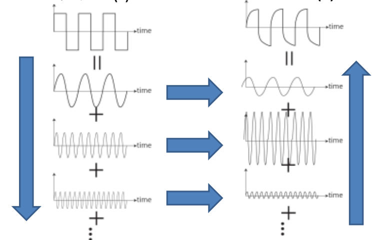
認識行動システム論
第8回

梶本裕之
Twitter ID kajimoto
ハッシュタグ #ninshiki

（復習：フーリエ級数展開）
歪みを周波数で分解して説明できる

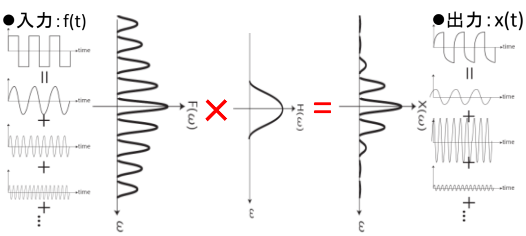
●入力：f(t)　●出力：x(t)



（1）入力f(t)を周波数分解する
（2）周波数ごとの出力の振幅と位相を求める．
（3）合計すると出力が得られる．
これを連続関数で考えるとどうなるか？

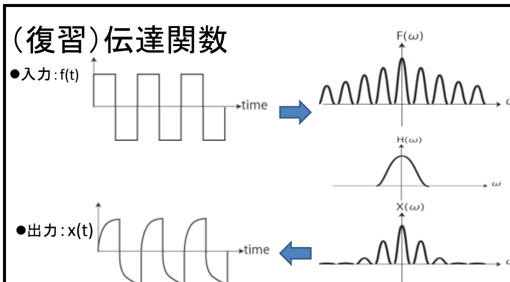
（復習：フーリエ変換）
入出力の関係：関数同士の掛け算

●入力：f(t)　●出力：x(t)



（1）入力f(t)を周波数分解⇒F(ω)
（2）周波数ごとにどれだけ振幅と位相が変わるか：H(ω)
（3）出力（のフーリエ変換）：X(ω)=H(ω)*F(ω)
（4）逆フーリエ変換すると出力が得られる：x(t)

（復習）伝達関数



フーリエ空間では，入出力は単なる掛け算で表される．
X(ω)＝H(ω)×F(ω)

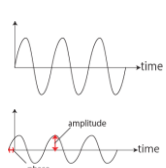
この入出力関係を定義するシステムの性質H(ω)を
伝達関数と呼ぶ．

（復習）伝達関数H(ω)を求めるには？

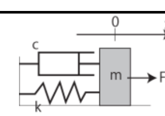
F(ω) → H(ω) → X(ω)

H(ω)は，周波数ωの信号を入力したときの
出力の振幅と位相を表す．だから．．．

1. ある周波数ωの正弦波を入力．
2. 出力の振幅と位相を測定．
   - 入出力間の振幅の比率amp=|H(ω)|
   - 入出力間の位相差phase＝∠H(ω)
3. この周波数での伝達関数は
   - H(ω)=amp×exp(j*phase)．
4. 周波数を変えて測定すれば，H(ω)が得られる．



（復習）式の上で「計測」



$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f$$

$f=\exp(j\omega t)$　●ある周波数2πf=ωの正弦波を入力

$x(t)=H(\omega)\exp(j\omega t)$　●同じ周波数で振幅と位相の異なる出力が得られる

このx(t)の微分は？

$$\dot{x}(t)=j\omega H(\omega)\exp(j\omega t)=j\omega x(t)=sx(t)$$

同様に2階微分は

$$\ddot{x}(t)=(j\omega)^2 H(\omega)\exp(j\omega t)=s^2x(t)$$

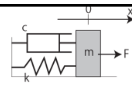
jωと書くのがわずらわしいのでsと書く
（本当はもっと意味があるが，とりあえず）

