インタラクティブシステム論
第8回

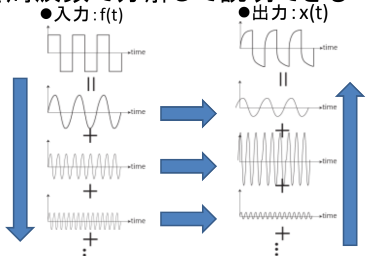
梶本裕之
Twitter ID kajimoto
ハッシュタグ #ninshiki

日程

4/12 イントロダクション
4/19 Scilabの紹介（西6号館3階PCルーム）
4/26 フーリエ変換
5/03 休日
5/10 フーリエ変換と線形システム
5/17 信号処理の基礎
5/24 信号処理応用1（相関）
5/31 信号処理応用2（画像処理）
6/07 ～中間チェック ～
6/14 出張により休講
6/21 ラプラス変換
6/28 古典制御の基礎
7/05 行列
7/12 行列と最小二乗法
7/19 ロボティクス
7/26 ～期末チェック～

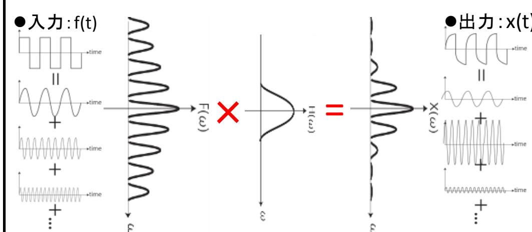
（復習：フーリエ級数展開）歪みを周波数で分解して説明できる

●入力：f(t)　●出力：x(t)



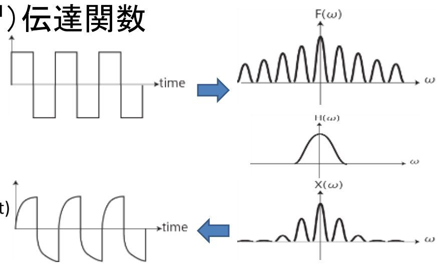
（1）入力f(t)を周波数分解する
（2）周波数ごとの出力の振幅と位相を求める.
（3）合計すると出力が得られる.
これを連続関数で考えるとどうなるか？

（復習：フーリエ変換）入出力の関係：関数同士の掛け算



（1）入力f(t)を周波数分解⇒F(ω)
（2）周波数ごとにどれだけ振幅と位相が変わるか：H(ω)
（3）出力（のフーリエ変換）：X(ω)=H(ω)*F(ω)
（4）逆フーリエ変換すると出力が得られる：x(t)

（復習）伝達関数



フーリエ空間では，入出力は単なる掛け算で表される.
$X(\omega) = H(\omega) \times F(\omega)$

この入出力関係を定義するシステムの性質H(ω)を伝達関数と呼ぶ.

（復習）伝達関数H(ω)を求めるには？

$F(\omega) \rightarrow \boxed{H(\omega)} \rightarrow X(\omega)$

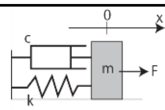
H(ω)は，周波数ωの信号を入力したときの出力の振幅と位相を表す．だから．．．

1. ある周波数ωの正弦波を入力.

2. 出力の振幅と位相を測定.
   - 入出力間の振幅の比率amp=|H(ω)|
   - 入出力間の位相差phase＝∠H(ω)

3. この周波数での伝達関数は
   - H(ω)=amp×exp(j*phase)．
4. 周波数を変えて測定すれば，H(ω)が得られる.

（復習）式の上で「計測」



$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f$$

$f=\exp(j\omega t)$ ●ある周波数2πf=ωの正弦波を入力

$x(t)=H(\omega)\exp(j\omega t)$ ●同じ周波数で振幅と位相の異なる出力が得られる

このx(t)の微分は？

$$\dot{x}(t)=j\omega H(\omega)\exp(j\omega t)$$
$$=j\omega x(t)=sx(t)$$

同様に2階微分は

$$\ddot{x}(t)=(j\omega)^2H(\omega)\exp(j\omega t)$$
$$=s^2x(t)$$

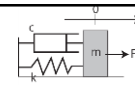
jωと書くのがわずらわしいのでsと書く
（本当はもっと意味があるが，とりあえず）

