認識行動システム論

第6回

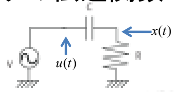
梶本裕之

日程（多少変更）

11/26　行列と最小二乗法
12/03　信号処理と行列
12/10　中間テスト(授業時間中)
12/17　信号処理（アナログ･デジタル）
01/07　古典制御の基礎
01/14　ロボティクス
01/21　画像処理
01/28　期末テスト(授業時間中)

レポート課題：ハイパスフィルタの伝達関数

$$H(\omega)=\frac{sCR}{sCR+1}=\frac{s}{s+\frac{1}{CR}}$$



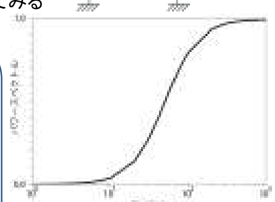
s=jωを代入して，周波数応答を見てみる

Scilabソース

```
R=32;           //抵抗 32Ω
C=10^(-4);      //コンデンサ100μF
f=[0:1000];     //周波数
w=2 * %pi * f;  //角周波数
//応答
H=%i*w ./ (%i*w + 1/(R*C));

//パワースペクトル
power_spec = H .* conj(H);

//片対数グラフで表示
plot2d1("oln",f,power_spec);
```



32Ωの抵抗と100μFのコンデンサで，10Hz程度以下の周波数を阻止するハイパスフィルタが出来た．
（コンデンサの容量を変更しました．）

行列復習

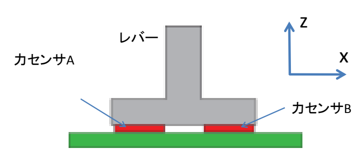
（復習）行列：データ列を変換するもの

$$\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

（例1）
y:観測データ，A:システムの性質，x:媒介変数
（例2）
y:フーリエ空間での周波数成分，A:フーリエ変換行列，
x:実空間でのデータ系列

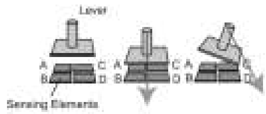
（復習）（例）2軸力センサ

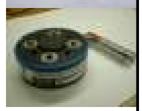


$$F_Z = x_A + x_B$$
$$F_X = k(x_A - x_B)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}}_{\text{2x1ベクトル}}=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & -k \end{bmatrix}}_{\text{2x2行列}}\underbrace{\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}}_{\text{2x1ベクトル}}$$

（復習）（例）多軸力センサ





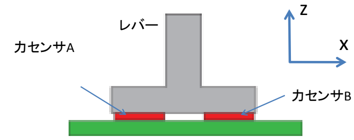
$$F_Z = k_1(x_A + x_B + x_C + x_D)$$
$$F_X = k_2((x_A + x_B) - (x_C + x_D))$$
$$F_Z = k_3((x_A + x_C) - (x_B + x_D))$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_z \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix}}_{3} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2 \\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix}}_{3\text{x}4行列} \underbrace{\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}}_{4}$$

一般には正方行列ではない！！

（例）6軸力センサには8つ以上のセンサエレメント内蔵

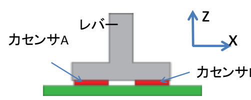
（復習）力センサのキャリブレーション（較正）



$$F_Z = k_1 x_A + k_2 x_B$$
$$F_X = k_3 x_A + k_4 x_B$$
$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

k1～k4のパラメータは元々未知．
これを求めなければ使えない！！

（復習）逆行列



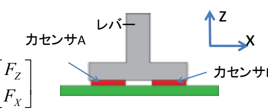
$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

これを $\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ と書く．

ここで，
「ある力を加えたときの各センサ出力は？」
という逆の関係を考える．

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{G}\mathbf{f} \qquad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

（復習）逆行列の測定



$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{f} \qquad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

(1) Fz=1，Fx=0の力を加え，各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

各センサの出力に，逆行列の成分g1，g3が現れる！

(2) Fz=0,Fx=1の力を加え，各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 \\ g_4 \end{bmatrix}$$

各センサの出力に，逆行列の成分g2，g4が現れる！

（復習）逆行列の測定

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} \qquad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