元の式に代入　$(ms^2+cs+k)H(\omega)\cancel{\exp(j\omega t)}=\cancel{\exp(j\omega t)}$

$$\therefore H(\omega)=\frac{1}{ms^2+cs+k}$$

s=jωを代入すれば，
システムの伝達関数に他ならない．

しかし実際は．．．



●時刻t≧0だけ考えればよい場合がほとんど（t=0が「初期状態」）

●入力f(t)がフーリエ変換出来ない状況が**普通に**存在する

$$F(t)=\begin{cases}0 & t<0,\\ 1 & 0\le t\end{cases}$$

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} F(t)\exp(-j\omega t)dt=\int_{t=0}^{\infty} 1\exp(-j\omega t)dt$$
$$=\left[\frac{\exp(-j\omega t)}{-j\omega}\right]_0^{\infty}$$
$$=\frac{1-\exp(-j\omega\infty)}{j\omega}$$

？？

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & 0\le t\end{cases}$$

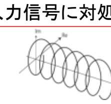
$$\int_{t=-\infty}^{\infty} F(t)\exp(-j\omega t)dt=\int_{t=0}^{\infty} t\exp(-j\omega t)dt$$
$$=\cdots$$

無限遠で収束しない関数は，積分をうまく処理できない

要は，正弦波の重ね合わせで表現できない．

拡張しよう

課題：正弦波の重ね合わせで表現できない入力信号に対処したい



信号を別の関数の重ね合わせで表現したい．

その関数は，
- ✓exp(-jωt)の自然な拡張でありたい
- ✓微積分に対する不変性は保ちたい

新たな基底関数として，**exp(-st)**を考える．
ただしsはもはや虚数jωではなく，複素数．

exp(-st)

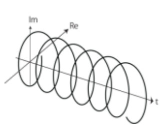
実質的には2変数の関数

exp(-st) = exp(-(c+jω)t)

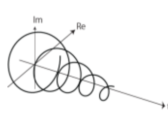
= exp(-ct) × exp(-jωt)

増大or減衰成分　回転成分

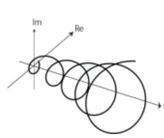
●c=0



●c＞0



●c＜0



微積分に対するexp(st)の不変性

exp(jωt)の場合と同様，exp(st)も微分，積分しても関数の形は不変．

$$\frac{d}{dt}\exp(st)=s\exp(st)\qquad \int\exp(st)dt=\frac{1}{s}\exp(st)$$

$$\frac{d^n}{dt^n}\exp(st)=s^n\exp(st)\qquad \underbrace{\iiint}_{n}\exp(st)dt=\frac{1}{s^n}\exp(st)$$

微分⇒　sをかける操作
積分⇒　sで割る操作

ラプラス(Laplace)変換：フーリエ変換の拡張

フーリエ変換

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

ラプラス変換

$$L(f(t))=F(s)=\int_{0}^{\infty} f(t)\exp(-st)dt$$

<ちがい>
●純虚数jω⇒複素数sに拡張
●積分範囲は無限の過去を扱う必要がないため0から．

ラプラス変換の例：ステップ関数

ステップ関数（階段関数）

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & 0\le t\end{cases}$$

フーリエ変換では扱うことができなかった入力

$$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)\exp(-st)dt$$
$$=$$
$$=$$
$$=$$

ただし積分が収束するsの範囲は，Re(s)>0

ラプラス変換の例：ランプ関数

ランプ関数

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & 0\le t\end{cases}$$

フーリエ変換では扱うことができなかった入力

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)\exp(-st)dt$$

=

=

=

=

ただし積分が収束するsの範囲は，Re(s)>0

ラプラス変換の例：sin，cos

$$f(t)=\sin(\omega t)$$

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$=\int_0^\infty \sin(\omega t)e^{-st}dt$$

=

=

=

=

=

ただし積分が収束するsの範囲内(Re(s)>0)

$$f(t)=\cos(\omega t)$$

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$=\int_0^\infty \cos(\omega t)e^{-st}dt$$