元の式に代入 $(ms^2+cs+k)H(\omega)\cancel{\exp(j\omega t)}=\cancel{\exp(j\omega t)}$

$$\therefore H(\omega)=\frac{1}{ms^2+cs+k}$$

s=jωを代入すれば，
システムの伝達関数に他ならない．

しかし実際は．．．



●時刻t≧0だけ考えればよい場合がほとんど（t=0が「初期状態」）

●入力f(t)がフーリエ変換出来ない状況が**普通に**存在する

$$F(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & 0\le t\end{cases}$$

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & 0\le t\end{cases}$$

$$\int_{t=-\infty}^{\infty}F(t)\exp(-j\omega t)dt=\int_{t=0}^{\infty}1\exp(-j\omega t)dt=\left[\frac{\exp(-j\omega t)}{-j\omega}\right]_0^{\infty}=\frac{1-\exp(-j\omega\infty)}{j\omega}$$

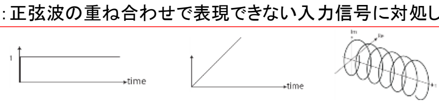
？？

$$\int_{t=-\infty}^{\infty}F(t)\exp(-j\omega t)dt=\int_{t=0}^{\infty}t\exp(-j\omega t)dt=\cdots$$

無限遠で収束しない関数は，積分をうまく処理できない
要は，正弦波の重ね合わせで表現できない．

拡張しよう

課題：正弦波の重ね合わせで表現できない入力信号に対処したい



信号を別の関数の重ね合わせで表現したい．

その関数は，
- ✓exp(-jωt)の自然な拡張でありたい
- ✓微積分に対する不変性は保ちたい

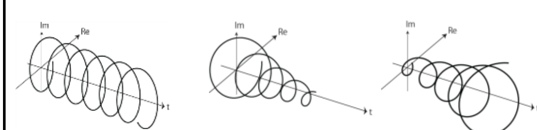
新たな基底関数として，**exp(-st)**を考える．
ただしsはもはや虚数jωではなく，複素数．

exp(-st)

実質的には2変数の関数

$$\exp(-st)=\exp(-(c+j\omega)t)$$
$$=\underbrace{\exp(-ct)}_{\text{増大or減衰成分}}\times\underbrace{\exp(-j\omega t)}_{\text{回転成分}}$$

●c=0　●c＞0　●c＜0



微積分に対するexp(st)の不変性

exp(jωt)の場合と同様，exp(st)も微分，積分しても関数の形は不変．

$$\frac{d}{dt}\exp(st)=s\exp(st)\qquad\int\exp(st)dt=\frac{1}{s}\exp(st)$$

$$\frac{d^n}{dt^n}\exp(st)=s^n\exp(st)\qquad\underbrace{\iiint}_{n}\exp(st)dt=\frac{1}{s^n}\exp(st)$$

微分⇒　sをかける操作
積分⇒　sで割る操作

ラプラス(Laplace)変換：フーリエ変換の拡張

フーリエ変換

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

ラプラス変換

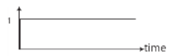
$$L(f(t))=F(s)=\int_0^{\infty}f(t)\exp(-st)dt$$

<ちがい>
●純虚数jω⇒複素数sに拡張
●積分範囲は無限の過去を扱う必要がないため0から．

ラプラス変換の例：ステップ関数

ステップ関数
(階段関数)

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & 0\le t\end{cases}$$



フーリエ変換では扱うことができなかった入力

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)\exp(-st)dt$$

=

=

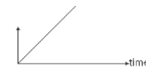
=

ただし積分が収束するsの範囲は，Re(s)>0

ラプラス変換の例：ランプ関数

ランプ関数

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & 0\le t\end{cases}$$



フーリエ変換では扱うことができなかった入力

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)\exp(-st)dt$$

=

=

=

=

ただし積分が収束するsの範囲は，Re(s)>0

ラプラス変換の例：sin，cos

$$f(t)=\sin(\omega t)$$

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$=\int_0^\infty \sin(\omega t)e^{-st}dt$$

=

=

=

=

=

ただし積分が収束するsの範囲内(Re(s)>0)

$$f(t)=\cos(\omega t)$$

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$=\int_0^\infty \cos(\omega t)e^{-st}dt$$