G=A⁻¹の成分，g1～g4が得られたので，
その逆行列を計算すればAが得られる．

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

まとめると，

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 \\ g_4 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} g_1 \\ g_3 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} g_2 \\ g_4 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

行列に単位行列をかけたことに相当

（復習）単位力でなくて良い

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underbrace{\overbrace{\boxed{\begin{matrix} f_{z1} \\ f_{x1} \end{matrix}}}^{1回目の入力}}_{} & \underbrace{\boxed{\begin{matrix} f_{z2} \\ f_{x2} \end{matrix}}}_{2回目の入力} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{\boxed{\begin{matrix} m_1 \\ m_1 \end{matrix}}}^{1回目の出力} & \underbrace{\boxed{\begin{matrix} m_2 \\ m_2 \end{matrix}}}_{2回目の出力} \end{bmatrix}$$

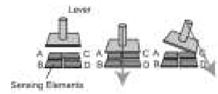
$$\mathbf{G}\mathbf{F} = \mathbf{M}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{M}\mathbf{F}^{-1}$$

1. 2回既知の力ベクトルを加えて，各センサの出力を得る
2. 力ベクトルを並べたものを力行列F，
   センサ出力を並べたものを行列Mとする
3. 力行列の逆行列F⁻¹をMにかければ，行列Gが得られる．
4. **Gの逆行列が望んだ較正行列A**

行列と最小二乗法

本日の疑問



$$3\left\{\begin{bmatrix}F_z\\F_x\\F_y\end{bmatrix}\right. = \underbrace{\begin{bmatrix}k_1 & k_1 & k_1 & k_1\\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2\\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3\end{bmatrix}}_{3x4行列}\left.\begin{bmatrix}x_A\\x_B\\x_C\\x_D\end{bmatrix}\right\}4$$

- 一般には正方行列ではない
- 「逆行列」は定義できず，
キャリブレーションもできないのでは

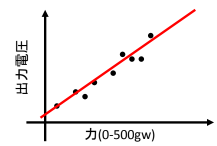
本日の解答

$$3\left\{\begin{bmatrix}F_z\\F_x\\F_y\end{bmatrix}\right. = \underbrace{\begin{bmatrix}k_1 & k_1 & k_1 & k_1\\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2\\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3\end{bmatrix}}_{3x4行列}\left.\begin{bmatrix}x_A\\x_B\\x_C\\x_D\end{bmatrix}\right\}4$$

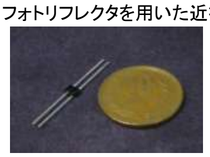
- 逆行列は定義できなくても
擬似逆行列(Pseudo Inverse Matrix)
は定義できる.
- またこれは最小二乗法という，
工学全体を支える基礎的な考えの
もっとも代表的な体現である.

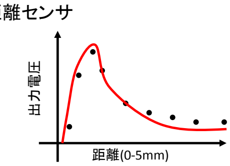
色々なセンサ

フィルム状力センサ



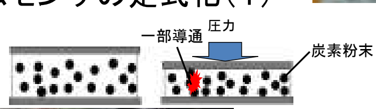
フォトリフレクタを用いた近接距離センサ

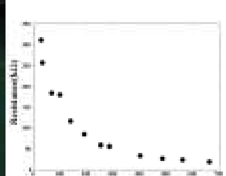




いかにして較正曲線を求め，センサとして使えるようにするか？

フィルムセンサの定式化（1）

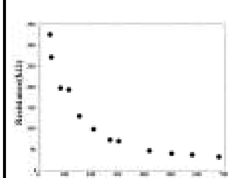


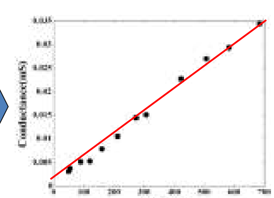


フィルムセンサの抵抗：力に反比例？

フィルムセンサの定式化（2）

抵抗ではなくコンダクタンス(抵抗の逆数)を見る

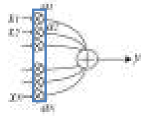




$$y = ax + b \quad \begin{cases} x: \\ y: \\ a, b: \end{cases}$$

実験でなじみ深い「直線フィッティング」

最小二乗法(1)



$y = a_1 x + a_2$　から一般化

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_N x_N$$

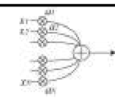
N個の既知入力[$x_1, x_2, \cdots x_N$]と
N個の未知パラメータ[$a_1, a_2, \cdots a_N$]の
積和によって1個の出力 y が決定されるシステム.

