

# 認識行動システム論

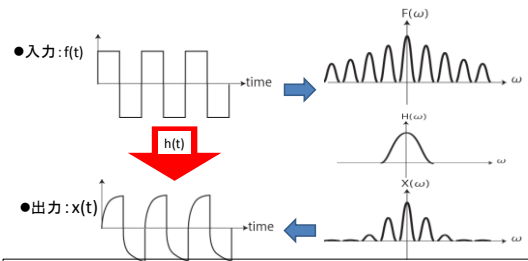
第8回  
梶本裕之

## 日程

- 12/17 信号処理(相互相関・自己相関)
- 01/07 古典制御の基礎
- 01/14 ロボティクス
- 01/21 画像処理
- 01/28 期末テスト(授業時間中)

## 復習: 信号処理の基礎

(復習)周波数領域ではなく、  
時間領域のまま議論できないか？



$X(\omega) = H(\omega) \times F(\omega)$ : 周波数領域で美しいのは分った。  
時間的な現象として何が起きているのか分からない。

(復習)式で考えよう

$$X(\omega) = H(\omega) \times F(\omega)$$

両辺を逆フーリエ変換すれば時間領域の信号に戻る。

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau \right) \exp(j\omega t) d\omega \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left( \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \exp(j\omega(t-\tau)) d\omega \right) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \exp(j\omega(t-\tau)) d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} (H(\omega) \exp(-j\omega\tau)) \exp(j\omega t) d\omega \\
 \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t') \exp(-j\omega(t'+\tau)) dt' \\
 &= \exp(-j\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} h(t') \exp(-j\omega t') dt' \\
 &= H(\omega) \exp(-j\omega t)
 \end{aligned}$$

逆順の計算もしておく(ふつうはこちら)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

両辺をフーリエ変換。

$$\begin{aligned}
 X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega t) dt \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega(t+\tau)) dt \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega\tau) \cdot \exp(-j\omega(t-\tau)) dt \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \exp(-j\omega(t-\tau)) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(t') \exp(-j\omega t') dt' \\
 &= F(\omega) H(\omega)
 \end{aligned}$$

**(復習)コンボリューション定理**

$$X(\omega) = F(\omega)H(\omega) = H(\omega)F(\omega)$$

フーリエ逆変換 ↓ ↑ フーリエ変換

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

簡略化のため次のようにも表記される

$$x(t) = f(t) * h(t) = h(t) * f(t)$$

**(復習)コンボリューション定理の意味(1)**

- 入力:  $f(t)$
- 出力:  $x(t)$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad X(\omega) = F(\omega)H(\omega)$$

• $h(t)$ のフーリエ変換が $H(\omega)$ であるとする。  
 •周波数領域でフィルタ $H(\omega)$ をかけることは、時間領域では、入力信号 $x(t)$ に対する関数 $h(t)$ の畳み込み積分(コンボリューション)として表現される。

**(復習)コンボリューション定理の意味(2)**

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

例えば,  $h(t)=0.5 \quad (-1 < t < 1)$  なら,

$$x(t) = \int_{-1}^1 0.5f(t-\tau)d\tau$$

これは,  $f(t)$ を平均化していくフィルタ

**(復習)離散化による理解**

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau \Rightarrow x(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)f(n-i)$$

$$x(n) = \dots + h(-4)f(n+4) + h(-3)f(n+3) + \dots + h(3)f(n-3) + h(4)f(n-4) + \dots$$

$h(n)$ が,  $n=-2 \sim 2$ の間だけ1の場合,

$$x(n) = f(n+2) + f(n+1) + f(n) + f(n-1) + f(n-2)$$

- この場合, 出力 $x$ は, 入力 $f$ の「平均化」になっている。
- つまりこの場合,  $h$ は平滑化フィルタである。

**(復習) FIRフィルタ**

$$x(n) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)f(n-i)$$

$i=0$ から始める: 未来のデータが使えないことを意味する。  
 この例は, 元データ $f(n)$ を, 4個平均して出力する。

- 未来のデータが使えない例: リアルタイム制御
- 先のデータが使える例: 画像処理

**(復習) FIRフィルタの図的理解**

$$x(n) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)f(n-i)$$

D: Delay, 遅延器, メモリ.  
 h[n]: 増幅器

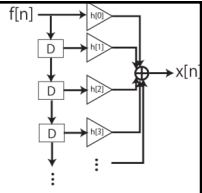
FIR=Finite Impulse Response  
 個々のインパルス応答を有限個足し合わせたもの。