=

=

=

=

=

ラプラス変換の例：exp関数

$$f(t)=\exp(at)$$

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)\exp(-st)dt$$

=

=

=

ただし積分が収束するsの範囲は，Re(s-a)>0

ラプラス変換の例：微分

$f(t)$ のラプラス変換が分かっているとき，$\dot{f}(t)$ のラプラス変換は？

$$L(\dot{f}(t))=\int_0^\infty \dot{f}(t)\exp(-st)dt$$

=

=

=

ただしf(t)はt<0で0
また，ラプラス変換の積分範囲は0からではなく，0+から

（ルール）ラプラス変換では，微分はsをかけてf(0)を引く

ラプラス変換の例：積分

$f(t)$ のラプラス変換が分かっているとき，$\int_{t=0}^{t} f(t)dt$ のラプラス変換は？

$$L\left(\int_{t=0}^{t} f(t)dt\right)=\int_0^\infty\left(\int_{t=0}^{t} f(t)dt\right)\exp(-st)dt$$

=

=

=

（ルール）ラプラス変換では，積分は1/sをかけることに相当

sinとcosのラプラス変換を見比べる(1/2)

$$\sin(\omega t) \Rightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\cos(\omega t) \Rightarrow \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

（ルール）ラプラス変換では，微分はsをかけてf(0)を引く

$$\frac{d}{dt}\sin(\omega t) = \omega\cos(\omega t)$$

ルールより，cos(ωt)のラプラス変換を求めるには，
sin(ωt)のラプラス変換にsをかけ，ωで割ればよい(sin(0)=0より)

．．．確かにそうなっている

sinとcosのラプラス変換を見比べる(2/2)

$$\sin(\omega t) \Rightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\cos(\omega t) \Rightarrow \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

（ルール）ラプラス変換では，微分はsをかけてf(0)を引く

$$\frac{d}{dt}\cos(\omega t) = -\omega\sin(\omega t)$$

ルールより，sin(ωt)のラプラス変換を求めるには，
cos(ωt)のラプラス変換にsをかけ，f(0)を引き、-ωで割けば良い

．．．確かにそうなっている

ラプラス変換の例：時間遅れ

$f(t)$ のラプラス変換が分かっているとき，$f(t-\tau)$ のラプラス変換は？

$$L(f(t-\tau)) = \int_0^\infty f(t-\tau)\exp(-st)dt$$

$=$

$=$

$=$

ただしf(t)はt<0で0であることを利用した．

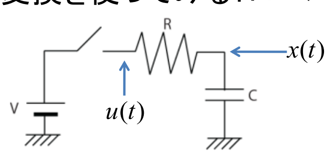
（ルール）
ラプラス変換では，τの時間遅れはexp(-s τ)をかけることに相当

ラプラス変換表

$1 \Rightarrow \frac{1}{s}$		$\exp(at) \Rightarrow \frac{1}{s-a}$	
$t \Rightarrow \frac{1}{s^2}$		$t\exp(at) \Rightarrow \left(\frac{1}{s-a}\right)^2$	
$t^n \Rightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$		$\dot{f}(t) \Rightarrow sF(s)$	
$\sin(\omega t) \Rightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$		$\int_{t=0}^{t} f(t)dt \Rightarrow \frac{1}{s}F(s)$	
$\cos(\omega t) \Rightarrow \frac{s}{s^2+\omega^2}$		$f(t-\tau) \Rightarrow \exp(-s\tau)F(s)$	

通常ラプラス逆変換は，表を見て行う

ラプラス変換を使ってみる：ローパス(1)

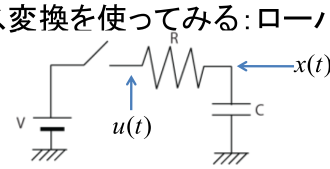


●入力：抵抗Rの左側の電圧 u(t).

●出力：コンデンサの電圧x(t).

