

インタラクティブシステム論 第8回

梶本裕之

Twitter ID kajimoto

ハッシュタグ #ninshiki

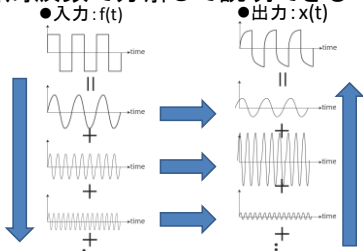
日程

- 4/10 インタラクティブシステム入門
- 4/17 Scilab入門
- 4/24 フーリエ変換
- 5/1 出張
- 5/8 フーリエ変換と線形システム
- 5/15 出張
- 5/22 信号処理の基礎
- 5/29 出張
- 6/5 信号処理応用1(相関)
- 6/12 信号処理応用2(画像処理)
- 6/19 ラプラス変換
- 6/26 中間確認レポート
- 7/3 古典制御の基礎
- 7/10 行列
- 7/17 行列と最小二乗法
- 7/24 ロボティクス
- 8/2~8 期末テスト

7/17のみ講義室が
A201教室に変更

(復習:フーリエ級数展開)

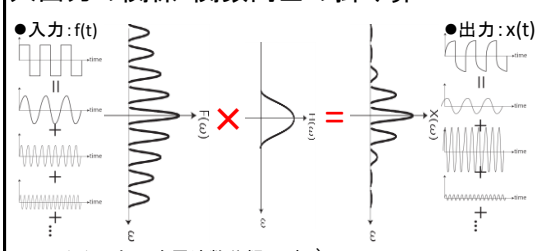
歪みを周波数で分解して説明できる



- (1) 入力 $f(t)$ を周波数分解する
 - (2) 周波数ごとの出力の振幅と位相を求める。
 - (3) 合計すると出力が得られる。
- これを連続関数で考えるとどうなるか？

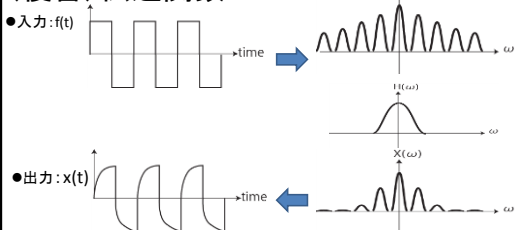
(復習:フーリエ変換)

入出力の関係: 関数同士の掛け算



- (1) 入力 $f(t)$ を周波数分解 $\Rightarrow F(\omega)$
- (2) 周波数ごとにどれだけ振幅と位相が変わるか: $H(\omega)$
- (3) 出力 (のフーリエ変換): $X(\omega) = H(\omega) * F(\omega)$
- (4) 逆フーリエ変換すると出力が得られる: $x(t)$

(復習) 伝達関数



フーリエ空間では、入出力は単なる掛け算で表される。
 $X(\omega) = H(\omega) \times F(\omega)$

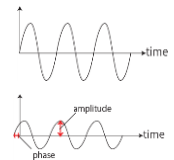
この入出力関係を定義する**システムの性質** $H(\omega)$ を
伝達関数と呼ぶ。

(復習) 伝達関数 $H(\omega)$ を求めるには？

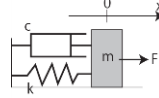
$$F(\omega) \longrightarrow H(\omega) \longrightarrow X(\omega)$$

$H(\omega)$ は、周波数 ω の信号を入力したときの
出力の振幅と位相を表す。だから...