### (復習) FIRフィルタと行列

$$x(n) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)f(n-i)$$

フィルタが3つのメモリを持つ場合

$$x(n) = h(0)f(n) + h(1)f(n-1) + h(2)f(n-2)$$

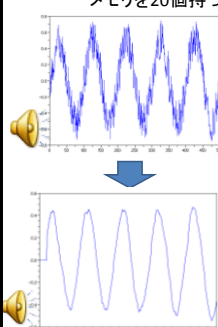


$x(0) = h(0)f(0)$	$x(0)$	$\begin{bmatrix} h(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h(1) & h(0) & 0 & 0 & 0 \\ h(2) & h(1) & h(0) & 0 & 0 \\ 0 & h(2) & h(1) & h(0) & 0 \\ 0 & 0 & h(2) & h(1) & h(0) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \end{bmatrix}$
$x(1) = h(0)f(1) + h(1)f(0)$	$x(1)$		
$x(2) = h(0)f(2) + h(1)f(1) + h(2)f(0)$	$x(2)$		
$x(3) = h(0)f(3) + h(1)f(2) + h(2)f(1)$	$x(3)$		
$x(4) = h(0)f(4) + h(1)f(3) + h(2)f(2)$	$x(4)$		
$x(5) = h(0)f(5) + h(1)f(4) + h(2)f(3)$	$x(4)$		

### (復習) 平滑化フィルタの実例

メモリを20個持ったFIRフィルタによって平滑化

Scilabコード例



```

time = [0:0.01:100];
//振幅0.5の正弦波に最大振幅0.5のノイズが混入した信号
wave=0.5*sin(time*2*pi) + 0.5*(rand(time)-0.5);

out=zeros(wave);

//20個を平均する.
for n=20:length(wave),
    out(n)=out(n)+wave(n-1)/20;
end
end

playsnd(out);
savewave('wave.wav',out);
plot(out(1:500));
        
```

### (復習) エコー

エコー=時間遅れ信号の重畳.  
これはFIRフィルタで実装できる.

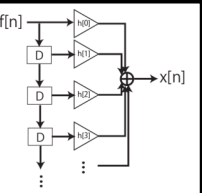
Scilabコード例

```

wave = loadwave('aiueo.wav');
out=zeros(wave);

//エコー(1000ステップ前の信号を重畳)
for n=1000:length(wave),
    out(n)=wave(n)+0.9*wave(n-999);
end

playsnd(out,11000); //11kHzサンプリングで再生
savewave('wave.wav',out,[11000]);
        
```



原音

1000ステップ前の信号を重畳

1000ステップ前+2000ステップ前の信号を重畳

沢山重畳

### エコーは害




## 相互相関関数 自己相関関数

### エコーキャンセル(テレビだとゴーストリダクション)

FIRフィルタによってエコーの影響を低減することができる。

考え方:

(1) エコー成分のモデルを推定  
 $out(n) = wave(n) + 0.5 * wave(n-100);$   
 「100ステップ前の信号が0.5のゲインで重畳されている!」

(2) そのモデルに基づき、エコー成分と逆のゲインをかける  
 $out(n) = 0.5 * out(n-100)$   
 $= wave(n) + wave(n-100) - 0.5 * (wave(n-100) + 0.5 * wave(n-200))$   
 $= wave(n) + 0.25 * wave(n-200)$   
 ⇒ エコーが半分に低減!

