インタラクティブシステム論
第10回

梶本裕之

日程

講義番号	講義日	講義内容
-	5/8	休講（全学のオンライン講義説明会）
1	5/15	イントロダクション
		Scilab課題
		上記資料のPython版
2	5/22	フーリエ変換
3	5/29	フーリエ変換と線形システム
4	6/5	信号処理の基礎
5	6/12	信号処理の応用1(相関)
6	6/19	信号処理の応用2(画像処理)
-	6/26	中間確認テスト ~~（現在のところ大学を予定）~~ 自習に変更
7	7/3	ラプラス変換
8	7/10	古典制御の基礎
9	7/17	行列
10	7/24	行列と最小二乗法
11	7/31	ロボティクス
-	8/7	期末テスト準備（自習）
-	8/14	期末確認テスト ~~（現在のところ大学を予定）~~

期末テストはオンラインで行います。方法については検討中です

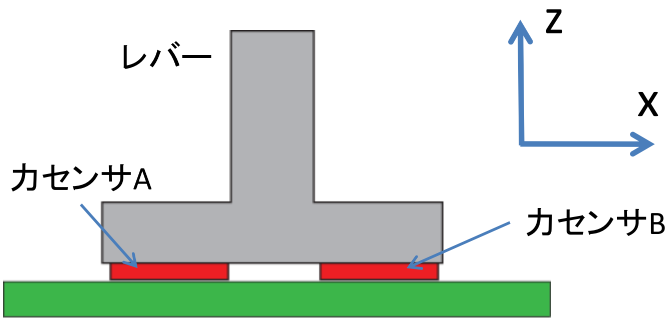
（復習）行列：データ列を変換するもの

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

（例１）
y:観測データ，A:システムの性質，x:媒介変数
（例２）
y:フーリエ空間での周波数成分，A:フーリエ変換行列，
x:実空間でのデータ系列

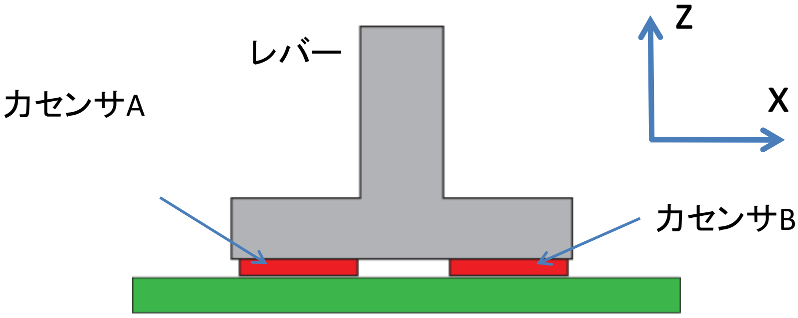
（復習）（例）2軸力センサ



$$F_Z = x_A + x_B$$
$$F_X = k(x_A - x_B)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}}_{\text{2x1ベクトル}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & -k \end{bmatrix}}_{\text{2x2行列}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}}_{\text{2x1ベクトル}}$$

（復習）力センサのキャリブレーション（較正）

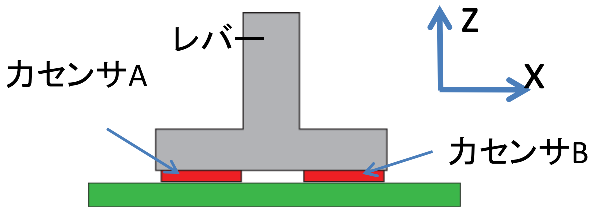


$$F_Z = k_1 x_A + k_2 x_B$$
$$F_X = k_3 x_A + k_4 x_B$$

$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

k1～k4のパラメータは元々未知.
これを求めなければ使えない！！

（復習）逆行列



$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

これを $\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ と書く.

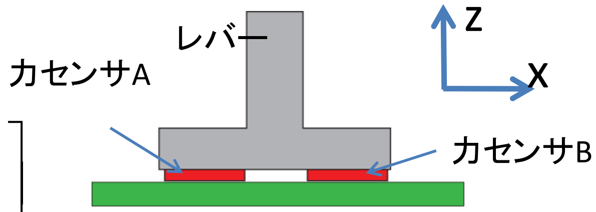
ここで,
「ある力を加えたときの各センサ出力は？」
という逆の関係を考える.

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{G}\mathbf{f}$$

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

（復習）逆行列の測定

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{f} \qquad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$



(1) Fz=1，Fx=0の力を加え，各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

各センサの出力に，逆行列の成分g1，g3が現れる！

(2) Fz=0,Fx=1の力を加え，各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 \\ g_4 \end{bmatrix}$$

各センサの出力に，逆行列の成分g2，g4が現れる！

（復習）逆行列の測定

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} \qquad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

G=A^{-1}の成分，g1～g4が得られたので，
その逆行列を計算すればAが得られる．

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

まとめると，

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 \\ g_4 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}$$

行列に単位行列をかけたことに相当

（復習）単位力でなくて良い

1回目の入力　　1回目の出力

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} f_{z1} \\ f_{x1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} f_{z2} \\ f_{x2} \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} m_1 \\ m_1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} m_2 \\ m_2 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

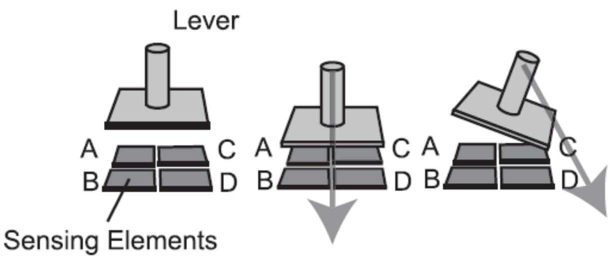
2回目の入力　　2回目の出力

$$\mathbf{GF} = \mathbf{M}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{MF}^{-1}$$

1. 2回既知の力ベクトルを加えて，各センサの出力を得る
2. 力ベクトルを並べたものを力行列**F**，
   センサ出力を並べたものを行列**M**とする
3. 力行列の逆行列**F**$^{-1}$を**M**にかければ，行列**G**が得られる．
4. **Gの逆行列が望んだ較正行列A**

（復習）逆行列が使えない場合



$$F_Z = k_1\left(x_A + x_B + x_C + x_D\right)$$
$$F_X = k_2\left(\left(x_A + x_B\right) - \left(x_C + x_D\right)\right)$$
$$F_Z = k_3\left(\left(x_A + x_C\right) - \left(x_B + x_D\right)\right)$$

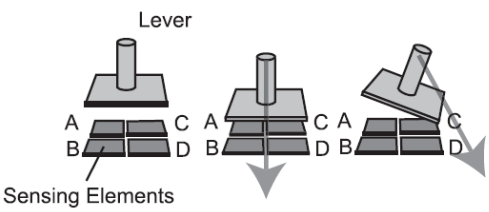
$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_z \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix}}_{3} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2 \\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix}}_{3\text{x}4行列} \underbrace{\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}}_{4}$$

一般には正方行列ではない！！

（例）6軸力センサには8つ以上のセンサエレメント内蔵

行列と最小二乗法

本日の**疑問**



$$3\left\{\begin{bmatrix} F_z \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix}\right. = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2 \\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix} \left.\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}\right\}4$$

3x4行列

- 一般には正方行列ではない

- 「逆行列」は定義できず，
キャリブレーションもできないのでは

本日の解答

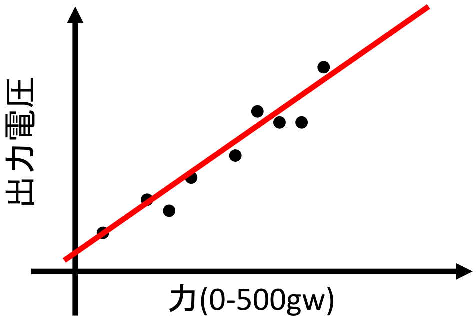
$$
\underbrace{\begin{bmatrix} F_z \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix}}_{3} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2 \\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix}}_{3\text{x}4\text{行列}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}}_{4}
$$

- 逆行列は定義できなくても
擬似逆行列(Pseudo Inverse Matrix)
は定義できる.