=

=

=

=

=

ラプラス変換の例：exp関数

$$f(t)=\exp(at)$$

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)\exp(-st)dt$$

=

=

=

ただし積分が収束するsの範囲は，Re(s-a)>0

ラプラス変換の例：微分

$f(t)$ のラプラス変換が分かっているとき，$\dot{f}(t)$ のラプラス変換は？

$$L(\dot{f}(t))=\int_0^\infty \dot{f}(t)\exp(-st)dt$$

=

=

=

ただしf(t)はt<0で0
また，ラプラス変換の積分範囲は0からではなく，0+から

（ルール）ラプラス変換では，微分はsをかけることに相当

ラプラス変換の例：積分

$f(t)$ のラプラス変換が分かっているとき，$\int_{t=0}^{t} f(t)dt$ のラプラス変換は？

$$L\left(\int_{t=0}^{t} f(t)dt\right)=\int_0^\infty\left(\int_{t=0}^{t} f(t)dt\right)\exp(-st)dt$$

=

=

=

（ルール）ラプラス変換では，積分は1/sをかけることに相当

sinとcosのラプラス変換を見比べる

$$\sin(\omega t) \Rightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\cos(\omega t) \Rightarrow \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

（ルール）ラプラス変換では，微分はsをかけることに相当

$$\frac{d}{dt}\sin(\omega t)=\omega\cos(\omega t)$$

ルールより，cos(ωt)のラプラス変換を求めるには，
sin(ωt)のラプラス変換にsをかけ，ωで割ればよい

．．．確かにそうなっている

ラプラス変換の例：時間遅れ

$f(t)$ のラプラス変換が分かっているとき，$f(t-\tau)$ のラプラス変換は？

$$L(f(t-\tau)) = \int_0^\infty f(t-\tau)\exp(-st)dt$$

$=$

$=$

$=$

ただしf(t)はt<0で0であることを利用した.

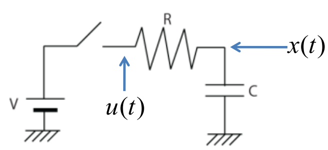
（ルール）
ラプラス変換では，τの時間遅れはexp(-sτ)をかけることに相当

ラプラス変換表

1	➡	$\frac{1}{s}$	$\exp(at)$	➡	$\frac{1}{s-a}$
t	➡	$\frac{1}{s^2}$	$t\exp(at)$	➡	$\left(\frac{1}{s-a}\right)^2$
t^n	➡	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\dot{f}(t)$	➡	$sF(s)$
$\sin(\omega t)$	➡	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\int_{t=0}^{t} f(t)dt$	➡	$\frac{1}{s}F(s)$
$\cos(\omega t)$	➡	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$f(t-\tau)$	➡	$\exp(-s\tau)F(s)$

通常ラプラス逆変換は，表を見て行う

ラプラス変換を使ってみる：ローパス(1)

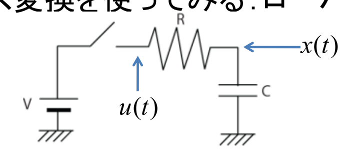


●入力：抵抗Rの左側の電圧 u(t).

●出力：コンデンサの電圧x(t).

（問題）スイッチを入れた後のx(t)の変化を調べよ

ラプラス変換を使ってみる：ローパス(2)



●電流Iを考えて,

$$u = RI + \frac{1}{C}\int Idt$$

$$x = \frac{1}{C}\int Idt$$

$$I = C\dot{x}$$

$$u = RC\dot{x} + x$$

●xのラプラス変換をX,
●uのラプラス変換をUとすると,

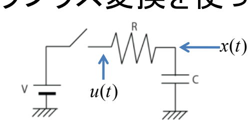
$U =$

(∴(ルール)微分⇒sをかける)