(3) 当然もっと工夫すれば... (もっとメモリがあれば)  
 $out(n) = 0.5 * out(n-100) - 0.25 * wave(n-200)$   
 $= ... = wave(n) + 0.125 * wave(n-300)$   
 ⇒ 無限にメモリがあれば完璧に消せる。

### エコーキャンセル=エコーの逆行列

$x(n) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i) f(n-i)$  エコーもエコーキャンセルもFIRフィルタによって表わされる。

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h(1) & h(0) & 0 & 0 & 0 \\ h(2) & h(1) & h(0) & 0 & 0 \\ 0 & h(2) & h(1) & h(0) & 0 \\ 0 & 0 & h(2) & h(1) & h(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \end{bmatrix}$$

結局、エコーキャンセルとは、  
 「『エコーの効果を表す行列』の逆行列を掛けて元に戻す」  
 操作に他ならない。  
 (実際はそう簡単ではないが...) )

### エコーキャンセルの課題

エコー成分が、どれだけ時間遅れを生じてやってくるかのモデルを推定

$out(n) = wave(n) + 0.5 * wave(n-999);$

<問題>  
 観測できるのは、エコーの「結果」としてのout(n)のみ。元の信号はわかっていない。

この信号からどのように、モデルを推定するのか?

### より簡単な問題から考えよう

二つの信号が、

- 時間的にどれだけずれているのか
- 時間のずれを無視したらどれだけ似ているのかを測定したい。

### (復習)ベクトル空間と内積

ベクトル  $a = [a_x, a_y]$  のx成分は? ...  $a_x$

これはベクトルaとベクトル  $x = [1, 0]$  との内積である。

$$a \cdot x = [a_x, a_y] \cdot [1, 0] = a_x$$

回転した座標軸, s, t を考える。  
 ベクトル  $a = [a_x, a_y]$  の, s 成分は?

これはベクトルaとベクトル  $s = [s_x, s_y]$  との内積である。

$$a \cdot s = [a_x, a_y] \cdot [s_x, s_y]$$

内積は、あるベクトルが別のベクトルの成分をどれだけ持つかを表す

### (復習)N次元空間では

N次元空間で、二つのベクトル  $f = [f_1, f_2, \dots, f_N], g = [g_1, g_2, \dots, g_N]$  を考える。

内積  $f \cdot g$  は、ベクトルfの、g軸成分(または逆)を表す。

$$= [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_N] \cdot [g_1 \ g_2 \ \dots \ g_N]$$

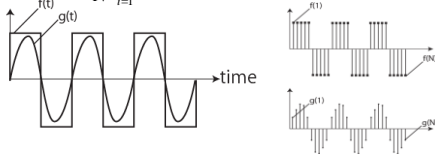
$$= \sum_{i=1}^N f_i g_i$$

(復習) 波形fに波形gはどれだけ含まれるか

波形f中の、波形gの成分

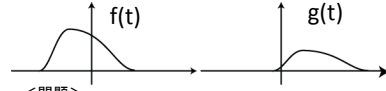
$$= \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t)dt \quad (\text{連続関数})$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(i)g(i) \quad (\text{離散化して考えた場合})$$



これは二つの波をベクトルと考えた時の内積に他ならない  
※内積を連続関数に対して定義

相互相関



<問題>  
二つの信号が、  
●時間的にどれだけずれているのか  
●時間のずれを無視したらどれだけ似ているのか  
を測定したい。

内積を思い出せば、  
次の手順で測定すればよいことがわかる

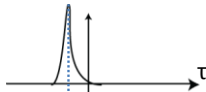
- g(t)をτだけずらしてみる ⇒
- f(t)との内積を取ってみる ⇒
- τを変化させていく。

相互相関



$R_{fg}(\tau)$ : 二つの関数f(t), g(t)の、相互相関関数

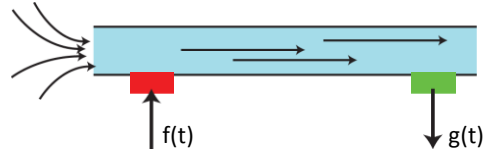
$$R_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t+\tau)dt$$