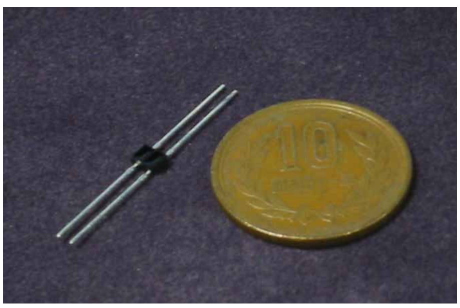
- またこれは**最小二乗法**という,
<u>工学全体を支える基礎的な考え</u>である.

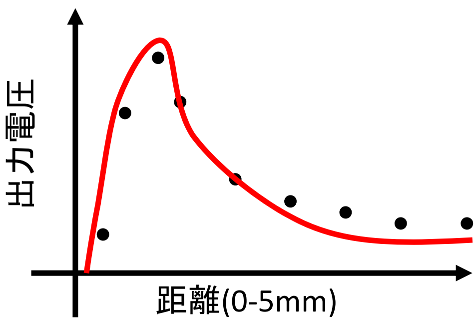
色々なセンサ

フィルム状力センサ



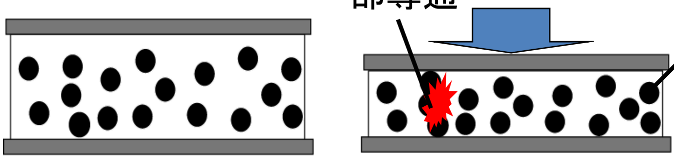
フォトリフレクタを用いた近接距離センサ

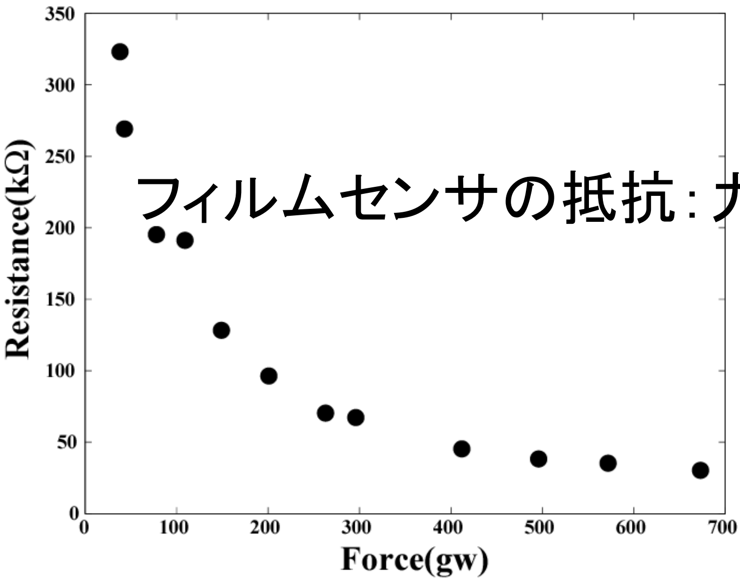




いかにして較正曲線を求め，センサとして使えるようにするか？

フィルムセンサの定式化（1）

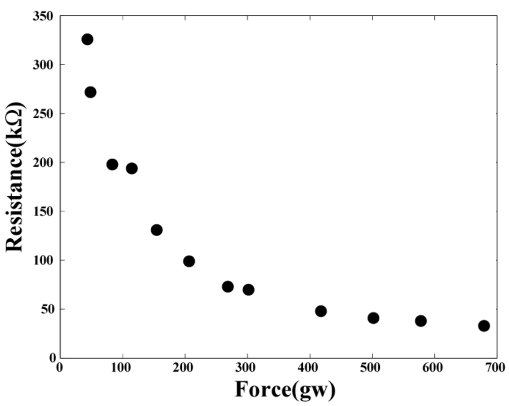


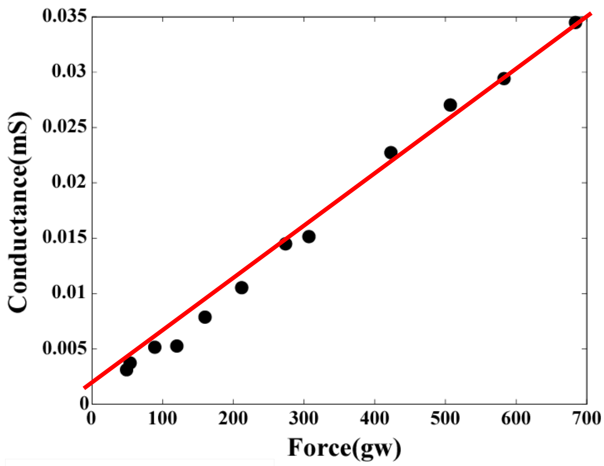


フィルムセンサの抵抗：力に反比例？

フィルムセンサの定式化（2）

抵抗ではなく**コンダクタンス(抵抗の逆数)**を見る



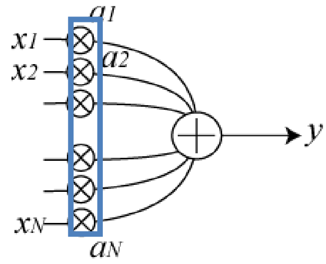


$$y = ax + b$$

x :
y :
a, b :

実験でなじみ深い「直線フィッティング」

一般化



$y = a_1 x + a_2$ から一般化

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_N x_N$$

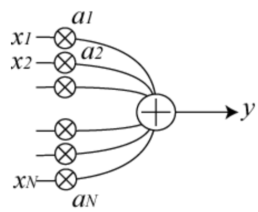
N個の既知入力[$x_1, x_2, \cdots x_N$]と
N個の未知パラメータ[$a_1, a_2, \cdots a_N$]の
積和によって1個の出力 y が決定されるシステム.

目的:N個の未知パラメータ[$a_1, a_2, \cdots a_N$]の同定(identification)

取れる手段:入力の操作と出力の計測

フィルムセンサの場合: $y = a_1 x_1 + a_2 x_2$ where $x_2 = 1$

行列の形にする



$$\boxed{y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_N x_N}$$

入力を変化させ，M回の出力を得る

$$y_1 = a_1 x_{11} + a_2 x_{12} + \cdots a_N x_{1N}$$
$$y_2 = a_1 x_{21} + a_2 x_{22} + \cdots a_N x_{2N}$$
$$\vdots$$
$$y_M = a_1 x_{M1} + a_2 x_{M2} + \cdots a_N x_{MN}$$

結局

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a}$$

X : MxN行列．入力．既知
y : Mx1ベクトル．出力．観測可能
a : Nx1ベクトル．未知.

もしM=Nなら $\mathbf{a} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{y}$

実際にはM≠NでX^{-1}は存在しないことがほとんど

二乗誤差を最小化する(最小二乗法)

いかにして

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a}$$

をaについて解くか.

$$\begin{cases} \mathbf{X}: \text{MxN行列. 入力. 既知} \\ \mathbf{y}: \text{Mx1ベクトル. 出力. 観測可能} \\ \mathbf{a}: \text{Nx1ベクトル. 未知.} \end{cases}$$

解けない(未知数より方程式の数が多い)
つまり, 式を完全に満たすベクトルaは, **無い**

(1)測定された出力ベクトルyが**誤差**を含んでいると仮定

$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{e}$ where $\mathbf{e} = [e_1, e_2, \cdots e_M]^T$

(2)**誤差の大きさ**が最小となるようなaを
もっともらしいaとして受け入れよう.

(3)**大きさ**として二乗和(二乗ノルム)を採用.

$$\sum_{i=1}^{M} e_i^2 = [e_1, e_2, \cdots e_M][e_1, e_2, \cdots e_M]^T = \mathbf{e}^*\mathbf{e}$$

誤差の「大きさ」

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{e}$$

$$\mathbf{e} =$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_M \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}$$

Tは転置.