目的:N個の未知パラメータ[$a_1, a_2, \cdots a_N$]の同定(identification)
取れる手段:入力の操作と出力の計測

フィルムセンサの場合: $y = a_1 x_1 + a_2 x_2$　where　$x_2 = 1$

19

最小二乗法(2)



$$\boxed{y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_N x_N}$$

入力を変化させ，M回の出力を得る

$$y_1 = a_1 x_{11} + a_2 x_{12} + \cdots a_N x_{1N}$$
$$y_2 = a_1 x_{21} + a_2 x_{22} + \cdots a_N x_{2N}$$
$$\vdots$$
$$y_M = a_1 x_{M1} + a_2 x_{M2} + \cdots a_N x_{MN}$$

結局

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a}$$

X : MxN行列．入力．既知
y : Mx1ベクトル．出力．観測可能
a : Nx1ベクトル．未知.

もしM=Nなら　$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{y}$

実際にはM≠NでX-1は存在しないことがほとんど

20

最小二乗法(3)

いかにして
$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a}$
をaについて解くか.

X : MxN行列．入力．既知
y : Mx1ベクトル．出力．観測可能
a : Nx1ベクトル．未知.

解けない(未知数より方程式の数が多い)
つまり，式を完全に満たすベクトルaは，無い

(1)測定された出力ベクトルyが誤差を含んでいると仮定
$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{e}$　where　$\mathbf{e} = [e_1, e_2, \cdots e_M]^T$

(2)誤差の大きさが最小となるようなxを
もっともらしいxとして受け入れよう.

(3)大きさとして二乗和(二乗ノルム)を採用.

$$\sum_{i=1}^{M} e_i^{\,2} = [e_1, e_2, \cdots e_M][e_1, e_2, \cdots e_M]^T = \mathbf{e}^* \mathbf{e}$$

21

誤差の「大きさ」

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{e}$$
$$\mathbf{e} =$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_M \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}$$　Tは転置.

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \sum_{i=1}^{M} e_i^{\,2} = [e_1, e_2, \cdots e_M] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_M \end{bmatrix} = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}$$

$=$
$=$
$=$
$=$

22

誤差の「大きさ」を最小化する

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} - 2\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{a}$$

誤差の大きさが最小となるaを見つける

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}}\|\mathbf{e}\|^2 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}}\left(\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} - 2\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{a}\right)$$
$=$
$=$
$= 0$

$\mathbf{a}^{\mathrm{T}} =$
$\mathbf{a} =$

$$\|\mathbf{e}\|^2 = a^2 x^2 - 2ayx + y^2$$

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \frac{\partial}{\partial a}\left(a^2 x^2 - 2ayx + y^2\right)$$
$$= 2x^2 a - 2yx$$
$$= 0$$

$$x^2 a = yx$$
$$a = y / x$$

$$\because \left((\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left((\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}$$

23

擬似逆行列

結論:未知パラメータのベクトルaは次の式で求められる.

$$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{\#}\mathbf{y}$$

ただし

$$\mathbf{X}^{\#} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$$

$\mathbf{X}^{\#}$:擬似逆行列(Pseudo Inverse)

24

擬似逆行列は逆行列の拡張である

行列Xが正則な場合

$$\mathbf{X}^{\#} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$$

$$=$$

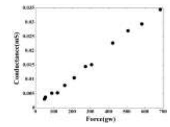
$$=$$

25

（再考）フィルムセンサの場合

$$y = a_1 x + a_2$$

x：力：既知入力
y：コンダクタンス，測定結果
a_1, a_2：未知パラメータ



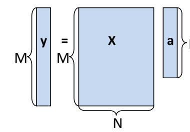
これは

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 \quad \text{where} \quad x_2 = 1$$