1. ある周波数 ω の正弦波を入力。
2. 出力の振幅と位相を測定。
 - 入出力間の振幅の比率 $\text{amp} = |H(\omega)|$
 - 入出力間の位相差 $\text{phase} = \angle H(\omega)$
3. この周波数での伝達関数は
 - $H(\omega) = \text{amp} \times \exp(j * \text{phase})$
4. 周波数を変えて測定すれば、 $H(\omega)$ が得られる。



(復習)式の上で「計測」



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f$$

$f = \exp(j\omega t)$ ●ある周波数 $2\pi f = \omega$ の正弦波を**入力**
 $x(t) = H(\omega) \exp(j\omega t)$ ●同じ周波数で振幅と位相の異なる**出力**が得られる

この $x(t)$ の微分は？ 同様に2階微分は

$$\dot{x}(t) = j\omega H(\omega) \exp(j\omega t) \quad \dot{\dot{x}}(t) = (j\omega)^2 H(\omega) \exp(j\omega t)$$

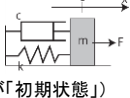
$$= j\omega \dot{x}(t) = s x(t) \quad = s^2 x(t)$$

$j\omega$ と書くのがわずらわしいので s と書く
(本当はもっと意味があるが、とりあえず)

元の式に代入 $(ms^2 + cs + k)H(\omega) \exp(j\omega t) = \exp(j\omega t)$

∴ $H(\omega) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$ $s=j\omega$ を代入すれば、
システムの伝達関数に他ならない。

しかし実際は...



- 時刻 $t \geq 0$ だけ考えればよい場合がほとんど ($t=0$ が「初期状態」)
- 入力 $f(t)$ がフーリエ変換出来ない状況が**普通**に存在する

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t \end{cases}$$


$$\int_{t=-\infty}^{\infty} F(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_{t=0}^{\infty} \exp(-j\omega t) dt$$

$$= \left[\frac{\exp(-j\omega t)}{-j\omega} \right]_0^{\infty} = \frac{1 - \exp(-j\omega \infty)}{j\omega} \quad ??$$

無限遠で収束しない関数は、積分をうまく処理できない
要は、**正弦波の重ね合わせで表現できない**。

拡張しよう

課題: 正弦波の重ね合わせで表現できない入力信号に対処したい



信号を別の関数の重ね合わせで表現したい。

その関数は、

- ✓ $\exp(-j\omega t)$ の自然な拡張でありたい
- ✓ 微積分に対する不変性は保ちたい

↓

新たな基底関数として、 **$\exp(-st)$** を考える。
ただし s はもはや虚数 $j\omega$ ではなく、複素数。

$\exp(-st)$

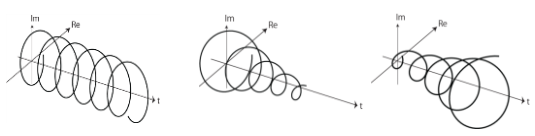
実質的には2変数の関数

$$\exp(-st) = \exp(-(c+j\omega)t)$$

$$= \exp(-ct) \times \exp(-j\omega t)$$

増大or減衰成分 回転成分

- $c=0$ ● $c>0$ ● $c<0$



微積分に対する $\exp(st)$ の不変性

$\exp(j\omega t)$ の場合と同様、 $\exp(st)$ も微分、積分しても関数の形は不変。

$$\frac{d}{dt} \exp(st) = s \exp(st) \quad \int \exp(st) dt = \frac{1}{s} \exp(st)$$

$$\frac{d^n}{dt^n} \exp(st) = s^n \exp(st) \quad \int \int \int \exp(st) dt = \frac{1}{s^n} \exp(st)$$

微分 ⇒ s をかける操作
積分 ⇒ s で割る操作

ラプラス(Laplace)変換: フーリエ変換の拡張

フーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$$


ラプラス変換

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

<ちがいが>

- 純虚数 $j\omega$ ⇒ 複素数 s に拡張
- 積分範囲は無限の過去を扱う必要がないため0から。

ラプラス変換の例: ステップ関数

ステップ関数 (階段関数) $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t \end{cases}$ 

フーリエ変換では扱うことができなかった入力

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$


=

=

=

ただし積分が収束するsの範囲は、 $\text{Re}(s) > 0$

ラプラス変換の例: ランプ関数

ランプ関数 $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t \end{cases}$ 

フーリエ変換では扱うことができなかった入力

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

=

=

=

=

ただし積分が収束するsの範囲は、 $\text{Re}(s) > 0$

ラプラス変換の例: sin, cos

$f(t) = \sin(\omega t)$ $f(t) = \cos(\omega t)$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