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \sum_{i=1}^{M} e_i^2 = [e_1, e_2, \cdots e_M] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_M \end{bmatrix} = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}$$

誤差の「大きさ」を最小化する

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} - 2\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{a}$$

誤差の大きさが最小となるaを見つける

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}}\|\mathbf{e}\|^2 = \left[\frac{\partial}{\partial a_1}\|\mathbf{e}\|^2 \quad \frac{\partial}{\partial a_2}\|\mathbf{e}\|^2 \quad \cdots \quad \frac{\partial}{\partial a_N}\|\mathbf{e}\|^2\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}}\|\mathbf{e}\|^2 =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} =$$

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}} =$$

$$\mathbf{a} =$$

$$\|\mathbf{e}\|^2 = a^2x^2 - 2ayx + y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(a^2x^2 - 2ayx + y^2\right)$$
$$= 2x^2a - 2yx$$
$$= 0$$

$$\because \left((\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left((\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}$$

擬似逆行列

結論:未知パラメータのベクトルaは次の式で求められる.

$$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{\#}\mathbf{y}$$

ただし

$$\mathbf{X}^{\#} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$$

X$^{\#}$: 擬似逆行列(Pseudo Inverse)

擬似逆行列は逆行列の拡張となっている

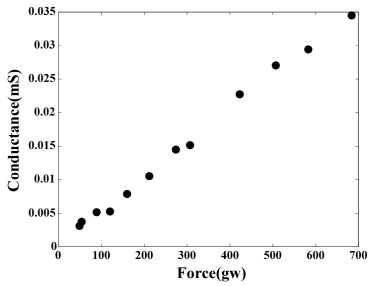
行列Xが正則な場合

$$\mathbf{X}^{\#} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$$

$$=$$

$$=$$

（再考）フィルムセンサの場合



$y = a_1 x + a_2$

- x : 力 : 既知入力
- y : コンダクタンス．測定結果
- a_1, a_2 : 未知パラメータ

これは

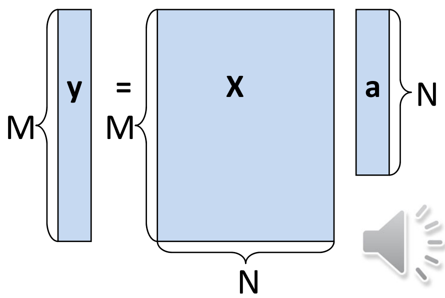
$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 \quad \text{where} \quad x_2 = 1$$

とみなせる.

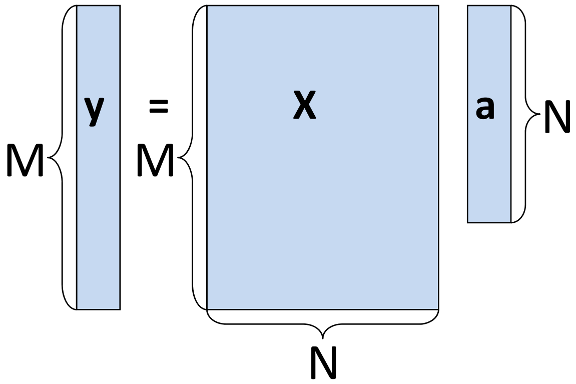
加える力を変え，M回測定する（2回以上）

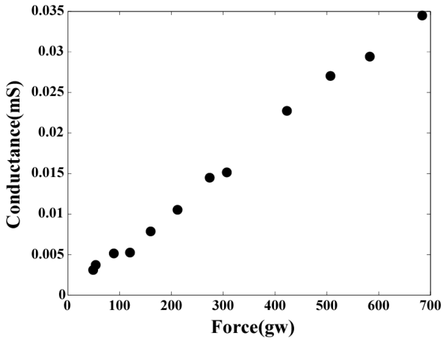
$$\begin{aligned} y_1 &= a_1 x_{11} + a_2 1 \\ y_2 &= a_1 x_{21} + a_2 1 \\ &\vdots \\ y_M &= a_1 x_{M1} + a_2 1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & 1 \\ x_{21} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{M1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$



(再考)フィルムセンサの場合





よって,

$$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{\#}\mathbf{y} \quad \text{where} \quad \mathbf{X}^{\#} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$$

により二つの未知パラメータを求めることが出来る.

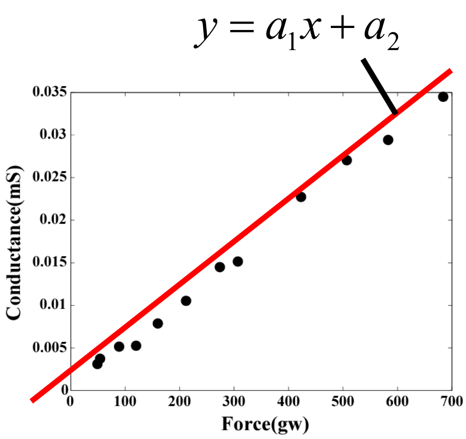
手作業で求めてみる

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \mathbf{X}^{\#}\mathbf{y} \\
&= (\mathbf{X}^{T}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{T}\mathbf{y} \\
&= \left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_M \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_M & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_M \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}$$

手作業で求めてみる

$$a_1 = \frac{M\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_j}{M\sum x_i^{\ 2} - \left(\sum x_i\right)^2}$$

$$a_2 = \frac{-\sum x_i \sum x_j y_j + \sum x_i^{\ 2} \sum y_j}{M\sum x_i^{\ 2} - \left(\sum x_i\right)^2}$$



これは，直線によるフィッティングの公式に他ならない

何を最小化したか

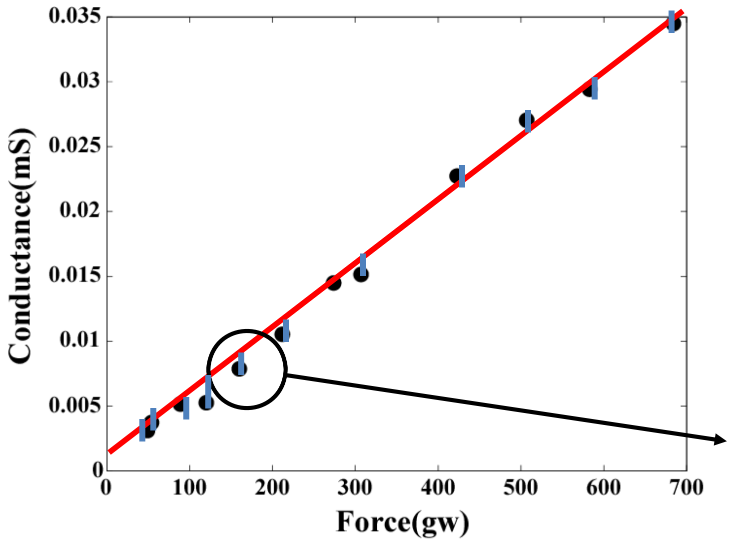
$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{e}$$

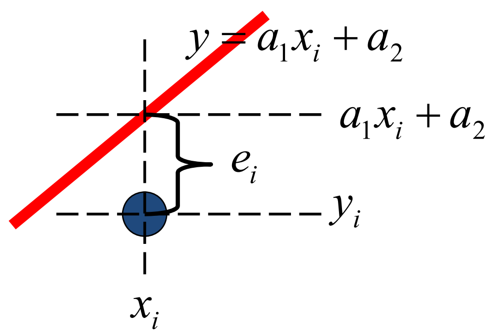
$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{a}$$

$$\boxed{\|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{e}^*\mathbf{e} = \sum_{i=1}^{M} e_i^{\ 2}}$$

$$y_i = a_1 x_i + a_2 + e_i$$

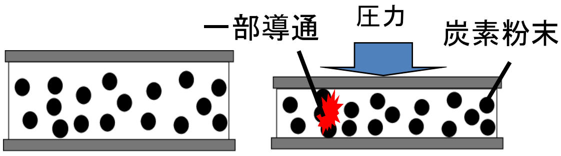
$$e_i = y_i - a_1 x_i - a_2$$





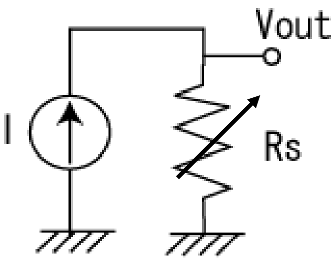
データと直線の，
「y軸に沿った距離」の二乗の和を最小化した．

（参考）実際の測定回路



- 「抵抗」を測定するなら

(a)



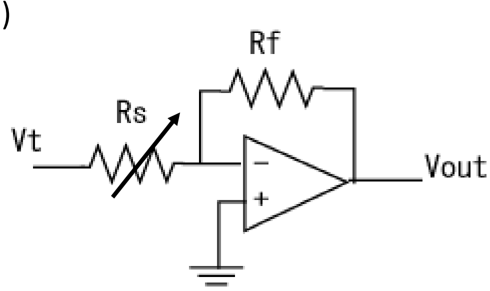
I: 定電流源
Vout:出力

Vout = I x Rs

出力電圧は抵抗に比例

- 「コンダクタンス（抵抗の逆数）」を測定するなら

(b)



