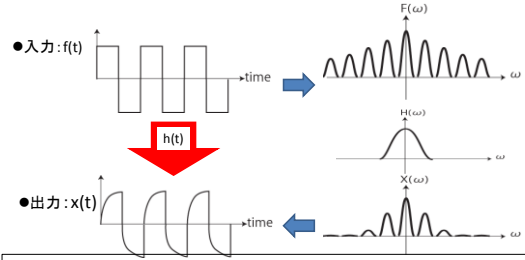


# 認識行動システム論 第6回

梶本裕之  
Twitter ID kajimoto  
ハッシュタグ #ninshiki

## (復習) 周波数領域ではなく、 時間領域のまま議論できないか？



$X(\omega) = H(\omega) \times F(\omega)$ : 周波数領域で美しいのは分った。  
時間的な現象として何が起きているのか分からない。

## (復習) 式で考えよう

フーリエ変換  $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$   
逆フーリエ変換  $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$

$X(\omega) = H(\omega) \times F(\omega)$

両辺を逆フーリエ変換すれば時間領域の信号に戻る。

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau \right) \exp(j\omega t) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left( \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \exp(j\omega(t-\tau)) d\omega \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

## 逆順の計算もしておく(ふつうはこちら)

フーリエ変換  $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$   
逆フーリエ変換  $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$

両辺をフーリエ変換。

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega t) dt \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega(\tau + (t-\tau))) dt \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega\tau) \cdot \exp(-j\omega(t-\tau)) dt \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \exp(-j\omega(t-\tau)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(t') \exp(-j\omega t') dt' \\ &= F(\omega) H(\omega) \end{aligned}$$

## (復習) コンボリューション定理

$X(\omega) = F(\omega)H(\omega) = H(\omega)F(\omega)$

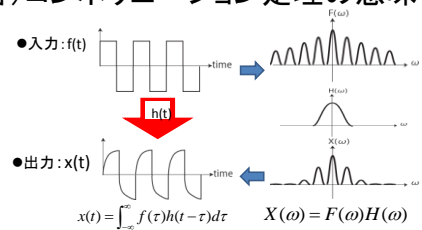


$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t-\tau) d\tau$

簡略化のため次のようにも表記される

$x(t) = f(t) * h(t) = h(t) * f(t)$

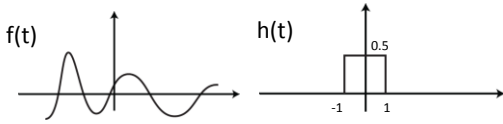
## (復習) コンボリューション定理の意味(1)



•  $h(t)$ のフーリエ変換が $H(\omega)$ であるとする。  
• 周波数領域でフィルタ $H(\omega)$ をかけることは、  
時間領域では、入力信号 $x(t)$ に対する関数 $h(t)$ の量み込み積分  
(コンボリューション)として表現される。

(復習)コンボリューション定理の意味(2)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau$$



例えば,  $h(t)=0.5$  ( $-1 < t < 1$ )なら,

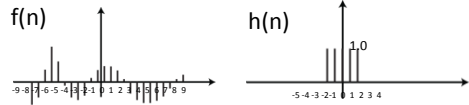
$$x(t) = \int_{-1}^1 0.5f(t-\tau)d\tau$$

これは,  $f(t)$ を平均化していくフィルタ

(復習)離散化による理解

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau \rightarrow x(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)f(n-i)$$

$$x(n) = \dots + h(-4)f(n+4) + h(-3)f(n+3) + \dots + h(3)f(n-3) + h(4)f(n-4) + \dots$$



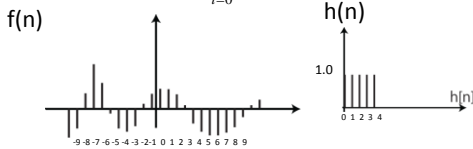
$h(n)$ が,  $n=-2 \sim 2$ の間だけ1の場合,

$$x(n) = f(n+2) + f(n+1) + f(n) + f(n-1) + f(n-2)$$

- この場合, 出力 $x$ は, 入力 $f$ の「平均化」になっている.
- つまりこの場合,  $h$ は平滑化フィルタである.

(復習)FIRフィルタ

$$x(n) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)f(n-i)$$

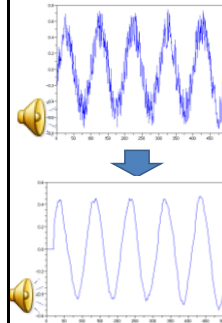


$i=0$ から始める: 未来のデータが使えないことを意味する.  
この例は, 元データ $f(n)$ を, 4個平均して出力する.