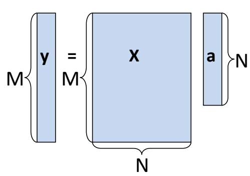
とみなせる．

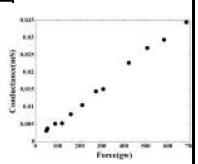
加える力を変え，M回測定する（2回以上）

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1 x_{11} + a_2 1 \\ y_2 &= a_1 x_{21} + a_2 1 \\ &\vdots \\ y_M &= a_1 x_{M1} + a_2 1 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & 1 \\ x_{21} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{M1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$



（再考）フィルムセンサの場合





よって，

$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{\#}\mathbf{y}$ where $\mathbf{X}^{\#} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$

により二つの未知パラメータを求めることが出来る．

27

手作業で求めてみる

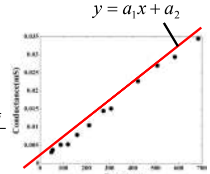
$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{X}^{\#}\mathbf{y} \\ &= (\mathbf{X}^{T}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{T}\mathbf{y} \\ &= \left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_M \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_M & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_M \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

28

手作業で求めてみる

$$a_1 = \frac{M\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_j}{M\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

$$a_2 = \frac{-\sum x_i \sum x_j y_j + \sum x_i^2 \sum y_j}{M\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$



これは，直線によるフィッティングの公式に他ならない

29

何を最小化したか

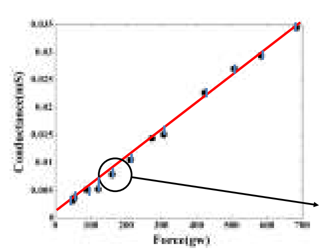
$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{e}$$

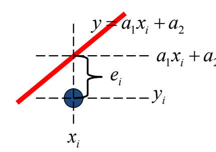
$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{a}$$

$$\boxed{\|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{e}^{*}\mathbf{e} = \sum_{i=1}^{M} e_i^{\,2}}$$

$$y_i = a_1 x_i + a_2 + e_i$$

$$e_i = y_i - a_1 x_i - a_2$$



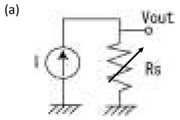


データと直線の，
「y軸に沿った距離」の二乗の和を最小化した．

30

（参考）実際の測定回路

- 「抵抗」を測定するなら

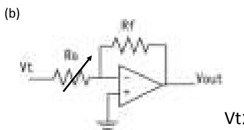


I：定電流源
Vout:出力

Vout = I x Rs

出力電圧は抵抗に比例

- 「コンダクタンス（抵抗の逆数）」を測定するなら



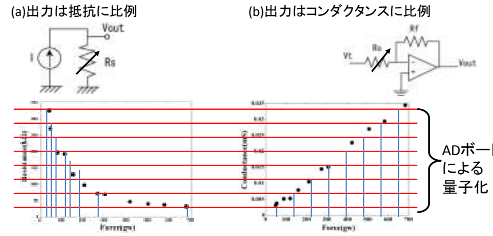
Vt:定電圧源
Rs：フィルムセンサの抵抗
Rf:調整用固定抵抗
これは「反転増幅回路」
Vout = Rf/Rs x Vt

Vtが一定なら出力電圧は抵抗に反比例

「抵抗」を測定して逆数をとればよいのでは？

別にそれでもよい．しかし玄人な理由はある．

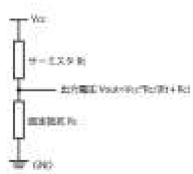
(a)出力は抵抗に比例　　(b)出力はコンダクタンスに比例



- アナログ部による線形化の意義
  ＝ADボードによる量子化の影響を低減
  「ダイナミックレンジを広げる」とも言う．

（参考２）実際の測定のための回路設計

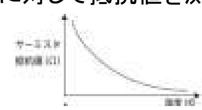
（１）例えば温度を測定したいと考える
（２）「サーミスタ」を使えばよいことが分かる．
（３）サーミスタはやはり温度に反比例（正確には違う）な感じで抵抗値が下がるので，逆数に近い電圧が出る回路を考える．



