操作に相当

（参考）サンプリング点を内挿する関数の条件

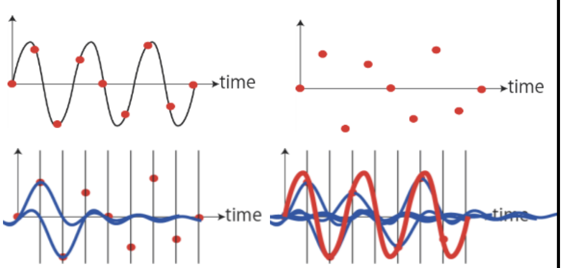


最も簡単な内挿＝線形補間。この場合基礎となる関数は孤立三角波
各関数の合算結果がサンプリング点を通過するためには、
基礎となる関数が、<u>サンプリング点で0にならなければならない</u>。



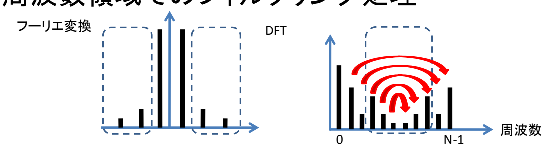
Sinc関数はこの条件を満たしている。

（参考）サンプリング定理ぎりぎりの波形も

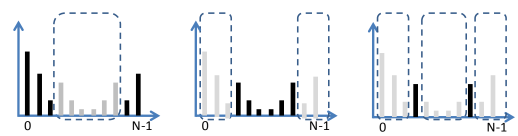


サンプリング定理ギリギリの波形のサンプリング結果も、
Sinc関数で理論通りに内挿するとちゃんと元に戻る

周波数領域でのフィルタリング処理



フーリエ変換に対するフィルタリング：原点対称
DFTに対するフィルタリング：中心対称に作用させる必要



低域通過フィルタ　高域通過フィルタ　帯域通過フィルタ

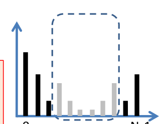
レポート課題2

低域通過フィルタによって三角波を正弦波にする。

（1：時間領域での処理）レポート課題1と同様のFIRフィルタをかけ、波形が正弦波に近づいていくことを観察せよ

（2：周波数空間での処理）三角波のフーリエ変換結果に対して、周波数領域で低域を通過させた後、逆フーリエ変換で波形を元に戻せ。

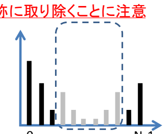
理解してほしいこと：時間領域での処理（畳込み積分）と周波数空間での処理が同じ結果を生むことを認識。



低域通過フィルタ

レポート課題2(2) 参考（ほぼ答え）

```
wave=[-49:50];    //一周期100の三角波
wave = [wave,wave,wave,wave,wave]; //5回繰り返す。つまり500要素の波形
plot(wave);
fourier = fft(wave);  //フーリエ変換。500要素のベクトル

//パワースペクトルを計算
//power_spec = fourier .* conj(fourier);
//plot(power_spec);    //計算結果を表示

//フーリエ変換結果から高域を取り除く。どこからどこまで取り除くかは、パワースペクトルの観察で見極める。DFT結果に対しては左右対称に取り除くことに注意
//Scilabでは配列の添字が1から始まることに注意
for i=[redacted]
  fourier(i)=0;
end

wave2=ifft(fourier); //逆フーリエ変換
plot(wave2);
```



低域通過フィルタ