- 未来のデータが使えない例: リアルタイム制御
- 先のデータが使える例: 画像処理

(復習)平滑化フィルタの実例

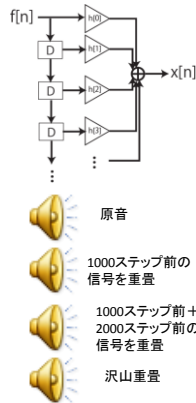
メモリを20個持ったFIRフィルタによって平滑化



```
Scilabコード例
time = [0:0.01:100];
//振幅0.5の正弦波に最大振幅0.5のノイズが混入した信号
wave=0.5*sin(time*2*pi) + 0.5*(rand(time)-0.5);
out=zeros(wave);
//20個を平均する.
for n=20:length(wave),
    for i=0:19,
        out(n)=out(n)+wave(n-i)/20;
    end
end
playsnd(out);
savewave('wave.wav',out);
plot(out(1:500));
```

(復習)エコー

エコー=時間遅れ信号の重畳.  
これはFIRフィルタで実装できる.



```
Scilabコード例
wave = loadwave('aiueo.wav');
out=zeros(wave);
//エコー(1000ステップ前の信号を重畳)
for n=1000:length(wave),
    out(n)=wave(n)+0.9*wave(n-999);
end
playsnd(out,11000); //11kHzサンプリングで再生
savewave('wave.wav',out,[11000]);
```

エコーは害



## ゴースト現象



# 相互相関関数 自己相関関数

## エコーキャンセル(テレビだとゴーストリダクション)

FIRフィルタによってエコーの影響を低減することができる。

考え方:

(1) エコー成分のモデルを推定

$$\text{out}(n) = \text{wave}(n) + 0.5 * \text{wave}(n-100);$$

「100ステップ前の信号が0.5のゲインで重畳されている!」

(2) そのモデルに基づき、エコー成分と逆のゲインをかける

$$\begin{aligned} \text{out}(n) - 0.5 * \text{out}(n-100) \\ = \text{wave}(n) + \text{wave}(n-100) - 0.5 * (\text{wave}(n-100) + 0.5 * \text{wave}(n-200)) \\ = \text{wave}(n) + 0.25 * \text{wave}(n-200) \end{aligned}$$

⇒ エコーが半分に低減!

(3) 当然もっと工夫すれば... (もっとメモリがあれば)

$$\begin{aligned} \text{out}(n) - 0.5 * \text{out}(n-100) - 0.25 * \text{wave}(n-200) \\ = \dots = \text{wave}(n) + 0.125 * \text{wave}(n-300) \end{aligned}$$

⇒ 無限にメモリがあれば完璧に消せる。

## エコーキャンセルの課題

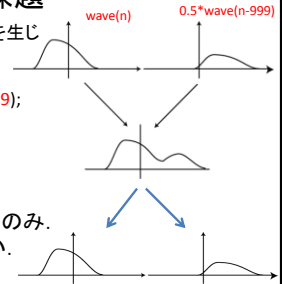
エコー成分が、どれだけ時間遅れを生じてやってくるかの**モデルを推定**

$$\text{out}(n) = \text{wave}(n) + 0.5 * \text{wave}(n-999);$$

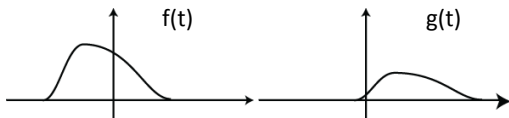
<問題>

観測できるのは、  
エコーの「結果」としてのout(n)のみ。  
元の信号はわかっていない。

この信号からどのように、  
モデルを推定するのか?



## より簡単な問題から考えよう



二つの信号が、

- 時間的にどれだけずれているのか
- 時間のずれを無視したらどれだけ似ているのかを測定したい。

## (復習)ベクトル空間と内積

ベクトル  $\mathbf{a} = [a_x, a_y]$  のx成分は? ...  $a_x$

これはベクトル  $\mathbf{a}$  とベクトル  $\mathbf{x} = [1, 0]$  との内積である。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = [a_x, a_y] \cdot [1, 0] = a_x$$

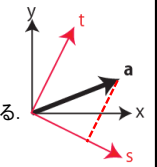
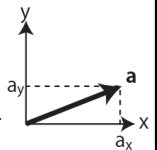
回転した座標軸,  $s, t$  を考える。

ベクトル  $\mathbf{a} = [a_x, a_y]$  の,  $s$  成分は?