（問題）スイッチを入れた後のx(t)の変化を調べよ

ラプラス変換を使ってみる：ローパス(2)



●電流Iを考えて，

$$u = RI + \frac{1}{C}\int Idt$$

$$x = \frac{1}{C}\int Idt$$

$$I = C\dot{x}$$

$$u = RC\dot{x} + x$$

●xのラプラス変換をX,
●uのラプラス変換をUとすると，

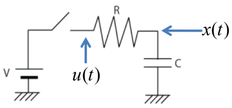
$U =$

(∴(ルール)微分⇒sをかける)

$=$

$X =$

ラプラス変換を使ってみる：ローパス(3)



$$X = \frac{1}{sRC+1}U$$

t=0でスイッチを入れるから

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ V & 0 \le t \end{cases}$$

$U(s) =$

$X =$

$=$

$=$

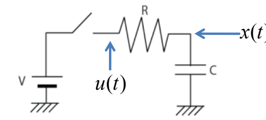
部分分数展開

$a = RC$

$b = -RC$

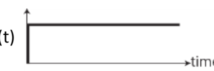
$X =$

ラプラス変換を使ってみる：ローパス(4)



$$X = V\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right)$$

入力u(t)



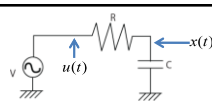
ラプラス変換表を見て逆変換する

$x(t) =$

定常成分　　過渡成分

出力x(t)

伝達関数



フーリエ変換の時と同様に，
入出力関係を決める「システムの特性」を知りたい

●先程の例では
xのラプラス変換をX，uのラプラス変換をUとしたとき，

$$X = \boxed{\frac{1}{sRC+1}}U$$

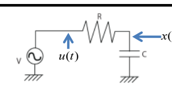
U → G → X

この部分が入出力関係を決めている．伝達関数G.
s=jωを代入すればフーリエ変換の伝達関数と全く同じ.

F(ω) → H(ω) → X(ω)

伝達関数

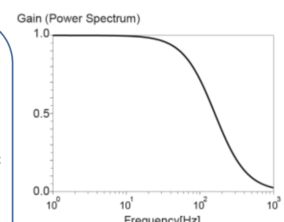
$$H(\omega) = \frac{1}{sRC+1} = \frac{1}{RC}\frac{1}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$



s=jωを代入して，周波数応答を見てみる

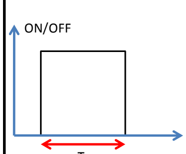
Scilabソース

```
R=1000;          //抵抗 1kΩ
C=10^(-6);       //コンデンサ1μF
f=[0:1000];      //周波数
w=2 * %pi * f;   //角周波数

//応答
H=1/(R*C) * ones(f) ./ (%i*w + 1/(R*C));

//パワースペクトル
power_spec = H .* conj(H);

//片対数グラフで表示
plot2d1("oln",f,power_spec);
```



1kΩの抵抗と1μFのコンデンサで，
1kHz程度以上の周波数を阻止する
ローパスフィルタが出来た．

時間幅Tのパルスを与えると？



$$u(t) = \begin{cases} V & 0 \le t \le T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

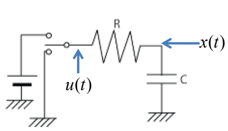
この入力のラプラス変換は、

$U(s) =$

$=$

$=$

$=$



出力のラプラス変換は、
システムの伝達関数をかけて

$X =$

時間幅Tのパルスを与えると？

$$X = \frac{1}{sRC+1}\frac{1-e^{-sT}}{s}V$$

$=$

$=$

これは、

$$\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{CR}}\right)V \text{ と、} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{CR}}\right)e^{-sT}V$$

