

インタラクティブシステム論 第10回

梶本裕之

Twitter ID kajimoto

ハッシュタグ #ninshiki

日程

- 4/11 イントロダクション
- 4/18 フーリエ変換
- 4/25 フーリエ変換と線形システム
- 5/9 信号処理の基礎
- 5/16 (出張予定)
- 5/23 信号処理応用1(相関)
- 5/30 信号処理応用2(画像処理)
- 6/6 (出張予定) 中間確認テスト
- 6/13 ラプラス変換
- 6/20 古典制御の基礎
- 6/27 行列
- 7/4 行列と最小二乗法
- 7/11 (出張予定) インタラクティブシステムの実際(小泉先生)
- 7/18 ロボティクス
- 7/25 (出張予定) 期末確認テスト

行列復習

(センシングに現れる行列・逆行列)

(復習) 行列: データ列を変換するもの

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(例1)

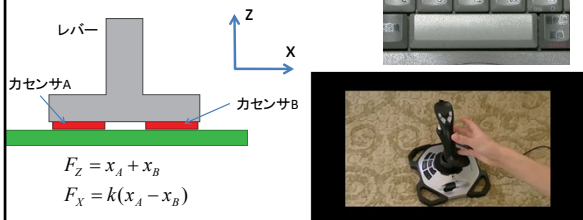
y: 観測データ, A: システムの性質, x: 媒介変数

(例2)

y: フーリエ空間での周波数成分, A: フーリエ変換行列,

x: 実空間でのデータ系列

(復習) (例) 2軸力センサ



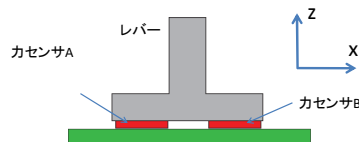
$$F_Z = x_A + x_B$$

$$F_X = k(x_A - x_B)$$

$$2 \times 1 \text{ベクトル} \left\{ \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} \right\} 2 \times 1 \text{ベクトル}$$

2x2行列

(復習) カセンサのキャリブレーション(較正)



$$F_Z = k_1 x_A + k_2 x_B$$

$$F_X = k_3 x_A + k_4 x_B$$

$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

$k_1 \sim k_4$ のパラメータは元々未知。
これを求めなければ使えない!!

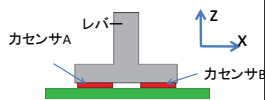
(復習) 逆行列

$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$$

これを $\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ と書く。

ここで、
「ある力を加えたときの各センサ出力は？」
という逆の関係を考える。

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{G}\mathbf{f} \quad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$



(復習) 逆行列の測定

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{f} \quad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$

(1) $F_Z=1, F_X=0$ の力を加え、各センサの出力を記録

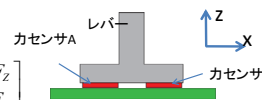
$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

各センサの出力に、逆行列の成分 g_1, g_3 が現れる！

(2) $F_Z=0, F_X=1$ の力を加え、各センサの出力を記録

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 \\ g_4 \end{bmatrix}$$

各センサの出力に、逆行列の成分 g_2, g_4 が現れる！



(復習) 逆行列の測定

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} \quad \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \end{bmatrix}$$



$\mathbf{G}=\mathbf{A}^{-1}$ の成分、 $g_1 \sim g_4$ が得られたので、
その逆行列を計算すればAが得られる。

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

まとめると、

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 \\ g_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}$$

行列に単位行列をかけたことに相当



(復習) 単位力だけでなく良い

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{z1} \\ f_{x1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{z2} \\ f_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

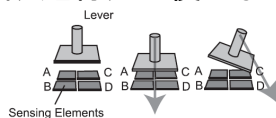
$$\mathbf{G}\mathbf{F} = \mathbf{M}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{M}\mathbf{F}^{-1}$$

- 2回既知のカベクトルを加えて、各センサの出力を得る
- カベクトルを並べたものを力行列F、センサ出力を並べたものを行列Mとする
- 力行列の逆行列F⁻¹をMにかければ、行列Gが得られる。
- Gの逆行列が望んだ較正行列A



(復習) 逆行列が使えない場合



Sensing Elements

$$F_Z = k_1(x_A + x_B + x_C + x_D)$$

$$F_X = k_2((x_A + x_B) - (x_C + x_D))$$

$$F_Z = k_3((x_A + x_C) - (x_B + x_D))$$

$$\begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \\ F_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2 \\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}$$

3x4行列

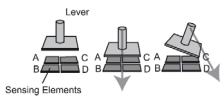
一般には正方行列ではない！！

(例)6軸力センサには8つ以上のセンサエレメント内蔵



行列と最小二乗法

本日の疑問



$$\begin{matrix} 3 \\ \left[\begin{matrix} F_z \\ F_x \\ F_y \end{matrix} \right] = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2 \\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix} \\ 4 \end{matrix}$$