$R_{fg}(\tau)$ が最大の値をとるτ = 元の関数f(t)とg(t)のズレ  
(ただし直流成分を取り除いた後)

相互相関の応用: 速度計測

管内の流速を正確に測定したい  
ただし、管の中に接触してはいけない(液漏れ厳禁)

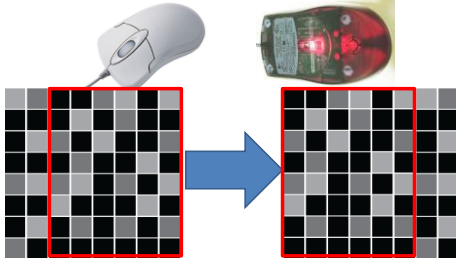


上流に熱源を置き、f(t)でランダムに変動させる。  
下流で温度を測定する。g(t)

f(t)とg(t)の相互相関関数が最大となる時間差τが、  
水流によって熱が移動するのに要する時間である。

相互相関の応用: 速度計測

光学式マウスの中身 = 16x16 pixel のCMOSカメラ



二つの画像 (= 2次元関数) 同士の相互相関を取ることで  
移動量を計測する。自動車の速度計測等にも利用。

自己相関

二つの関数f(t), g(t)の代わりに、  
ひとつの関数f(t)の相関を取る。

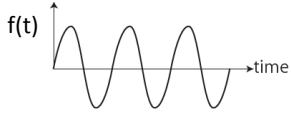
$$R_{ff}(\tau) = \text{[ ]}$$



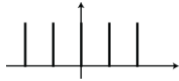
自己相関関数は、  
「どれだけずれたら自分自身に近い形になるか」  
を表す。

すなわち、エコーを発見していることに他ならない。

### 周期関数の自己相関

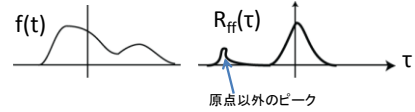


$$R_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t+\tau)dt$$



周期関数の自己相関関数は沢山のピークが出る

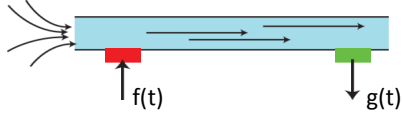
### 自己相関まとめ



$R_{ff}(\tau)$ : 自分自身を $\tau$ ずらしたら、自分自身にどれだけ似ているか

- 当然、 $\tau=0$ で最大値を取る。
- $\tau \neq 0$ で大きな値をとった場合、その信号には $\tau$ の時間遅れ(エコー)成分が含まれている。
- 信号に潜む周期性を発見することもできる

### 白色雑音(ホワイトノイズ)と自己相関

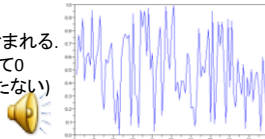


元の信号 $f(t)$ に「周期性」があったら、 $f(t)$ と $g(t)$ の相互相関は沢山の「ニセのピーク」が出てしまう。

元の入力 $f(t)$ はなるべく「でたらめ」であることが望ましい⇒白色雑音

<白色雑音の定義>

1. あらゆる周波数成分が均等に含まれる。
2. 自己相関関数が $\tau=0$ 以外では全て0 (＝エコー成分、周期性を全く持たない)



### 白色雑音とM系列

白色雑音をコンピュータで生成するにはどうするか？

M系列 ( maximum length code ) : 「自己相関を原点以外0にする」ことに特化した0,1乱数系列の中で、最も簡単なアルゴリズムで生成するもの。

デジタル信号処理を前提とした高度なセンシングで利用されることが多い。

今のところは言葉だけ心にとめましょう。

### 自己相関とパワースペクトル

自己相関関数をフーリエ変換してみる。

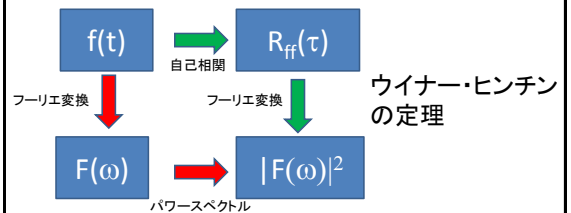
$$R_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t+\tau)dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t+\tau)dt \right] e^{-j\omega\tau}d\tau$$