$=$

$X =$

ラプラス変換を使ってみる：ローパス(3)



$$X = \frac{1}{sRC+1}U$$

t=0でスイッチを入れるから

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ V & 0 \le t \end{cases}$$

$U(s) =$

$X =$

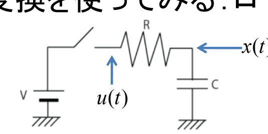
$=$

$=$

部分分数展開
$a = RC$
$b = -RC$

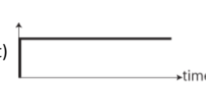
$X =$

ラプラス変換を使ってみる：ローパス(4)



$$X = V\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right)$$

入力u(t)

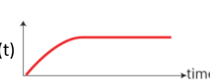


ラプラス変換表を見て逆変換する

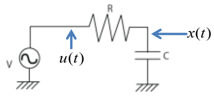
$x(t) =$

定常成分　過渡成分

出力x(t)



伝達関数



フーリエ変換の時と同様に,
入出力関係を決める「システムの特性」を知りたい

●先程の例では
xのラプラス変換をX，uのラプラス変換をUとしたとき，

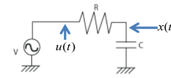
$$X = \boxed{\frac{1}{sRC+1}} U \qquad U \rightarrow \boxed{G} \rightarrow X$$

この部分が入出力関係を決めている．伝達関数G．
s=jωを代入すればフーリエ変換の伝達関数と全く同じ．

$$F(\omega) \rightarrow \boxed{H(\omega)} \rightarrow X(\omega)$$

伝達関数

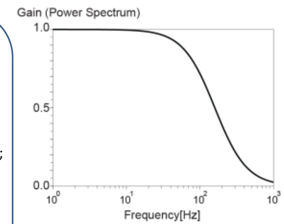
$$H(\omega) = \frac{1}{sRC+1} = \frac{1}{RC}\frac{1}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$



s=jωを代入して，周波数応答を見てみる

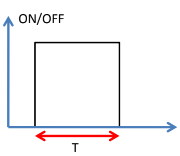
Scilabソース

```
R=1000;        //抵抗 1kΩ
C=10^(-6);     //コンデンサ1μF
f=[0:1000];    //周波数
w=2 * %pi * f; //角周波数

//応答
H=1/(R*C) * ones(f) ./ (%i*w + 1/(R*C));

//パワースペクトル
power_spec = H .* conj(H);

//片対数グラフで表示
plot2d1("oln",f,power_spec);
```



1kΩの抵抗と1μFのコンデンサで，
1kHz程度以上の周波数を阻止する
ローパスフィルタが出来た．

時間幅Tのパルスを与えると？



$$u(t) = \begin{cases} V & 0 \le t \le T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

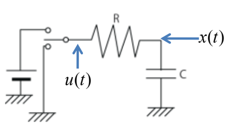
この入力のラプラス変換は、

$U(s) =$

$=$

$=$

$=$



出力のラプラス変換は、
システムの伝達関数をかけて

$X =$

時間幅Tのパルスを与えると？

$$X = \frac{1}{sRC+1}\frac{1-e^{-sT}}{s}V$$

$=$

$=$

これは、

$$\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{CR}}\right)V \text{ と、} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{CR}}\right)e^{-sT}V$$