=

=

=

=

=

ただし積分が収束するsの範囲は $\text{Re}(s) > 0$

ラプラス変換の例: exp関数

$f(t) = \exp(at)$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

=

=

=

ただし積分が収束するsの範囲は、 $\text{Re}(s-a) > 0$

ラプラス変換の例: 微分

$f(t)$ のラプラス変換が分かっているとき、 $\dot{f}(t)$ のラプラス変換は？

$$L(\dot{f}(t)) = \int_0^{\infty} \dot{f}(t) \exp(-st) dt$$

=

=

=

ただし $f(t)$ は $t < 0$ で 0
また、ラプラス変換の積分範囲は 0 からではなく、 $0+$ から

(ルール) ラプラス変換では、微分は s をかけて $f(0)$ を引く

ラプラス変換の例: 積分

$f(t)$ のラプラス変換が分かっているとき、 $\int_{t=0}^t f(t) dt$ のラプラス変換は？

$$L\left(\int_{t=0}^t f(t) dt\right) = \int_0^{\infty} \left(\int_{t=0}^t f(t) dt\right) \exp(-st) dt$$

=

=

=

(ルール) ラプラス変換では、積分は $1/s$ をかけることに相当

sinとcosのラプラス変換を見比べる(1/2)

$$\sin(\omega t) \longrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\cos(\omega t) \longrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

(ルール)ラプラス変換では、微分はsをかけてf(0)を引く

$$\frac{d}{dt} \sin(\omega t) = \omega \cos(\omega t)$$

ルールより、cos(ωt)のラプラス変換を求めるには、sin(ωt)のラプラス変換にsをかけ、ωで割ればよい(sin(0)=0より)

... 確かにそうになっている

sinとcosのラプラス変換を見比べる(2/2)

$$\sin(\omega t) \longrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\cos(\omega t) \longrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

(ルール)ラプラス変換では、微分はsをかけてf(0)を引く

$$\frac{d}{dt} \cos(\omega t) = -\omega \sin(\omega t)$$

ルールより、sin(ωt)のラプラス変換を求めるには、cos(ωt)のラプラス変換にsをかけ、f(0)を引く、-ωで割れば良い

... 確かにそうになっている

ラプラス変換の例: 時間遅れ

f(t) のラプラス変換が分かっているとき、f(t - τ) のラプラス変換は?

$$L(f(t - \tau)) = \int_0^{\infty} f(t - \tau) \exp(-st) dt$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

ただしf(t)はt<0で0であることを利用した。

(ルール)
ラプラス変換では、τの時間遅れはexp(-s τ)をかけることに相当

ラプラス変換表

$$1 \longrightarrow \frac{1}{s}$$

$$\exp(at) \longrightarrow \frac{1}{s-a}$$

$$t \longrightarrow \frac{1}{s^2}$$

$$t \exp(at) \longrightarrow \left(\frac{1}{s-a}\right)^2$$

$$t^n \longrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\dot{f}(t) \longrightarrow sF(s)$$

$$\sin(\omega t) \longrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

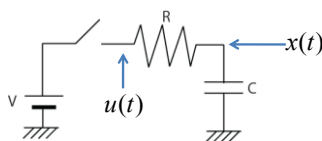
$$\int_{t=0}^t f(t) dt \longrightarrow \frac{1}{s} F(s)$$

$$\cos(\omega t) \longrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$f(t - \tau) \longrightarrow \exp(-s\tau)F(s)$$

通常ラプラス逆変換は、表を見て行う

ラプラス変換を使ってみる: ローパス(1)

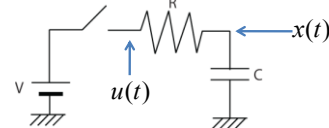


●入力: 抵抗Rの左側の電圧 u(t).

●出力: コンデンサの電圧x(t).