### 自己相関とパワースペクトル

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t+\tau)dt e^{-j\omega\tau}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t+\tau)dt e^{-j\omega\tau}d\tau \\ &= \|F(\omega)\|^2 \end{aligned}$$



### 自己相関とパワースペクトル

自己相関は  
フーリエ変換⇒パワースペクトル⇒逆フーリエ変換  
によって間接的に計算できる

- 自己相関を直接計算した時の計算量:  $O(n^2)$
- フーリエ変換(FFT)を使った時の計算量:  $O(n \log(n))$   
この方が計算が早いので多用される。

### 信号処理の基礎まとめ

以下の概念を2回で紹介しました。概念は理解しましょう。

- コンボリューション(畳み込み積分)
- FIRフィルタ
- IIRフィルタ
- 周波数的な低域通過フィルタ=時間的な平滑化フィルタ
- エコー
- エコーキャンセル
- 相互相関
- 自己相関
- 白色雑音
- M系列

### レポート課題: 自己相関, 相互相関

(1) 適当なwaveファイルに対してエコーを掛けてカラオケのようにする。(前回のレポート)

(2) その結果に対して通常の方法で自己相関関数を計算し、確かにエコー分の遅れのところでピークが出ることを確認する(エコーの検出)。

(2)のScilabソースファイルおよび結果のグラフ画像の添付。waveファイルは前回と同じなので添付不要。

### (発展トピック) 相互相関と検波

$$R_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t+\tau)dt$$

$R_{fg}(\tau)$ が最大の値をとる $\tau$   
=元の関数 $f(t)$ と $g(t)$ のズレ  
(ただし直流成分を取り除いた後)

実用上重要なケースの一つ:  
● $f(t)$ が正弦波(入力)で,  
● $g(t)$ がノイズが入って位相が遅れた正弦波(出力)

### 正弦波入出力の例(1)

フィルタ回路: 入力 $u(t)$ , 出力 $x(t)$   
電子回路, アンテナ, ロボットアーム, etc  
フィルタ特性を実測で求める場合  
● $u(t)=\sin(\omega t)$ を**入力**し,  
●**出力**を観察する。  
 $\omega$ を変化させることでフィルタ特性を得る。

### 正弦波入出力の例(1)

ファンクションジェネレータ      オシロスコープ

### 正弦波入出力の例(2)

オプティカルフローの速度

重心動揺

### 入力と出力の位相差, 振幅比を求める

入力波形

出力波形

位相遅れ この程度なら, 振幅と位相は目視できる

でもたいていこういう残念な感じ。ノイズがひどい  
⇒振幅と位相を, どうやって求めたら良い?  
方法1: バンドパスフィルタを使う  
方法2: 相関関数を考える

### 正弦波による相互相関

- 出力信号 $f(t)$ : ノイズだらけの正弦波. 位相不明. 周波数は既知.
- 入力信号 $g(t)$ : 周波数固定の正弦波

$g(t)$ を動かしていき, ピタリと重なるところを見つければ良い  
⇒相互相関の計算にほかならない.

$$R_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t+\tau)dt$$

### 正弦波による相互相関

$$R_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t+\tau)dt$$

正弦波 $g(t)$ を動かす

$$R_{fg}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t+\tau)dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \text{ [ ] } dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \text{ [ ] } dt$$

つまり正弦波の場合, 積分の計算は2回やるだけでよい!!