の組み合わせ

前者の逆ラプラス変換はすでに
見たように

$$V(1-e^{-\frac{1}{RC}t})$$

後者の逆ラプラス変換は、
exp(-sT)が掛かっている。これ
はラプラス変換表により、
Tの時間遅れを意味するので、

ただし、t≧T

時間幅Tのパルスを与えると？

結局、応答は、t<Tでは、

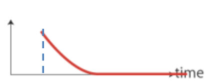
$$V(1-e^{-\frac{1}{RC}t})$$

これは元々求めたものと同じ。
t≧Tでは、

$=$

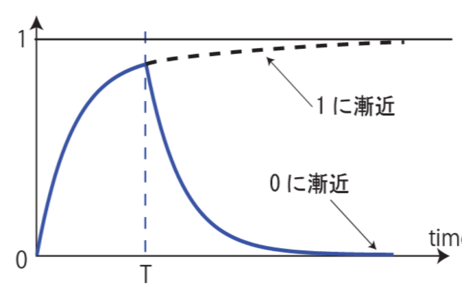
$=$

定数　減衰項



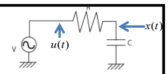
これは放電による減衰を意味する
t=Tでは2式は一致する

時間幅Tのパルスを与えると？まとめ



$$V(1-e^{-\frac{1}{RC}t}) \qquad V(1-e^{-\frac{1}{RC}T})e^{-\frac{1}{RC}(t-T)}$$

伝達関数まとめ



F(ω) ⟶ H(ω) ⟶ X(ω)　　U → G → X

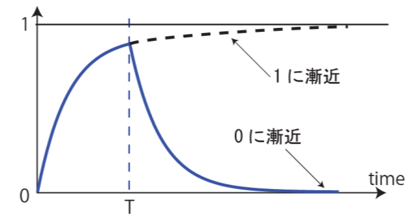
（1）システムの入出力関係を決める伝達関数Gをもとめる

●先程の例では、xのラプラス変換をX，uのラプラス変換をUとしたとき，

$$X = \boxed{\frac{1}{sRC+1}} U$$ この部分

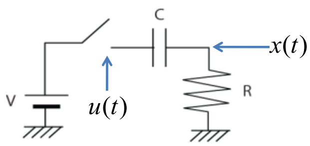
（2）入力のラプラス変換Uを求める
（3）X=GUによって出力のラプラス変換Xが得られる。
（4）逆ラプラス変換によって出力波形が得られる。

レポート課題(1)



R=1kΩ、C=1μF、T=1ms、V=1として、時刻0〜10msの間の電圧の変化をプロット、観察せよ。

ラプラス変換を使ってみる：ハイパス(1)

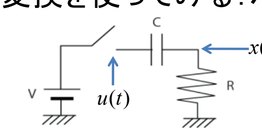


●入力：コンデンサの左側の電圧 u(t).

●出力：抵抗の電圧x(t).

（問題）スイッチを入れた後のx(t)の変化を調べよ

ラプラス変換を使ってみる：ハイパス(2)



●電流Iを考えて，

$$u = RI + \frac{1}{C}\int I dt$$

$$x = RI$$

$$I = \frac{x}{R}$$

$$u = x + \frac{1}{C}\int \frac{x}{R} dt$$

●xのラプラス変換をX，
●uのラプラス変換をUとすると，

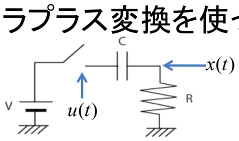
$$U =$$

（∴（ルール）積分⇒sで割る）

$$=$$

$$X =$$

ラプラス変換を使ってみる：ハイパス(3)



$$X = \frac{sCR}{sCR+1} U$$

これで伝達関数がもとまった
t=0でスイッチを入れるから

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V & 0 \le t \end{cases}$$

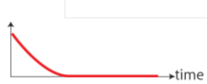
$$U(s) =$$

$$X =$$

$$=$$

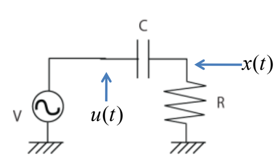
ラプラス変換の表を使って逆変換する

$$x(t) =$$



一瞬だけ電流が流れることがわかる

レポート課題（2）：ハイパスフィルタの伝達関数



ローパスの場合を参考に，上記回路の伝達関数を求め，
R=32Ω，C=100μFの場合の周波数応答を表示するコードを書け．

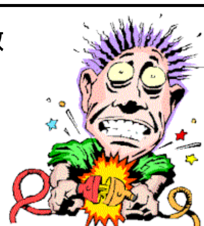
大体何Hz以下を阻止するハイパスフィルタになっているか，
観察の結果をコード中にコメントすること．

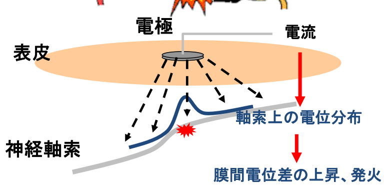
研究の現場で：神経の特性

Kaczmarek, Tongue (2000)　Kajimoto, Forehead (2006)