の組み合わせ

前者の逆ラプラス変換はすでに見たように

$$V(1-e^{-\frac{1}{RC}t})$$

後者の逆ラプラス変換は、exp(-sT)が掛かっている。これはラプラス変換表により、**Tの時間遅れ**を意味するので、

ただし、t≧T

時間幅Tのパルスを与えると？

結局、応答は、t<Tでは、

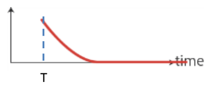
$$V(1-e^{-\frac{1}{RC}t})$$

これは元々求めたものと同じ。
t≧Tでは、

=

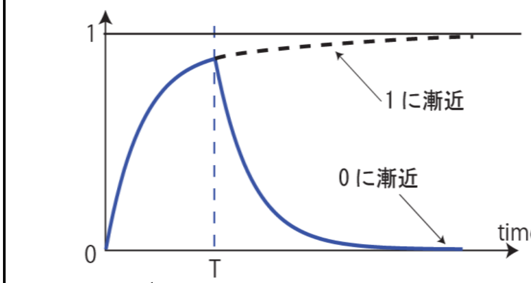
=

定数　減衰項



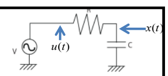
これは放電による減衰を意味する
t=Tでは2式は一致する

時間幅Tのパルスを与えると？まとめ



$$V(1-e^{-\frac{1}{RC}t}) \qquad V(1-e^{-\frac{1}{RC}T})e^{-\frac{1}{RC}(t-T)}$$

伝達関数まとめ



F(ω) ⟶ H(ω) ⟶ X(ω)　U ⟶ G ⟶ X

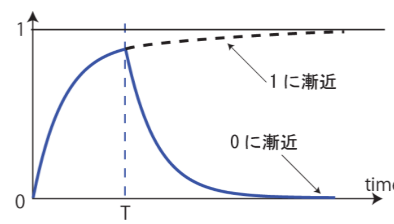
(1)システムの入出力関係を決める伝達関数Gをもとめる

●先程の例では、xのラプラス変換をX, uのラプラス変換をUとしたとき,

$$X=\boxed{\frac{1}{sRC+1}}U$$ この部分

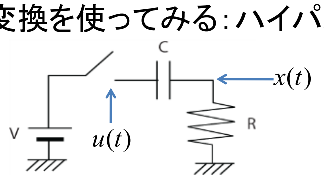
(2)入力のラプラス変換Uを求める
(3)X=GUによって出力のラプラス変換Xが得られる。
(4)逆ラプラス変換によって出力波形が得られる。

レポート課題(1)



R=1kΩ、C=1μF、T=1ms、V=1として、時刻0～10msの間の電圧の変化をプロット、観察せよ。

ラプラス変換を使ってみる：ハイパス(1)

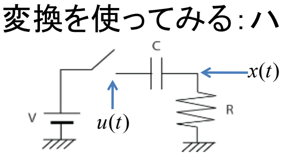


●入力：コンデンサの左側の電圧 u(t).

●出力：抵抗の電圧x(t).

(問題)スイッチを入れた後のx(t)の変化を調べよ

ラプラス変換を使ってみる：ハイパス(2)



●電流Iを考えて,

$$u=RI+\frac{1}{C}\int Idt$$

$$x=RI$$

$$I=\frac{x}{R}$$

$$u=x+\frac{1}{C}\int\frac{x}{R}dt$$

●xのラプラス変換をX,
●uのラプラス変換をUとすると,

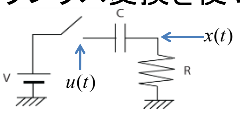
$U=$

(∵(ルール)積分⇒sで割る)

$=$

$X=$

ラプラス変換を使ってみる：ハイパス(3)



$$X = \frac{sCR}{sCR+1}U$$

これで**伝達関数**がもとまった
t=0でスイッチを入れるから

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ V & 0 \le t \end{cases}$$

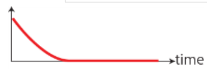
$U(s) =$

$X =$

$=$

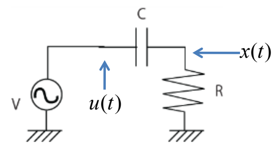
ラプラス変換の表を使って逆変換する

$x(t) =$



一瞬だけ電流が流れることがわかる

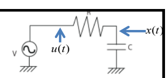
レポート課題(2)：ハイパスフィルタの伝達関数



ローパスの場合を参考に，上記回路の伝達関数を求め，
R=32Ω，C=100μFの場合の周波数応答を表示するコードを書け．

大体何Hz以下を阻止するハイパスフィルタになっているか，
観察の結果をコード中にコメントすること．

今日の話まとめ



F(ω) ⟶ H(ω) ⟶ X(ω)　　U ⟶ G ⟶ X

フーリエ変換で扱えない、非定常な状況をラプラス変換で扱う

システムの応答は次のようなステップで求めることが出来る

(1)システムの入出力関係を決める伝達関数Gをもとめる

(2)入力のラプラス変換Uを求める

(3)X=GUによって出力のラプラス変換Xが得られる。

(4)逆ラプラス変換によって出力波形が得られる。