これはベクトル  $\mathbf{a}$  とベクトル  $\mathbf{s} = [s_x, s_y]$  との内積である。

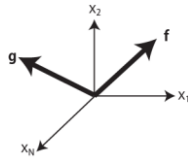
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{s} = [a_x, a_y] \cdot [s_x, s_y]$$

内積は、あるベクトルが別のベクトルの成分をどれだけ持つかを表す



(復習) N次元空間では

N次元空間で、二つのベクトル  
 $f=[f_1, f_2, \dots, f_N], g=[g_1, g_2, \dots, g_N]$  を考える。



内積  $f \cdot g$  は、ベクトル  $f$  の、 $g$  軸成分(または逆)を表す。

$$= [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_N] \cdot [g_1 \ g_2 \ \dots \ g_N]$$

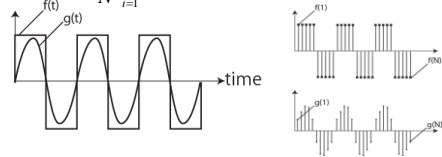
$$= \sum_{i=1}^N f_i g_i$$

(復習) 波形  $f$  に波形  $g$  はどれだけ含まれるか

波形  $f$  中の、波形  $g$  の成分

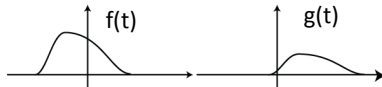
$$= \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t)dt \quad (\text{連続関数})$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(i)g(i) \quad (\text{離散化して考えた場合})$$



これは二つの波をベクトルと考えた時の内積に他ならない  
 ※内積を連続関数に対して定義

相互相関

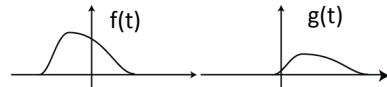


<問題>  
 二つの信号が、  
 ●時間的にどれだけずれているのか  
 ●時間のずれを無視したらどれだけ似ているのか  
 を測定したい。

内積を思い出せば、  
 次の手順で測定すればよいことがわかる

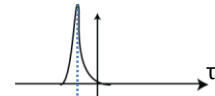
- $g(t)$  を  $\tau$  だけずらしてみる  $\Rightarrow$
- $f(t)$  との内積を取ってみる  $\Rightarrow$
- $\tau$  を変化させていく。

相互相関



$R_{fg}(\tau)$ : 二つの関数  $f(t), g(t)$  の、相互相関関数

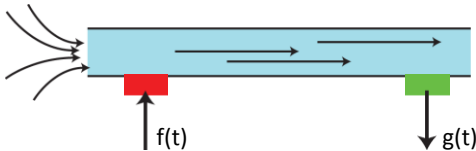
$$R_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t+\tau)dt$$



$R_{fg}(\tau)$  が最大の値をとる  $\tau =$  元の関数  $f(t)$  と  $g(t)$  のズレ  
 (ただし直流成分を取り除いた後)

相互相関の応用: 速度計測

管内の流速を正確に測定したい  
 ただし、管の中に接触してはいけない(液漏れ厳禁)

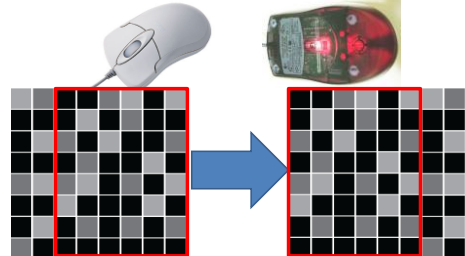


上流に熱源を置き、 $f(t)$  でランダムに変動させる。  
 下流で温度を測定する。  $g(t)$

$f(t)$  と  $g(t)$  の相互相関関数が最大となる時間差  $\tau$  が、  
 水流によって熱が移動するのに要する時間である。

相互相関の応用: 速度計測

光学式マウスの中身 = 16x16 pixel の CMOSカメラ

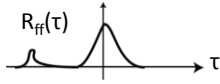


二つの画像 (= 2次元関数) 同士の相互相関を取ることで  
 移動量を計測する。自動車 の速度計測等にも利用。

### 自己相関

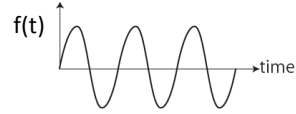
二つの関数  $f(t)$ ,  $g(t)$  の代わりに、  
ひとつの関数  $f(t)$  の相関を取る。