Vt:定電圧源
Rs:フィルムセンサの抵抗
Rf:調整用固定抵抗

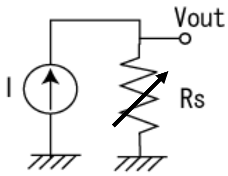
これは「反転増幅回路」
Vout = Rf/Rs x Vt

Vtが一定なら出力電圧は抵抗に反比例

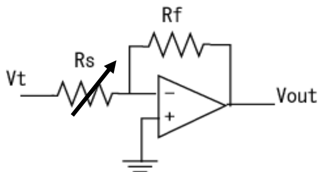
「抵抗」を測定して逆数をとればよいのでは？

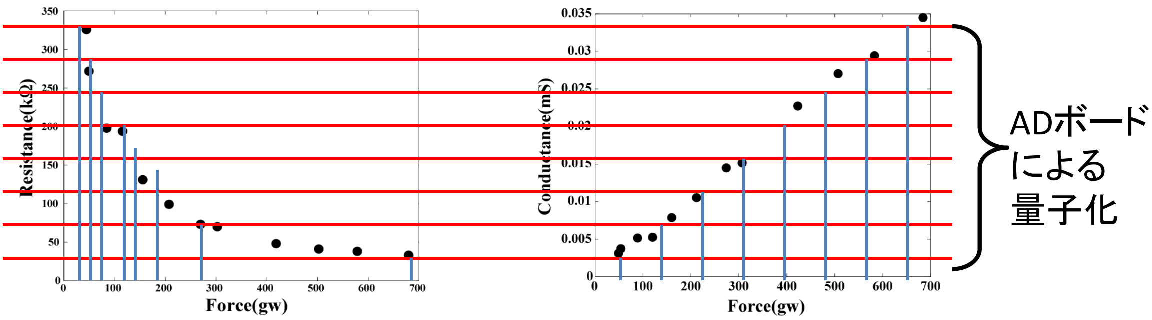
別にそれでもよい．しかし良い設計ではない．

(a)出力は抵抗に比例



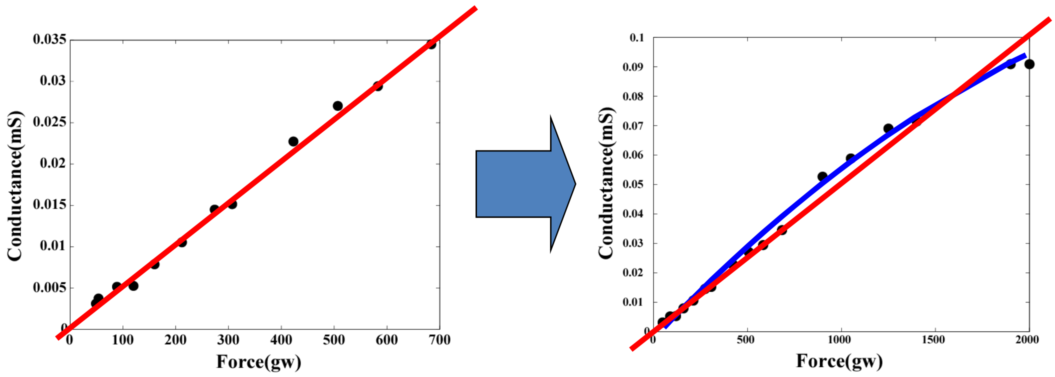
(b)出力はコンダクタンスに比例





- アナログ部による線形化の意義
＝ADボードによる量子化の影響を低減
「ダイナミックレンジを広げる」とも言う．

フィルムセンサを限界性能まで使いきりたい．



直線近似 $y = a_1 x + a_2$ ではフィッテイングできない気が．．．

(直線領域だけで使う，という方針も正しい)

多項式によるフィッティングを試みる．

$$y = a_1 x + a_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y &= a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \\ y &= a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 \end{aligned}$$

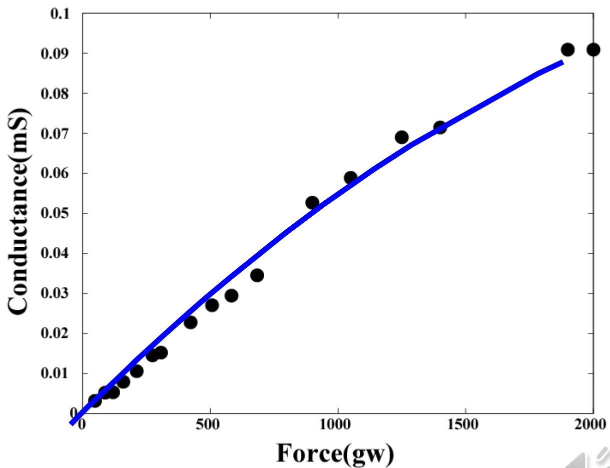
もはや直線フィッティングの公式は使えない．

多項式近似

$$y = a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \left\{ \begin{array}{l} x: \text{力：既知入力} \\ y: \text{コンダクタンス．測定出力} \\ a1, a2, a3: \text{未知パラメータ} \end{array} \right.$$

何度も測定する

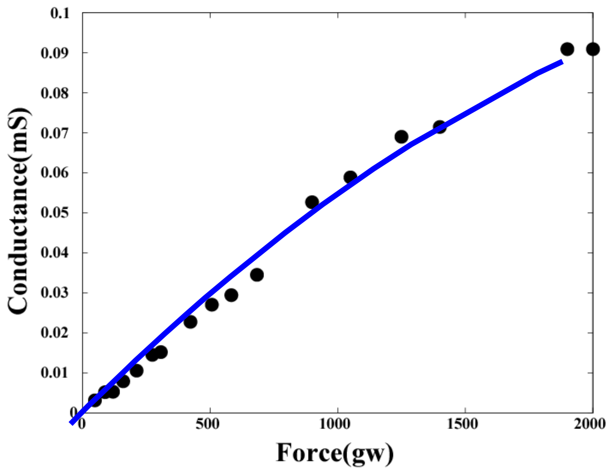
$$y_1 = a_1 x_1^{\ 2} + a_2 x_1 + a_3$$
$$y_2 = a_1 x_2^{\ 2} + a_2 x_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$y_M = a_1 x_M^{\ 2} + a_2 x_M + a_3$$



多項式近似

$$y_1 = a_1 x_1^{\ 2} + a_2 x_1 + a_3$$
$$y_2 = a_1 x_2^{\ 2} + a_2 x_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$y_M = a_1 x_M^{\ 2} + a_2 x_M + a_3$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{\ 2} & x_1 & 1 \\ x_2^{\ 2} & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_M^{\ 2} & x_M & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$



$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a}$ の形に出来たので，

$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{\#}\mathbf{y}$ where $\mathbf{X}^{\#} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$

により3つの未知パラメータを求めることが出来る. (計算機のしごと)

元に戻って．．．何をしたかったか

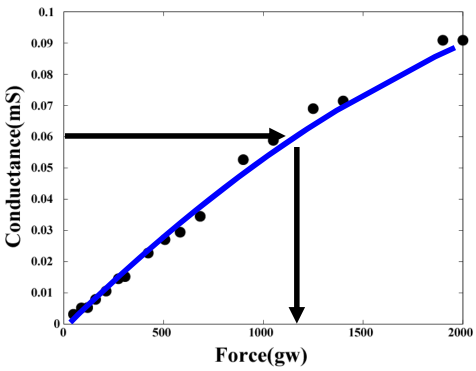
(1) $y = a_1 x \ + a_2$

(2) $y = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$

(3) $y = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$

x : 力 : 既知の入力
y : コンダクタンス. 測定した出力
a1, ... , a4: 未知パラメータ

モデルの未知パラメータを求めるのがゴールではない.
測定出力*y*から力*x*を逆算することがゴール.