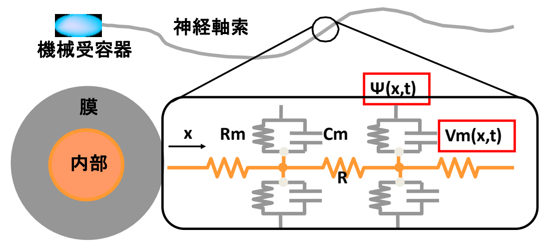
電気触覚ディスプレイ

経皮電気刺激





電気刺激による神経活動



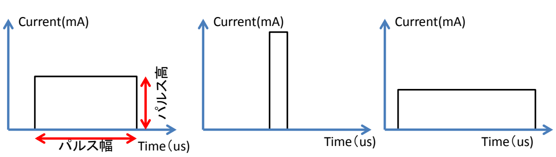
入力：膜外電位Ψ(x,t)

出力：膜間電位差Vm(x,t)

仮定：膜間電位差V_mが閾値V_{th}を越えたら発火

41

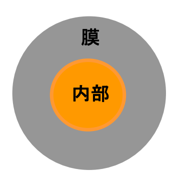
パルス幅とパルス高の関係は？



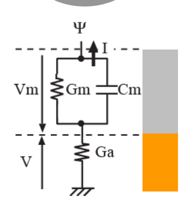
どれでも刺激できる（閾値に達する）

- ●パルス幅とパルス高さにはどのような関係があるのか
  - ✓おそらく反比例？実際は？
- ●最適なパルス幅はどのように考えたらよいか

神経軸索の単純化



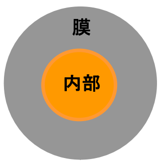
膜のコンデンサ容量：Cm
膜のコンダクタンス：Gm
内部のコンダクタンス：Ga
※コンダクタンス＝抵抗の逆数。
オームの法則はV=IRからI=GVとなる
Ψ：外部電位**入力**
Vm：膜間電位差**出力**
V：内部電位

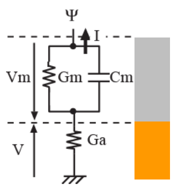


U → G → X

ステップ
（1）**入力**と**出力**を結ぶ**伝達関数**を求める
（2）具体的な入力を入れてみる

神経軸索の単純化





まずシステムの微分方程式をたてる
電圧の関係から

$$V_m = V - \Psi$$

電流の関係（キルヒホッフ）から、膜から流れ込む電流と内部電流は等しいので

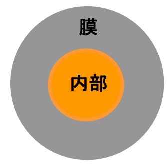
$$I = G_m V_m + C_m \dot{V}_m = -G_a V$$

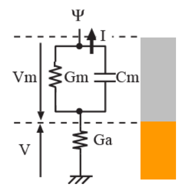
代入して

$$V_m = -\frac{G_m V_m + C_m \dot{V}_m}{G_a} - \Psi$$

VmとΨの関係式にはなった。
ただし混在した状態

単純化した回路の定式化





$$V_m = -\frac{G_m V_m + C_m \dot{V}_m}{G_a} - \Psi$$

両辺をラプラス変換。微分→sから

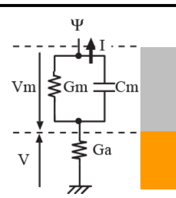
$$\tilde{V}_m = -\frac{G_m \tilde{V}_m + sC_m \tilde{V}_m}{G_a} - \tilde{\Psi}$$

$$\tilde{\Psi} = \left(-\frac{G_m + sC_m}{G_a} - 1\right)\tilde{V}_m = -\frac{G_m + G_a + sC_m}{G_a}\tilde{V}_m$$

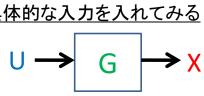
$$\tilde{V}_m = -\frac{G_a}{G_m + G_a + sC_m}\tilde{\Psi} = -\frac{G_a}{C_m}\frac{1}{s + \frac{G_m + G_a}{C_m}}\tilde{\Psi}$$