$$R_{ff}(\tau) = \text{[ ]}$$

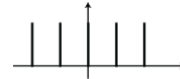


自己相関関数は、  
「どれだけずれたら自分自身に近い形になるか」  
を表す。  
すなわち、**エコー**を発見していることに他ならない。

### 周期関数の自己相関

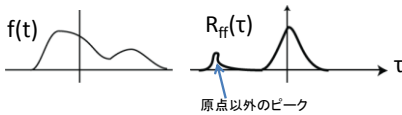


$$R_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t+\tau)dt$$



周期関数の自己相関関数は沢山のピークが出る

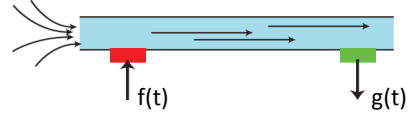
### 自己相関まとめ



$R_{ff}(\tau)$ : 自分自身を  $\tau$  ずらしたら、自分自身にどれだけ似ているか

- 当然、 $\tau=0$  で最大値を取る。
- $\tau \neq 0$  で大きな値をとった場合、その信号には  $\tau$  の時間遅れ (エコー) 成分が含まれている。
- 信号に潜む周期性を発見することもできる

### 白色雑音 (ホワイトノイズ) と自己相関

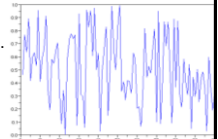


元の信号  $f(t)$  に「周期性」があったら、 $f(t)$  と  $g(t)$  の相互相関は沢山の「ニセのピーク」が出てしまう。

元の入力  $f(t)$  はなるべく「でたらめ」であることが望ましい  $\Rightarrow$  白色雑音

< 白色雑音の定義 >

1. あらゆる周波数成分が均等に含まれる。
2. 自己相関関数が  $\tau=0$  以外では全て 0 ( = エコー成分、周期性を全く持たない )



### 自己相関とパワースペクトル

自己相関関数をフーリエ変換してみる。

$$R_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t+\tau)dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t+\tau)dt \right] e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$= \text{[ ]}$$

$$= \text{[ ]}$$

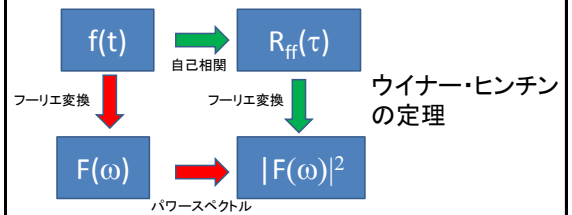
$$= \text{[ ]}$$

### 自己相関とパワースペクトル

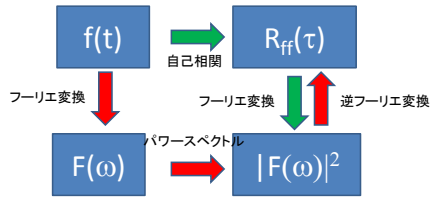
$$= \text{[ ]}$$

$$= \text{[ ]}$$

$$= \|F(\omega)\|^2$$



## 自己相関とパワースペクトル



自己相関は  
フーリエ変換⇒パワースペクトル⇒逆フーリエ変換  
によって間接的に計算できる

- 自己相関を直接計算した時の計算量:  $O(n^2)$
- フーリエ変換(FFT)を使った時の計算量:  $O(n \log(n))$   
この方が計算が早いので多用される。

## レポート課題1: 自己相関

(1) 適当なwaveファイルに対してエコーを掛けてカラオケのようにする。(前回のレポート)

(2) その結果に対して定義通りの方法で自己相関関数を計算し、確かにエコー分の遅れのところでピークが出ることを確認する(エコーの検出)。

(3) ウィナー・ヒンチンの定理を用い、パワースペクトルの逆フーリエ変換によって同じ結果が出ることを確認する

(2)(3)のScilabソースファイルおよび結果のグラフ画像の添付: waveファイルは添付不要。(2)(3)の処理にかかった時間についてコメントせよ

## レポート課題: ヒント

(1) 適当なwaveファイルに対してエコーを掛けてカラオケのようにする。(前回のレポート)

```
//waveファイルのロード
wave = loadwave('●●●.wav');

//1000ステップごとのエコーを10回重ねる例
out=[];
for i=0:9,
    out=out+[zeros(1,1000*i), wave, [zeros(1,9000-1000*i)]];
end
```

## レポート課題: ヒント

(2) その結果に対して定義通りの方法で自己相関関数を計算し、確かにエコー分の遅れのところでピークが出ることを確認する(エコーの検出)。

```
time=length(out);
auto_correlation=zeros(1,time);

for tau=1:time,
    auto_correlation(tau) = [ ];
end

plot(auto_correlation);
```

自己相関の定義式から、[zeros(1,tau), out] と [out, zeros(1,tau)] の内積を取れば良い。(ベクトルの内積はどう書き表せるか?)