(問題)スイッチを入れた後のx(t)の変化を調べよ

ラプラス変換を使ってみる: ローパス(2)



●電流Iを考えて、

$$u = RI + \frac{1}{C} \int Idt$$

$$x = \frac{1}{C} \int Idt$$

$$I = C\dot{x}$$

$$u = RC\dot{x} + x$$

●xのラプラス変換をX,
●uのラプラス変換をUとすると、

$$U =$$

(∴(ルール)微分⇒sをかける)

$$=$$

$$X =$$

ラプラス変換を使ってみる: ローパス(3)

部分分数展開

$$X = \frac{1}{sRC + 1} U$$

$a = RC$
 $b = -RC$

$t=0$ でスイッチを入れるから

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V & 0 \leq t \end{cases}$$

$$U(s) = \frac{V}{s}$$

$X =$

ラプラス変換を使ってみる: ローパス(4)

$$X = V \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right)$$

ラプラス変換表を見て逆変換する

$$x(t) = \text{定常成分} + \text{過渡成分}$$

伝達関数

フーリエ変換の時と同様に、
入出力関係を定める「システムの特性」を知りたい

●先程の例では
xのラプラス変換をX, uのラプラス変換をUとしたとき、

$$X = \frac{1}{sRC + 1} U$$

$U \rightarrow G \rightarrow X$

この部分が入出力関係を決めている。伝達関数G。
 $s=j\omega$ を代入すればフーリエ変換の伝達関数と全く同じ。

$$F(\omega) \rightarrow H(\omega) \rightarrow X(\omega)$$

伝達関数

$$H(\omega) = \frac{1}{sRC + 1} = \frac{1}{RC} \frac{1}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$

$s=j\omega$ を代入して、周波数応答を見てみる

Scilabソース

```

R=1000; //抵抗 1kΩ
C=10^(-6); //コンデンサ1μF
f=[1:1000]; //周波数
w=2 * %pi * f; //角周波数

//応答
H=1/(R*C) * ones(f) ./ (%i*w + 1/(R*C));

//パワースペクトル
power_spec = H .* conj(H);

//片対数グラフで表示
plot2d(f,power_spec,logscale="ln");
    
```

1kΩの抵抗と1μFのコンデンサで、
1kHz程度以上の周波数を阻止する
ローパスフィルタが出た。

時間幅Tのパルスを与えるとき?

$$u(t) = \begin{cases} V & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

この入力のラプラス変換は、

$$U(s) = \frac{V(1 - e^{-sT})}{s}$$

出力のラプラス変換は、
システムの伝達関数をかけて

$$X = \frac{V(1 - e^{-sT})}{s(sRC + 1)}$$

時間幅Tのパルスを与えるとき?

$$X = \frac{1}{sRC + 1} \frac{1 - e^{-sT}}{s} V$$

前者の逆ラプラス変換はすでに
見たように

$$V \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

後者の逆ラプラス変換は、
 $\exp(-sT)$ が掛かっている。これは
ラプラス変換表により、
Tの時間遅れを意味するので、

$$\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right) e^{-sT} V$$

ただし、 $t \geq T$

この組み合わせ

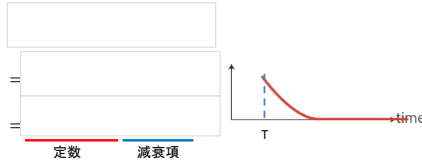
時間幅Tのパルスを与えるとき？

結局、応答は、 $t < T$ では、

$$V(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

これは元々求めたものと同じ。

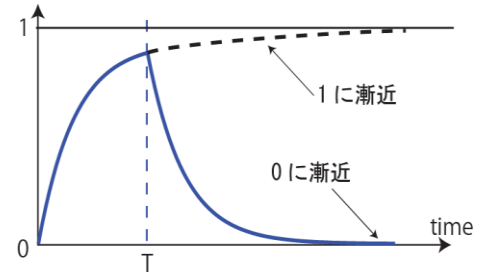
$t \geq T$ では、



定数 減衰項

これは放電による減衰を意味する
 $t = T$ では2式は一致する

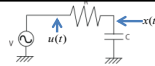
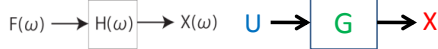
時間幅Tのパルスを与えるとき？まとめ