…入出力関係がもとまった

単純化した回路の定式化

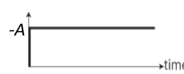


ステップ（2）に移行
（1）入力と出力を結ぶ伝達関数を求める
（2）具体的な入力を入れてみる



入力電圧としてステップ入力を考える

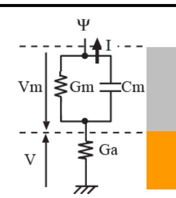
$$\Psi(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -A & 0 \le t \end{cases} \Rightarrow \tilde{\Psi}(s) = -\frac{1}{s}A$$



代入して、

$$\tilde{V}_m = \frac{G_a}{C_m}\frac{1}{s + \frac{G_m + G_a}{C_m}}\frac{A}{s}$$

単純化した回路の定式化



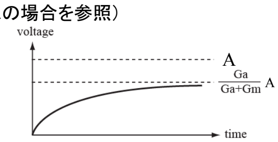
$$\tilde{V}_m = \frac{G_a}{C_m}\frac{1}{s + \frac{G_m + G_a}{C_m}}\frac{A}{s}$$

部分分数展開により、

$$\tilde{V}_m = \frac{G_a}{C_m}\frac{C_m}{G_m + G_a}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{G_m + G_a}{C_m}}\right)A$$

逆ラプラス変換すると（ローパスの場合を参照）

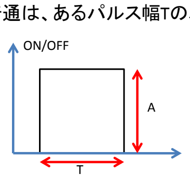
$$V_m = \frac{G_a}{G_m + G_a}\left(\underbrace{1}_{\text{定常成分}} - \underbrace{e^{-\frac{G_m + G_a}{C_m}t}}_{\text{過渡成分}}\right)A$$

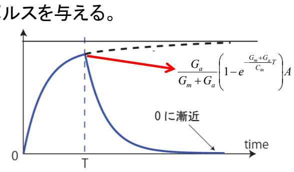


最終的には抵抗で分圧された電圧に収束

パルス幅とパルス高さの関係は？

普通は、あるパルス幅Tのパルスを与える。





このとき、神経膜間電位差Vmの最大値は、時刻Tで、

$$V_m(T) = \frac{G_a}{G_m + G_a}\left(1 - e^{-\frac{G_m + G_a}{C_m}T}\right)A$$

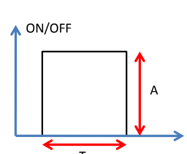
これが神経活動を生じる閾値$V_{threshold}$を超えるかどうかが問題

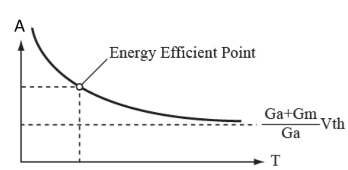
パルス幅とパルス高さの関係は？

$$V_{th} = \frac{G_a}{G_m + G_a}\left(1 - e^{-\frac{G_m + G_a}{C_m}T}\right)A \Rightarrow A = \frac{G_m + G_a}{G_a}\left(1 - e^{-\frac{G_m + G_a}{C_m}T}\right)^{-1}V_{th}$$

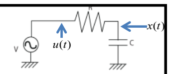
●パルス幅が無限に大きい場合(T→∞)、$A = \frac{G_m + G_a}{G_a}V_{th}$ で活動

●通常、エネルギーの最小化を考える（組織の損傷を防ぐため）
ジュール熱∝A^2Tから最適パルス幅が決まる。





今日の話まとめ



F(ω) → H(ω) → X(ω)　　U → G → X

フーリエ変換で扱えない、非定常な状況をラプラス変換で扱う

システムの応答は次のようなステップで求めることが出来る

（1）システムの入出力関係を決める伝達関数Gをもとめる

（2）入力のラプラス変換Uを求める

（3）X=GUによって出力のラプラス変換Xが得られる。

（4）逆ラプラス変換によって出力波形が得られる。