## レポート課題: ヒント

(3) ウィナー・ヒンチンの定理を用い、パワースペクトルの逆フーリエ変換によって同じ結果が出ることを確認する

```
//フーリエ変換
fourier = [ ]; //過去のレポート課題を参照
//パワースペクトル
power_spec = [ ]; //過去のレポート課題を参照
//自己相関
auto_correlation = [ ]; //逆フーリエ変換

plot(auto_correlation);
```

※(参考) (2)(3)の結果の微妙な違いは、(3)が**信号の無限繰り返しを仮定している**ために生じる。逆に(2)もそう仮定すれば(3)と全く同じ結果が得られる

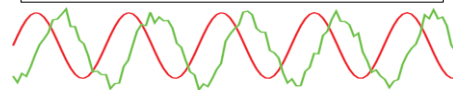
## (発展トピック) 相互相関と検波

$$R_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t+\tau)dt$$

$R_{fg}(\tau)$ が最大の値をとる $\tau$   
=元の関数 $f(t)$ と $g(t)$ のズレ  
(ただし直流成分を取り除いた後)

実用上重要なケースの一つ:

- $f(t)$ が正弦波(入力)で、
- $g(t)$ がノイズが入って位相が遅れた正弦波(出力)



### 正弦波入出力の例(1)

フィルタ回路: 入力 $u(t)$ , 出力 $x(t)$   
 電子回路, アンテナ, ロボットアーム, etc  
 フィルタ特性を実測で求める場合  
 ●  $u(t)=\sin(\omega t)$ を**入力**し,  
 ● **出力**を観察する.  
 $\omega$ を変化させることでフィルタ特性を得る.

### 正弦波入出力の例(1)

ファンクションジェネレータ      オシロスコープ

### 正弦波入出力の例(2)

オプティカルフローの速度  
 重心動揺

### 入力と出力の位相差, 振幅比を求める

入力波形  
 出力波形  
 位相遅れ    この程度なら, 振幅と位相は目視できる

でもたいていこういう残念な感じ, ノイズがひどい  
 ⇒ 振幅と位相を, どうやって求めたら良い?  
 方法1: バンドパスフィルタを使う  
 方法2: 相関関数を考える

### 正弦波による相互相関

● 出力信号 $f(t)$ : ノイズだらけの正弦波. 位相不明. 周波数は既知.  
 ● 入力信号 $g(t)$ : 周波数固定の正弦波

$g(t)$ を動かしていき, ピタリと重なるところを見つければ良い  
 ⇒ 相互相関の計算にほかならない.

$$R_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t+\tau)dt$$

### 正弦波による相互相関

$$R_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t+\tau)dt$$

正弦波 $g(t)$ を動かす

$$R_{fg}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t+\tau)dt$$

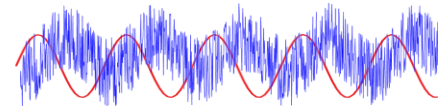
$$= \frac{1}{T} \int_0^T \dots dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \dots dt$$

$$= \dots$$

つまり正弦波の場合, 積分の計算は2回やるだけでよい!!

### 直交検波



$$R_{fs}(\tau) = \cos(\omega\tau) \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega t) dt + \sin(\omega\tau) \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega t) dt$$

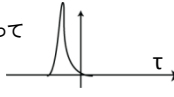
積分結果をS,Cと書いて

$$R_{fs}(\tau) = S \cos(\omega\tau) + C \sin(\omega\tau)$$

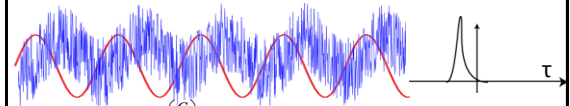
これが最大の値をとる場所τは、微分をとって

$$\frac{dR_{fs}(\tau)}{d\tau} = \text{[ ]} = 0$$

⇒ 位相遅れτが求まった



### 直交検波



$$\therefore \arctan\left(\frac{C}{S}\right) = \omega\tau \Rightarrow \text{位相遅れ}\tau\text{が求まった}$$