3x4行列

•一般には正方行列ではない

•「逆行列」は定義できず、キャリブレーションもできないのでは

本日の解答

$$\begin{matrix} 3 \\ \left[\begin{matrix} F_z \\ F_x \\ F_y \end{matrix} \right] = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2 \\ k_3 & -k_3 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix} \\ 4 \end{matrix}$$

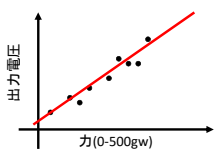
3x4行列

•逆行列は定義できなくても擬似逆行列(Pseudo Inverse Matrix)は定義できる。

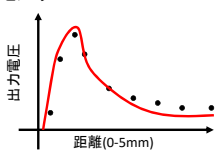
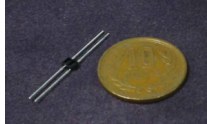
•またこれは最小二乗法という、工学全体を支える基礎的な考えである。

色々なセンサ

フィルム状力センサ

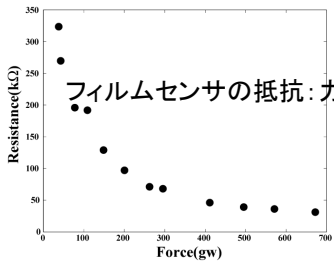
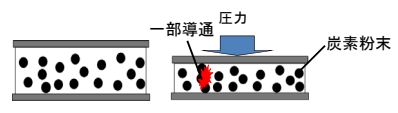


フォトフレクタを用いた近接距離センサ



いかにして較正曲線を求め、センサとして使えるようにするか？

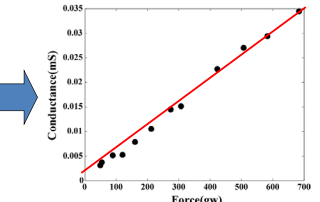
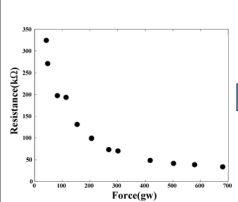
フィルムセンサの定式化(1)



フィルムセンサの抵抗: 力に反比例?

フィルムセンサの定式化(2)

抵抗ではなくコンダクタンス(抵抗の逆数)を見る

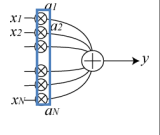


$$y = ax + b \quad \begin{cases} x: \\ y: \\ a, b: \end{cases}$$

実験でなじみ深い「直線フィッティング」

一般化

$$y = a_1x + a_2 \quad \text{から一般化} \\
 y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_Nx_N$$



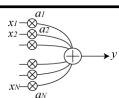
N個の既知入力 $[x_1, x_2, \dots, x_N]$ と
 N個の未知パラメータ $[a_1, a_2, \dots, a_N]$ の
 積和によって1個の出力 y が決定されるシステム。

目的: N個の未知パラメータ $[a_1, a_2, \dots, a_N]$ の同定(identification)
 取れる手段: 入力の操作と出力の計測

フィルムセンサの場合: $y = a_1x_1 + a_2x_2$ where $x_2 = 1$

行列の形にする

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_Nx_N$$



入力を変化させ、M回の出力を得る

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1x_{11} + a_2x_{12} + \dots + a_Nx_{1N} \\ y_2 &= a_1x_{21} + a_2x_{22} + \dots + a_Nx_{2N} \\ &\vdots \\ y_M &= a_1x_{M1} + a_2x_{M2} + \dots + a_Nx_{MN} \end{aligned}$$

結局

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} \quad \begin{cases} \mathbf{X}: M \times N \text{ 行列. 入力. 既知} \\ \mathbf{y}: M \times 1 \text{ ベクトル. 出力. 観測可能} \\ \mathbf{a}: N \times 1 \text{ ベクトル. 未知.} \end{cases}$$

もし $M=N$ なら

$$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{y}$$

実際には $M \neq N$ で \mathbf{X}^{-1} は存在しないことがほとんど

19

二乗誤差を最小化する(最小二乗法)

いかにして $\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a}$ を解くか.

- \mathbf{X} : $M \times N$ 行列. 入力. 既知
- \mathbf{y} : $M \times 1$ ベクトル. 出力. 観測可能
- \mathbf{a} : $N \times 1$ ベクトル. 未知.