(1) $x = (y - a_2)/a_1$

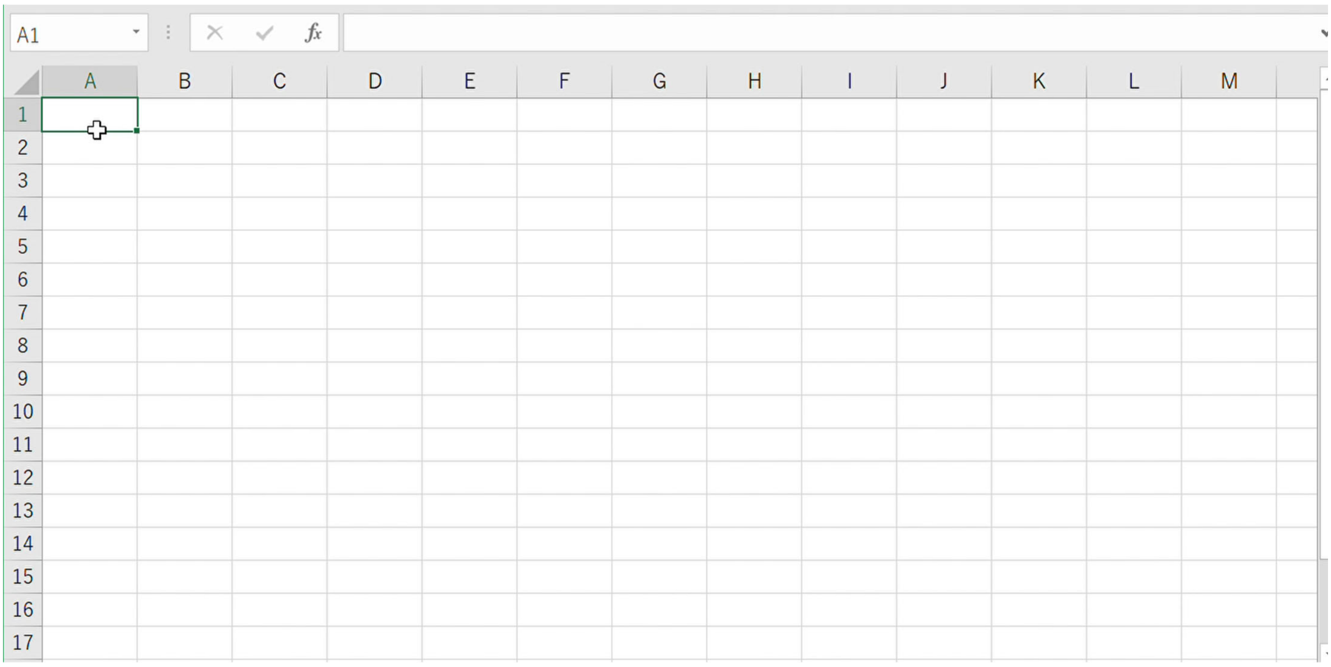
(2) $a_1 x^2 + a_2 x + (a_3 - y) = 0$

$$x = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^{\ 2} - 4a_1(a_3 - y)}}{2a_1}$$

(3) $a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + (a_4 - y) = 0$

$x = \cdots$ (3次方程式の解の公式)

デモ：Excelでのフィッティング



X軸は等間隔でなくて良いし、単調増加でなくて良い
N-1次多項式だと完璧なフィッティングになってしまうのはなぜ？（行列の形は？）

整数次数の多項式でなくて良い

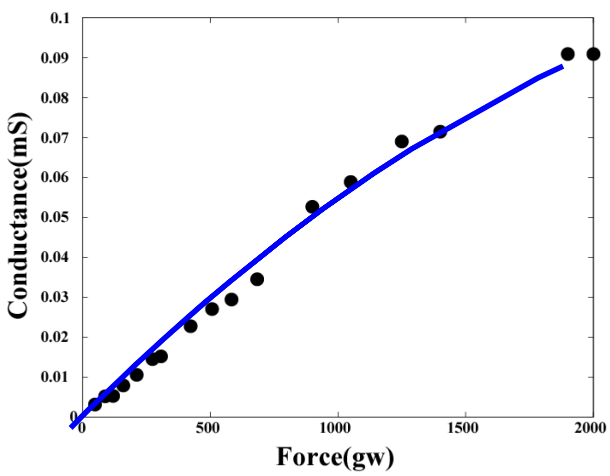
$$y_1 = a_1 x_1^{1/2} + a_2$$

$$y_2 = a_1 x_2^{1/2} + a_2$$

$$\vdots$$

$$y_M = a_1 x_M^{1/2} + a_M$$

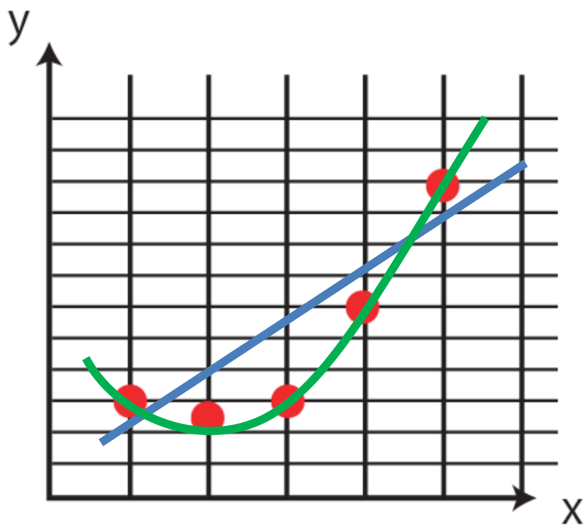
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{1/2} & 1 \\ x_2^{1/2} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_M^{1/2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$



関数であっても良い．たとえばlog(x)など．

レポート課題(1)

次のデータ系列に対して，
Scilab/pythonを用いて，
(1) 直線による近似，
(2) 2次曲線による近似を適用，
パラメータを求め，
曲線とデータをグラフに描け

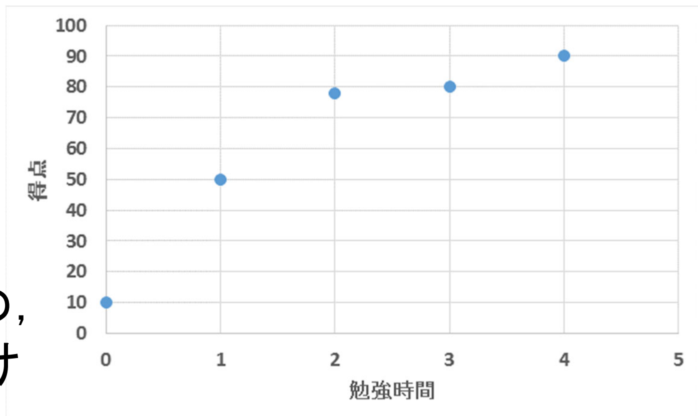


x	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
y	3.0	2.5	3.0	6.0	10.0

なおScilabでは行列Aの擬似逆行列はpinv(A)で直接求めることができる.
当然自分でinv(A'*A)*A'とやっても同じ.

レポート課題(2) (余裕のある人）

次のデータ系列に対して，
y=a1 * log(x+1) + a2
を仮定してパラメータを求め，
曲線とデータをグラフに描け



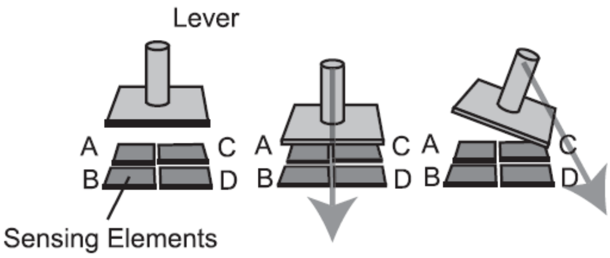
	Aさん	Bさん	Cさん	Dさん	Eさん
X（勉強時間）	3	4	2	0	1
Y（試験の点）	80	90	78	10	45

最小二乗法
事例紹介

最小二乗法事例紹介

- 多軸センサのキャリブレーション
- 直交（同期）検波の最小二乗法による理解
- フォトリフレクタのキャリブレーション

応用事例（1）多軸力センサ



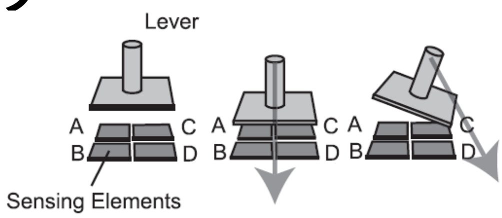
$$F_Z = k_1(x_A + x_B + x_C + x_D)$$
$$F_X = k_2((x_A + x_B) - (x_C + x_D))$$
$$F_Z = k_3((x_A + x_C) - (x_B + x_D))$$

$$3\left\{\begin{bmatrix} F_z \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix}\right. = \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2 \\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix}}_{3\text{x}4行列} \left.\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}\right\}4$$