### 直交検波

$$R_{fg}(\tau) = \cos(\omega\tau) \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\sin(\omega t)dt + \sin(\omega\tau) \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\cos(\omega t)dt$$

積分結果をS,Cと書いて

$$R_{fg}(\tau) = S \cos(\omega\tau) + C \sin(\omega\tau)$$

これが最大の値をとる場所 $\tau$ は, 微分をとって

$$\frac{dR_{fg}(\tau)}{d\tau} = \text{ [ ] } = 0$$

⇒位相遅れ $\tau$ が求まった

### 直交検波

∴  $\arctan\left(\frac{C}{S}\right) = \omega\tau$  ⇒ 位相遅れ $\tau$ が求まった

このときの相関値は,

$$R_{fg}(\tau) = S \cos(\omega\tau) + C \sin(\omega\tau)$$

$$= S \cos(\text{ [ ] }) + C \sin(\text{ [ ] })$$

$$= S \text{ [ ] } + C \text{ [ ] }$$

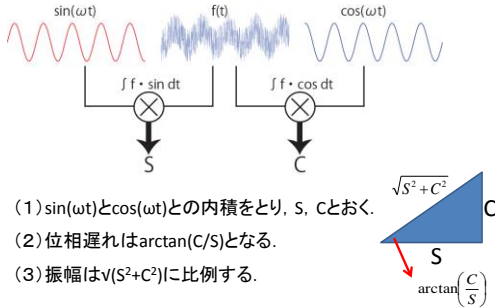
$$= \text{ [ ] }$$

$$= \text{ [ ] } \Rightarrow \text{振幅に相当する量}$$

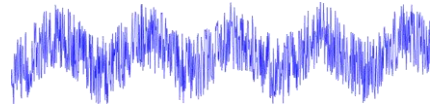


### 直交検波まとめ

周波数 $\omega$ がわかっているノイズだらけの信号 $f(t)$ があったとき、振幅と位相は次のように計算できる。



### 直交検波: もっと数式で理解する



問題を定式化

信号 $f(t)$ が、  
 $f(t) =$

と仮定できるとする。周波数 $\omega$ はわかっている。

計測データから、振幅Aと、位相ずれ $\phi$ を求めるには？

### 直交検波: さらに数式で理解する

信号に $\sin(\omega t)$ をかけ、積分する(=内積をとる)  
 積分時間Tは充分長い。

$$S = \frac{1}{T} \int_0^T (A \sin(\omega t + \phi) + \text{noise}(t)) \sin(\omega t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \text{[ ]} + \int_0^T \text{[ ]}$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \text{[ ]}$$

$$= \text{[ ]}$$

$$= \text{[ ]}$$

$$= \text{[ ]}$$

### 直交検波: さらに数式で理解する

信号に $\cos(\omega t)$ をかけ、積分する(=内積をとる)  
 積分時間Tは充分長い。

$$C = \frac{1}{T} \int_0^T (A \sin(\omega t + \phi) + \text{noise}(t)) \cos(\omega t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T A \sin(\omega t + \phi) \cos(\omega t) dt + \int_0^T \text{noise}(t) \cos(\omega t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T A (\sin(\omega t) \cos(\phi) + \cos(\omega t) \sin(\phi)) \cos(\omega t) dt$$

$$= A \cos(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt + A \sin(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt$$

$$= A \sin(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} dt$$

$$= \text{[ ]}$$

### 直交検波: さらに数式で理解する

$$S = \frac{A}{2} \cos(\phi) \quad C = \frac{A}{2} \sin(\phi)$$

この二つの結果から、

位相差

$$\frac{C}{S} = \text{[ ]}$$

$$\phi = \text{[ ]}$$

振幅

$$S^2 + C^2 = \frac{A^2}{4} (\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi))$$

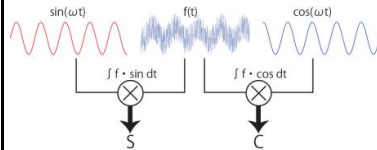
$$= \text{[ ]}$$

$$A = \text{[ ]}$$

位相差と振幅が求まった

### (参考) AMラジオの同期検波

ラジオの信号は、典型的な「周波数 $\omega$ がわかっているノイズだらけの信号 $f(t)$ 」



復調方式の一つ:「同期検波」

直交検波をリアルタイムに行い、ノイズに隠れた真の信号を得る。

今ではPC上で計算可能(ソフトウェア無線技術)

(※通信の分野では「直交検波」という用語は別の意味で使うので注意)