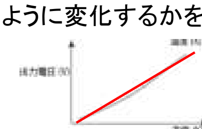
ではこの固定抵抗はどのように決めたらよいのか？

（参考２）実際の測定のための回路設計

（４）温度変化に対して抵抗値を測定する



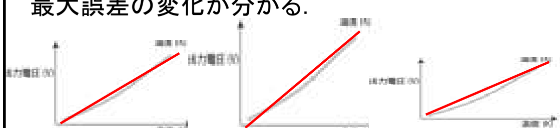
（５）固定抵抗が例えば10kΩで電源が5Vの時，出力電圧がどのように変化するかをシミュレートする．

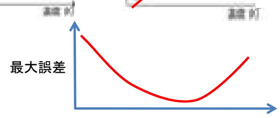


（６）直線フィッティングで生じる最大の誤差を求める
この誤差が，測定システムの「性能」になる．

（参考２）実際の測定のための回路設計

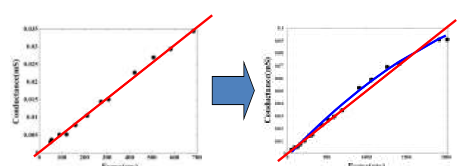
（７）固定抵抗を色々変えた場合をシミュレートすると，最大誤差の変化が分かる．





（８）最大誤差が最小になる値が求める固定抵抗値

フィルムセンサを限界性能まで使いきりたい．



直線近似 $y = a_1 x + a_2$ ではフィッティングできない気が．．．
（直線領域だけで使う，という方針も正しい）

多項式によるフィッティングを試みる．

$y = a_1 x + a_2$ ➡ $y = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$
$y = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$

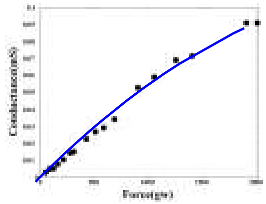
もはや直線フィッティングの公式は使えない．

多項式近似

$$y = a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \begin{cases} x: \text{力:既知入力} \\ y: \text{コンダクタンス. 測定出力} \\ a1, a2, a3: \text{未知パラメータ} \end{cases}$$

何度も測定する

$$y_1 = a_1 x_1{}^2 + a_2 x_1 + a_3$$
$$y_2 = a_1 x_2{}^2 + a_2 x_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$y_M = a_1 x_M{}^2 + a_2 x_M + a_3$$

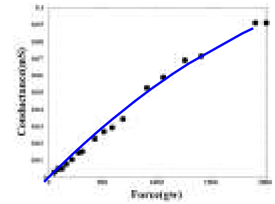


37

多項式近似

$$y_1 = a_1 x_1{}^2 + a_2 x_1 + a_3$$
$$y_2 = a_1 x_2{}^2 + a_2 x_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$y_M = a_1 x_M{}^2 + a_2 x_M + a_3$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1{}^2 & x_1 & 1 \\ x_2{}^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_M{}^2 & x_M & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$



$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a}$ の形に出来たので,

$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{\#}\mathbf{y}$ where $\mathbf{X}^{\#} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$

により3つの未知パラメータを求めることが出来る. (計算機のしごと)

38

我に返って. . . 何をしたかったか

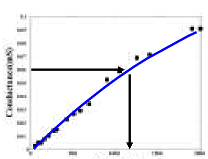
(1) $y = a_1 x + a_2$

(2) $y = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$

(3) $y = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$

x: 力:既知の入力
y: コンダクタンス. 測定した出力
$a1, \ldots, a4$: 未知パラメータ

モデルの未知パラメータを求めるのがゴールではない.
測定出力yから力xを逆算することがゴール.