一般には正方行列ではない！！
（例）6軸力センサには8つ以上のセンサエレメント内蔵

応用事例（1）多軸力センサ

$$\begin{bmatrix} F_z \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ k_5 & k_6 & k_7 & k_8 \\ k_9 & k_{10} & k_{11} & k_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}$$



K1からk12までの係数を求める問題。
Fx,Fy,Fzとして既知の力を何度も方向を変えて加える。出力x_A,x_B,x_C,x_Dの組が毎回得られる。

$$F_z = [k_1 k_2 k_3 k_4] \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}$$

一要素を取り出してみる

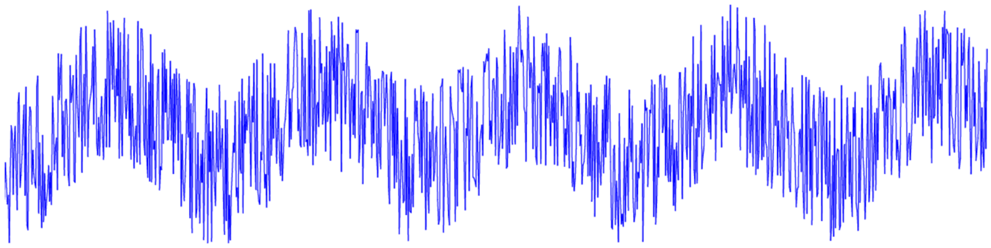
$$[F_{z1} F_{z2} \ldots F_{zN}] = [k_1 k_2 k_3 k_4] \begin{bmatrix} x_{A1} & x_{A2} & & x_{AN} \\ x_{B1} & x_{B2} & & x_{BN} \\ x_{C1} & x_{C2} & \cdots & x_{CN} \\ x_{D1} & x_{D2} & & x_{DN} \end{bmatrix}$$

N回の計測を行う

$$\begin{bmatrix} x_{A1} x_{B1} x_{C1} x_{D1} \\ x_{A2} x_{B2} x_{C2} x_{D2} \\ \vdots \\ x_{AN} x_{BN} x_{CN} x_{DN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{z1} \\ F_{z2} \\ \vdots \\ F_{zN} \end{bmatrix}$$

擬似逆行列の計算により係数を求めることができる

応用事例(2)：直交（同期）検波



問題を定式化

信号f(t)が，

f(t) = Asin(ωt + ϕ) + noise(t)

と仮定できるとする．周波数ωはわかっている．

計測データから，振幅Aと，位相ずれϕを求めるには？

数式（復習）

信号にsin(ωt)をかけ，積分する（＝内積をとる）

積分時間Tは充分長い．

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(A\sin(\omega t+\phi)+noise(t)\right)\sin(\omega t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T A\sin(\omega t+\phi)\sin(\omega t)dt + \frac{1}{T}\int_0^T noise(t)\sin(\omega t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T A\left(\sin(\omega t)\cos(\phi)+\cos(\omega t)\sin(\phi)\right)\sin(\omega t)dt \\
&= A\cos(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)dt + A\sin(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \sin(\omega t)\cos(\omega t)dt \\
&= A\cos(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}dt \\
&= \frac{A}{2}\cos(\phi)
\end{aligned}
$$

数式（復習）

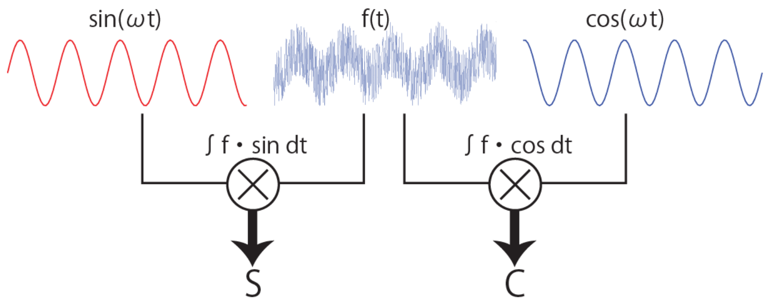
信号にcos(ωt)をかけ，積分する（＝内積をとる）
積分時間Tは充分長い．

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{1}{T}\int_0^T \big(A\sin(\omega t+\phi)+noise(t)\big)\cos(\omega t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T A\sin(\omega t+\phi)\cos(\omega t)dt+\int_0^T noise(t)\cos(\omega t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T A\big(\sin(\omega t)\cos(\phi)+\cos(\omega t)\sin(\phi)\big)\cos(\omega t)dt \\
&= A\cos(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \sin(\omega t)\cos(\omega t)dt + A\sin(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)dt \\
&= A\sin(\phi)\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1+\cos(2\omega t)}{2}dt \\
&= \frac{A}{2}\sin(\phi)
\end{aligned}
$$

直交（同期）検波：数式（復習）

$$S=\frac{A}{2}\cos(\phi)$$

$$C=\frac{A}{2}\sin(\phi)$$



位相差

$$\frac{C}{S}=\tan(\phi)$$

$$\phi=\arctan\left(\frac{C}{S}\right)$$

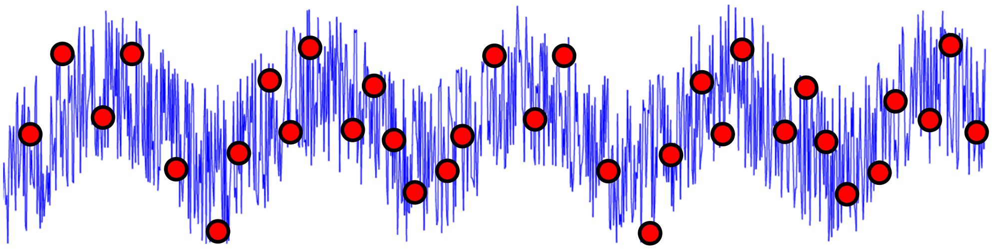
振幅

$$
\begin{aligned}
S^2+C^2 &= \frac{A^2}{4}\big(\cos^2(\phi)+\sin^2(\phi)\big) \\
&= \frac{A^2}{4}
\end{aligned}
$$

$$A=2\sqrt{S^2+C^2}$$

ノイズに埋もれた信号から位相差と振幅が求まった

最小二乗法で理解する



離散的に取り込まれるデータは次の形をしていると仮定

ただし周波数ωは既知.
得られたデータ[y1,y2,...,yN]から，振幅Aと位相∮を求める.

最小二乗法で理解する

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} =$$

$$=$$

$$=$$

これにより，行列の形，$\mathbf{y} = \mathbf{Xa}$ に変形することが出来た.

最小二乗法で理解する

$$\begin{bmatrix} A\cos(\phi) \\ A\sin(\phi) \end{bmatrix} = \mathbf{a} = \mathbf{X}^{\#}\mathbf{y} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \sin(\omega t_1) & \cdots & \sin(\omega t_N) \\ \cos(\omega t_1) & \cdots & \cos(\omega t_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\omega t_1) & \cos(\omega t_1) \\ \vdots & \vdots \\ \sin(\omega t_N) & \cos(\omega t_N) \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \sin(\omega t_1) & \cdots & \sin(\omega t_N) \\ \cos(\omega t_1) & \cdots & \cos(\omega t_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

$=$

残る

$\propto$

ほぼ消える
（適切なNで完全に0）

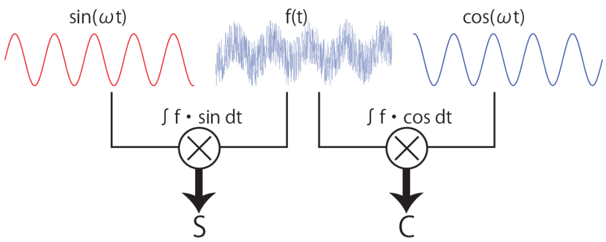
最小二乗法で理解する

$$\begin{bmatrix} A\cos(\phi) \\ A\sin(\phi) \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} \sin(\omega t_i) y_i \\ \sum_{i=1}^{N} \cos(\omega t_i) y_i \end{bmatrix}$$