$$V(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

$$V(1 - e^{-\frac{1}{RC}T})e^{-\frac{1}{RC}(t-T)}$$

伝達関数まとめ



(1) システムの入出力関係を定める**伝達関数G**をもとめる

●先程の例では、 x のラプラス変換を X 、 u のラプラス変換を U としたとき、

$$X = \frac{1}{sRC + 1}U$$

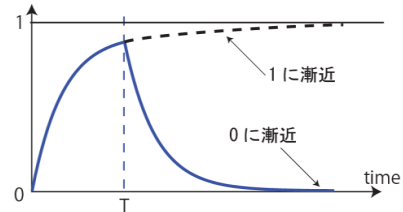
この部分

(2) 入力**のラプラス変換U**を求める

(3) $X = GU$ によって**出力のラプラス変換X**が得られる。

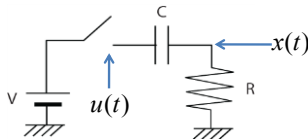
(4) 逆ラプラス変換によって**出力波形**が得られる。

レポート課題(1)



$R = 1k\Omega$, $C = 1\mu F$, $T = 1ms$, $V = 1$ として、時刻0~10msの間の電圧の変化をプロット、観察せよ。

ラプラス変換を使ってみる: ハイパス(1)

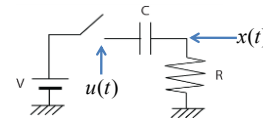


●入力: コンデンサの左側の電圧 $u(t)$ 。

●出力: 抵抗の電圧 $x(t)$ 。

(問題) スイッチを入れた後の $x(t)$ の変化を調べよ

ラプラス変換を使ってみる: ハイパス(2)



●電流 I を考えて、

$$u = RI + \frac{1}{C} \int Idt$$

$$x = RI$$

$$I = \frac{x}{R}$$

$$u = x + \frac{1}{C} \int \frac{x}{R} dt$$

● x のラプラス変換を X 、
● u のラプラス変換を U とすると、

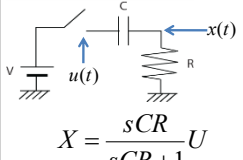
$$U =$$

(∴ (ルール) 積分 ⇒ s で割る)

$$=$$

$$X =$$

ラプラス変換を使ってみる:ハイパス(3)



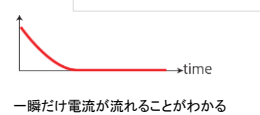
$$X = \frac{sCR}{sCR + 1} U$$

これで**伝達関数**がもたらした
t=0でスイッチを入れるから

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V & 0 \leq t \end{cases}$$

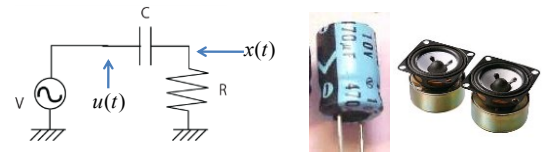
$$U(s) = \frac{V}{s}$$

ラプラス変換の表を使って逆変換する

$$x(t) = \frac{V}{CR} e^{-t/CR}$$


一瞬だけ電流が流れることがわかる

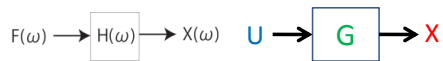
レポート課題(2):ハイパスフィルタの伝達関数



ローパスの場合を参考に、上記回路の伝達関数を求め、
R=32Ω, C=100μFの場合の周波数応答を表示するコードを書け。

大体何Hz以下を阻止するハイパスフィルタになっているか、
観察の結果をコード中にコメントすること。

今日の話まとめ



フーリエ変換で扱えない、非定常な状況をラプラス変換で扱う
システムの応答は次のようなステップで求めることが出来る

- (1) システムの入出力関係を定める**伝達関数G**をもとめる
- (2) **入力**のラプラス変換**U**を求める
- (3) $X=GU$ によって**出力**のラプラス変換**X**が得られる。
- (4) 逆ラプラス変換によって**出力波形**が得られる。