(1) $x = (y - a_2)/a_1$

(2) $a_1 x^2 + a_2 x + (a_3 - y) = 0$

$$x = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2{}^2 - 4a_1(a_3 - y)}}{2a_1}$$

(3) $a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + (a_4 - y) = 0$

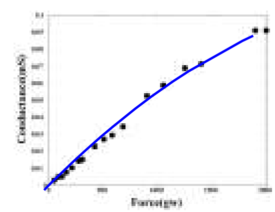
$x = \cdots$ (3次方程式の解の公式)

39

係数は別に整数でなくて良い

$$y_1 = a_1 x_1{}^{1/2} + a_2$$
$$y_2 = a_1 x_2{}^{1/2} + a_2$$
$$\vdots$$
$$y_M = a_1 x_M{}^{1/2} + a_M$$

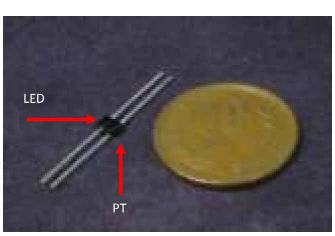
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1{}^{1/2} & 1 \\ x_2{}^{1/2} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_M{}^{1/2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

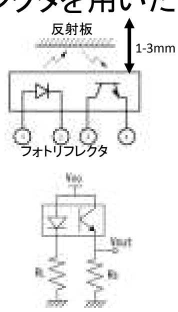


関数であっても良い. たとえばlog(x)など.

40

(ケーススタディ)フォトリフレクタを用いた近接距離計の較正

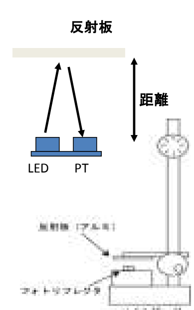


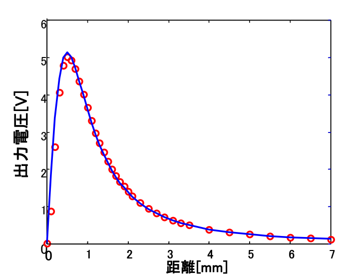


41

出力電圧は反射光量に比例.
出力電圧から反射板との距離を得たい.

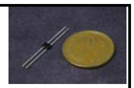
測定

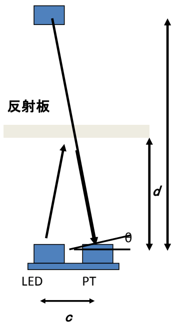




いかにして較正曲線を求め, センサとして使えるようにするか？42

モデル化（1）





反射板を鏡面とみなし，LEDの“像”からPTへの光路を考える．

LEDを点光源とすると，PTの受光量はLED像からみたPTの立体角Ωに比例．

LED像とPTの距離：

$$l=\sqrt{c^2+(2d)^2}$$

PTの立体角：

$$\Omega=\frac{\cos\theta}{l^2}\Delta S \qquad \Delta S\text{：PTの表面積}$$

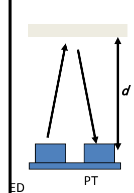
$$\cdots=\frac{k_1 d}{(d^2+k_2)^{3/2}} \qquad k_1,k_2\text{：定数}$$

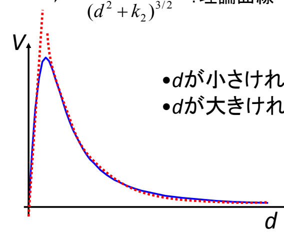
43

モデル化（2）

PTの受光量が立体角Ωに比例するから，出力電圧も同様．

$$V=\frac{k_1 d}{(d^2+k_2)^{3/2}} \quad \text{：理論曲線}$$





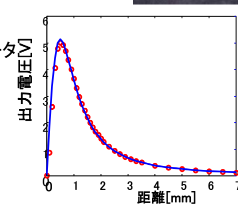
- dが小さければVはdに比例
- dが大きければ$1/d^2$に比例

未知パラメータk_1, k_2を求めれば
入出力関係が記述できる

44

フィッティングの準備

$$V=\frac{k_1 d}{(d^2+k_2)^{3/2}} \quad \begin{cases} d\text{：入力(距離)} \\ V\text{：出力(電圧)} \\ k_1,k_2\text{：未知パラメータ} \end{cases}$$