このときの相関値は、

$$R_{fs}(\tau) = S \cos(\omega\tau) + C \sin(\omega\tau)$$

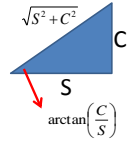
$$= S \cos(\text{[ ]}) + C \sin(\text{[ ]})$$

$$= S \text{[ ]} + C \text{[ ]}$$

$$= \text{[ ]}$$

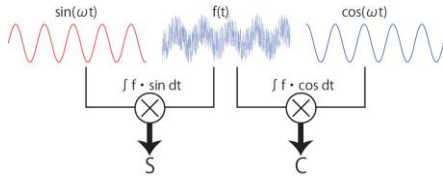
$$= \text{[ ]}$$

⇒ 振幅に相当する量

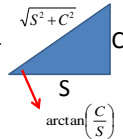


### 直交検波まとめ

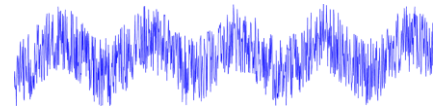
周波数ωがわかっているノイズだらけの信号f(t)があったとき、振幅と位相は次のように計算できる。



- (1) sin(ωt)とcos(ωt)との内積をとり、S、Cとおく。
- (2) 位相遅れはarctan(C/S)となる。
- (3) 振幅は√(S²+C²)に比例する。



### 直交検波: もっと数式で理解する



問題を定式化

信号f(t)が、

$$f(t) = \text{[ ]}$$

と仮定できるとする。周波数ωはわかっている。

計測データから、振幅Aと、位相ずれφを求めるには？

### 直交検波: さらに数式で理解する

信号にsin(ωt)をかけ、積分する(=内積をとる)  
積分時間Tは充分長い。

$$S = \frac{1}{T} \int_0^T (A \sin(\omega t + \phi) + \text{noise}(t)) \sin(\omega t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \text{[ ]} + \int_0^T \text{[ ]}$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \text{[ ]}$$

$$= \text{[ ]}$$

$$= \text{[ ]}$$

$$= \text{[ ]}$$

### 直交検波: さらに数式で理解する

信号にcos(ωt)をかけ、積分する(=内積をとる)  
積分時間Tは充分長い。

$$C = \frac{1}{T} \int_0^T (A \sin(\omega t + \phi) + \text{noise}(t)) \cos(\omega t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T A \sin(\omega t + \phi) \cos(\omega t) dt + \int_0^T \text{noise}(t) \cos(\omega t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T A (\sin(\omega t) \cos(\phi) + \cos(\omega t) \sin(\phi)) \cos(\omega t) dt$$

$$= A \cos(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt + A \sin(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt$$

$$= A \sin(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} dt$$

$$= \text{[ ]}$$



## 直交検波:さらに数式で理解する

$$S = \frac{A}{2} \cos(\phi) \quad C = \frac{A}{2} \sin(\phi)$$

この二つの結果から、

位相差

$$\frac{C}{S} =$$

$$\phi =$$

振幅

$$S^2 + C^2 = \frac{A^2}{4} (\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi))$$

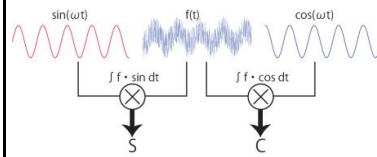
$$=$$

$$A =$$

位相差と振幅が求まった

## (参考)AMラジオの同期検波

ラジオの信号は、典型的な  
「周波数 $\omega$ がわかっているノイズだらけの信号 $f(t)$ 」



復調方式の一つ:「同期検波」

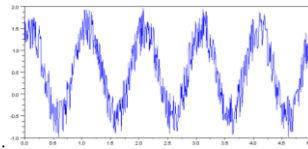
直交検波をリアルタイムに行い、**ノイズに隠れた真の信号**を得る。

今ではPC上で計算可能(ソフトウェア無線技術)

## レポート課題2:ノイズ入り正弦波の位相を調べる

次のScilabソースで表されるノイズ入り正弦波の位相遅れを求め、妥当性をコメントせよ。

```
//ノイズ入り正弦波
t=[0:0.01:5];//時刻
f=1.0; //周波数
amp=0.5; //振幅
phi=0.3*pi; //位相遅れ
y=sin(2*pi*f*t+phi) + rand(t);
plot(t,y);
```



```
S =  //yとsinの内積
C =  //yとcosの内積
ans_phi=atan(C,S) //検出された位相遅れ
```