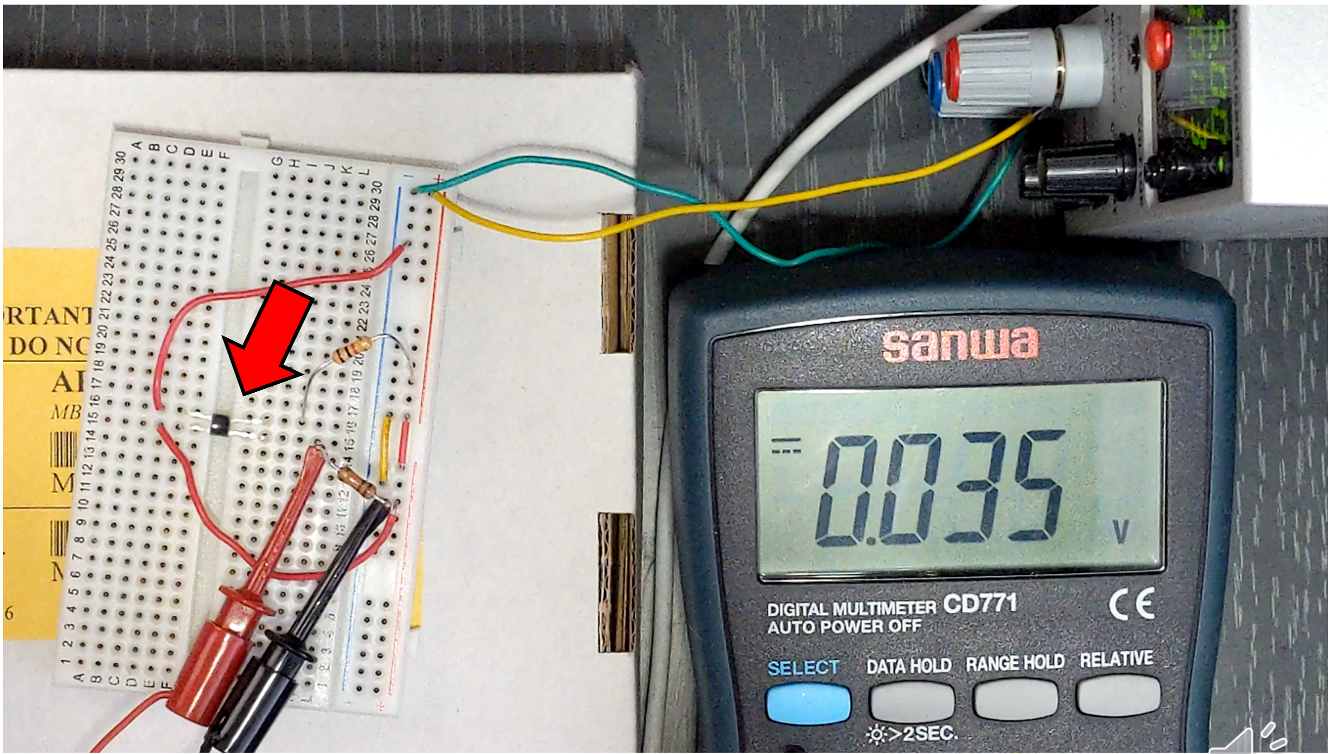
つまり，元信号y(t)に
- cos(ωt)をかけて積分したものと，
- sin(ωt)をかけて積分したもの

によって，振幅と位相を求めることができる．

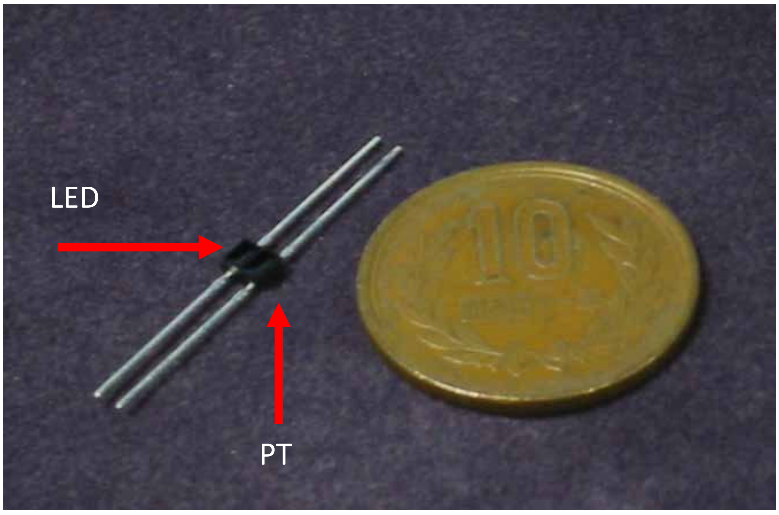
これはこれまでの数式的理解と全く同一．

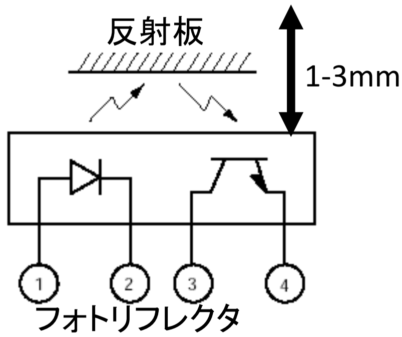


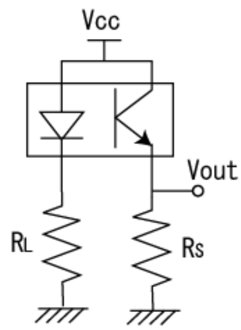
応用事例(3)
フォトリフレクタを用いた近接距離計の較正



フォトリフレクタを用いた近接距離計の較正

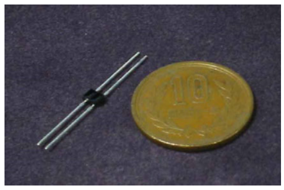


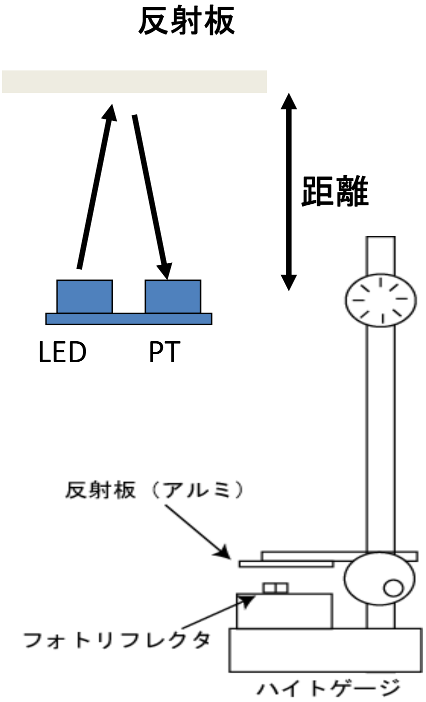


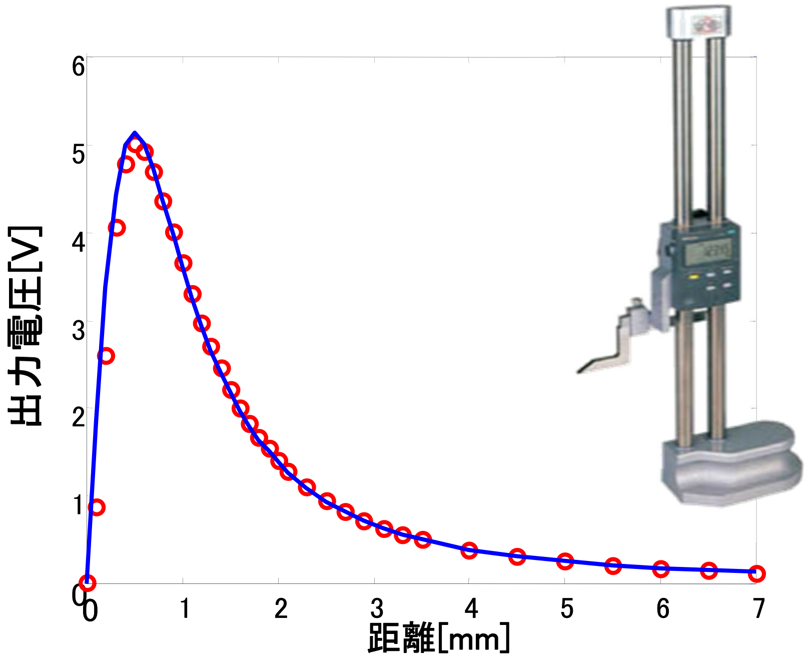


出力電圧は反射光量に比例.
出力電圧から反射板との距離を得たい.