変形（線形化）

$$V^{2/3}(d^2+k_2)=k_1^{2/3}d^{2/3}$$

$$V^{2/3}d^2=k_1^{2/3}d^{2/3}-V^{2/3}k_2$$

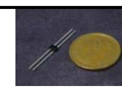
$$\left.\begin{array}{l} V^{2/3}d^2=y \\ k_1^{2/3}=a_1 \\ d^{2/3}=x_1 \\ -V^{2/3}=x_2 \\ k_2=a_2 \end{array}\right\} \text{と置けば}$$

$$y=a_1x_1+a_2x_2$$

$\begin{cases} x_1,x_2,y\text{：既知} \\ a_1,a_2\text{：未知} \end{cases}$ 最小二乗法によって
パラメータを同定できる．

45

多数の測定から，



$$\begin{array}{l} y_1=a_1x_{11}+a_2x_{12} \\ y_2=a_1x_{21}+a_2x_{22} \\ \quad\vdots \\ y_M=a_1x_{M1}+a_2x_{M2} \end{array} \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots \\ x_{M1} & x_{M2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{y}=\mathbf{X}\mathbf{a}$ の形なので，

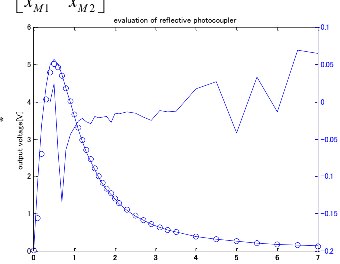
$$\mathbf{a}=\mathbf{X}^{\#}\mathbf{y}$$

where $\mathbf{X}^{\#}=(\mathbf{X}^{*}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{*}$

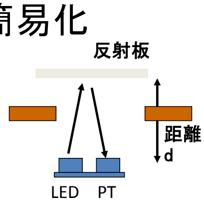
によってaを求める．
最後に

$$k_1^{2/3}=a_1, k_2=a_2$$

からk_1, k_2を得る．

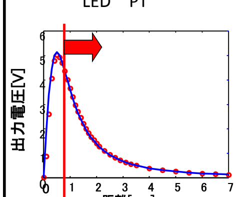


簡易化



出力電圧から距離に変換する際
- 2値性がある
- 3次方程式の根を得る必要がある

（$V=\frac{k_1 d}{(d^2+k_2)^{3/2}}$ の変形から）



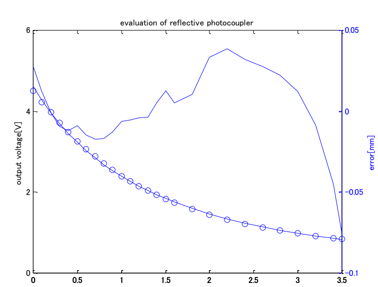
ストッパーを設ける．
距離が離れるのでモデルの簡易化可能

$$V=\frac{k_1}{(d+k_2)^2}$$

同じように$y=a_1x_1+a_2x_2$ の形に変形

47

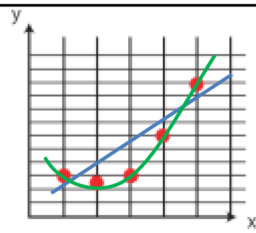
簡易化（結果）



48

レポート課題(1)

次のデータ系列に対して,
Scilabを用いて,
(1) 直線による近似,
(2) 2次曲線による近似を適用,
パラメータを求め,
曲線とデータをグラフに描け



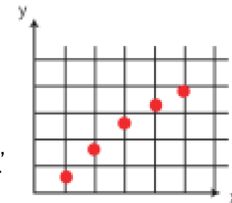
x	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
y	3.0	2.5	3.0	6.0	10.0

なおScilabでは行列Aの擬似逆行列はpinv(A)で直接求めることができる.
当然自分でinv(A'*A)*A'とやっても同じ.

49

レポート課題(2)

次のデータ系列に対して,
y=a1 * log(x) + a2
を仮定してパラメータを求め,
曲線とデータをグラフに描け
(やや難？)



x	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
y	0.5	1.9	2.7	3.3	3.7

50