測定

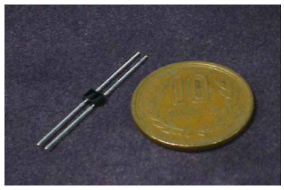


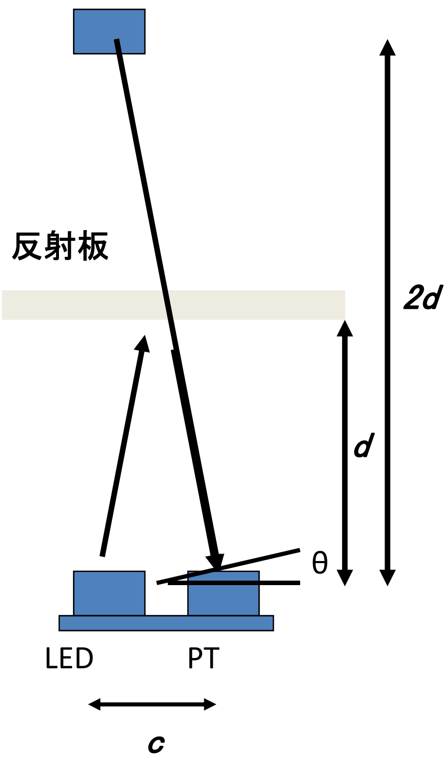




どのように較正曲線を求め，センサとして使えるようにするか？

モデル化（1）





反射板を鏡面とみなし，LEDの“像”から
PTへの光路を考える．

LEDを点光源とすると，PTの受光量は
LED像からみたPTの立体角Ωに比例．

LED像とPTの距離：

$$l = \sqrt{c^2 + (2d)^2}$$

PTの立体角：

$$\Omega = \frac{\cos\theta}{l^2}\Delta S$$

ΔS：PTの表面積

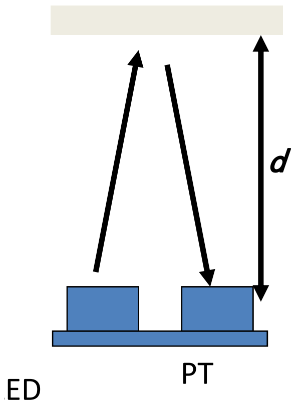
$$\cdots = \frac{k_1 d}{(d^2 + k_2)^{3/2}}$$

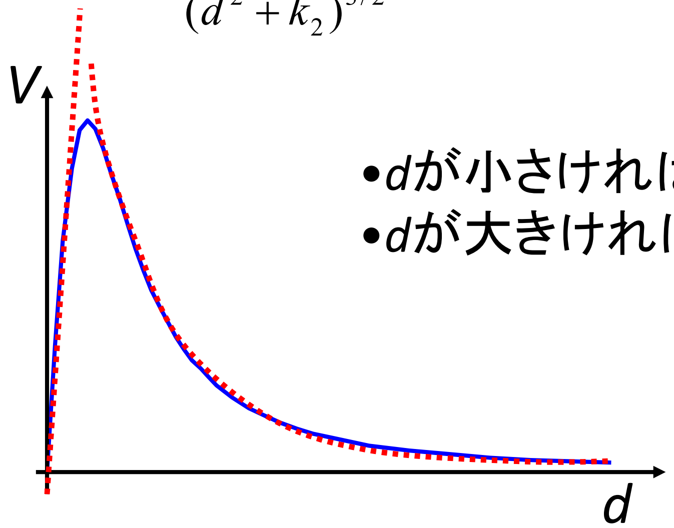
k_1, k_2 ：定数

モデル化（2）

PTの受光量が立体角Ωに比例するから，出力電圧も同様．

$$V = \frac{k_1 d}{(d^2 + k_2)^{3/2}}$$ ：理論曲線

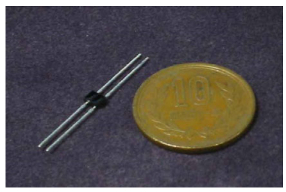




- dが小さければVはdに比例
- dが大きければ$1/d^2$に比例

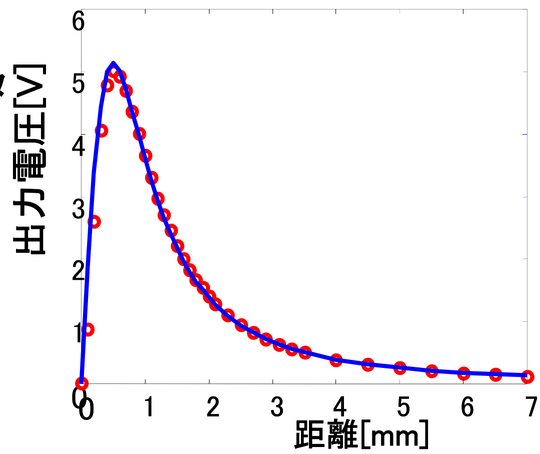
未知パラメータk_1, k_2を求めれば
入出力関係が記述できる

フィッティングの準備



$$V = \frac{k_1 d}{(d^2 + k_2)^{3/2}}$$

- d ：入力(距離)
- V ：出力（電圧）
- k_1, k_2：未知パラメータ



変形（線形化）

$$V^{2/3}(d^2 + k_2) = k_1^{2/3} d^{2/3}$$

$$V^{2/3} d^2 = k_1^{2/3} d^{2/3} - V^{2/3} k_2$$

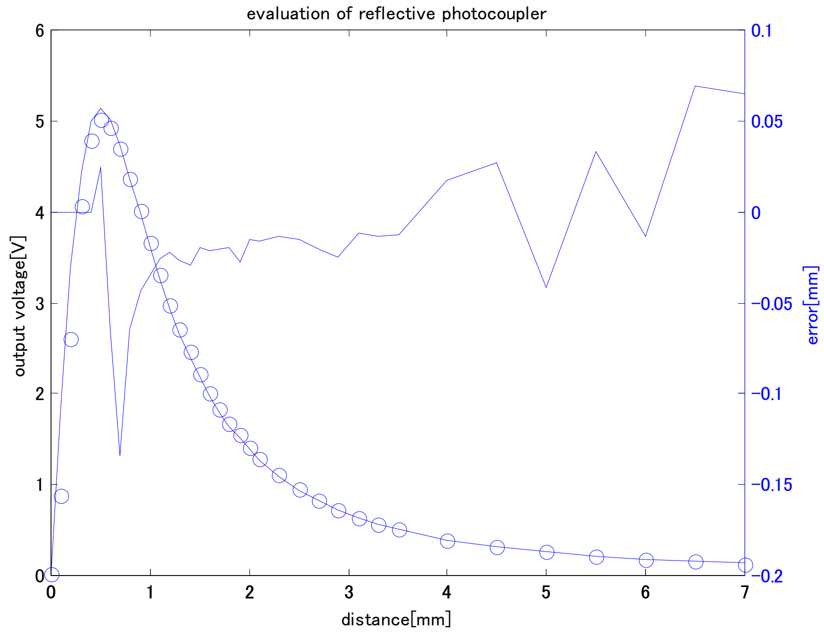
$$V^{2/3} d^2 = y$$
$$k_1^{2/3} = a_1$$
$$d^{2/3} = x_1$$
$$-V^{2/3} = x_2$$
$$k_2 = a_2$$

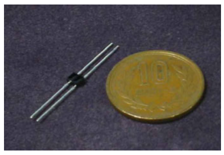
と置けば

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

- x_1, x_2, y ：既知
- a_1, a_2：未知

最小二乗法によって
パラメータを同定できる．





つまりこうした実際問題のフィッティングでは,
(1)数式によるモデル化
(2)線形の方程式に式変形
の手続きをとる. この時最小二乗誤差は多くの場合当初の意味を失う.
(2)を行わず手続き的に(逐次的に)最小二乗誤差を極小化していく方法もあり、その方が一般的な問題に適用できる(本講義の範囲外)。