解けない(未知数より方程式の数が多い)

つまり、式を完全に満たすベクトル \mathbf{a} は、**無い**

(1) 測定された出力ベクトル \mathbf{y} が誤差を含んでいると仮定
 $\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{e}$ where $\mathbf{e} = [e_1, e_2, \dots, e_M]^T$

(2) 誤差の大きさが最小となるような \mathbf{a} を
 もっともらしい \mathbf{a} として受け入れよう.

(3) 大きさとして二乗和(二乗ノルム)を採用.

$$\sum_{i=1}^M e_i^2 = [e_1, e_2, \dots, e_M] [e_1, e_2, \dots, e_M]^T = \mathbf{e}^* \mathbf{e}$$

20

誤差の「大きさ」

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{e}$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_M \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{e}^T \mathbf{e} \quad \text{Tは転置.}$$

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \sum_{i=1}^M e_i^2 = [e_1, e_2, \dots, e_M] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_M \end{bmatrix} = \mathbf{e}^T \mathbf{e}$$

21

誤差の「大きさ」を最小化する

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - 2\mathbf{y}^T \mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{a}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{a} \quad \|\mathbf{e}\|^2 = a^2x^2 - 2ayx + y^2$$

誤差の大きさが最小となる \mathbf{a} を見つける

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \|\mathbf{e}\|^2 = \left[\frac{\partial}{\partial a_1} \|\mathbf{e}\|^2 \quad \frac{\partial}{\partial a_2} \|\mathbf{e}\|^2 \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial a_N} \|\mathbf{e}\|^2 \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \|\mathbf{e}\|^2 =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$\mathbf{a}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} =$$

$$\mathbf{a}^T =$$

$$\mathbf{a} =$$

$$\therefore (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = ((\mathbf{X}^T \mathbf{X})^T)^{-1} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$$

22

擬似逆行列

結論: 未知パラメータのベクトル \mathbf{a} は次の式で求められる.

$$\mathbf{a} = \mathbf{X}^\# \mathbf{y}$$

ただし

$$\mathbf{X}^\# = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$$

$\mathbf{X}^\#$: 擬似逆行列(Pseudo Inverse)

23

擬似逆行列は逆行列の拡張である

行列 \mathbf{X} が正則な場合

$$\mathbf{X}^\# = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$$

$$=$$

$$=$$

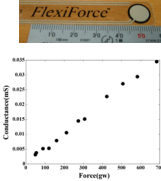
24

(再考) フィルムセンサの場合

$y = a_1x + a_2$ $\begin{cases} x: \text{力: 既知入力} \\ y: \text{コンダクタンス: 測定結果} \\ a_1, a_2: \text{未知パラメータ} \end{cases}$

これは $y = a_1x_1 + a_2x_2$ where $x_2 = 1$ とみなせる。

加える力を変え、M回測定する(2回以上)

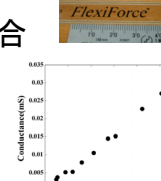
$$\begin{matrix} y_1 = a_1x_{11} + a_2 \cdot 1 \\ y_2 = a_1x_{21} + a_2 \cdot 1 \\ \vdots \\ y_M = a_1x_{M1} + a_2 \cdot 1 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & 1 \\ x_{21} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{M1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$


(再考) フィルムセンサの場合

$$\begin{matrix} M \\ \mathbf{y} \end{matrix} = \begin{matrix} M \\ \mathbf{X} \end{matrix} \begin{matrix} N \\ \mathbf{a} \end{matrix}$$

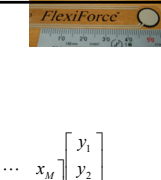
よって、 $\mathbf{a} = \mathbf{X}^\# \mathbf{y}$ where $\mathbf{X}^\# = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$

により二つの未知パラメータを求めることができる。



手作業で求めてみる

$$\mathbf{a} = \mathbf{X}^\# \mathbf{y} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

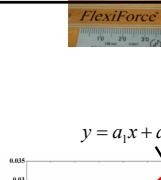
$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_M \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_{11} & 1 \\ x_{21} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{M1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix}$$


手作業で求めてみる

$$a_1 = \frac{M \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_j}{M \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$a_2 = \frac{-\sum x_i \sum x_j y_j + \sum x_i^2 \sum y_j}{M \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

これは、直線によるフィッティングの公式に他ならない



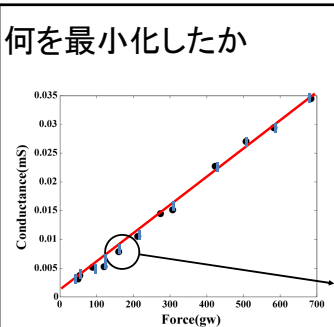
何を最小化したか

$\mathbf{y} = \mathbf{Xa} + \mathbf{e}$
 $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{Xa}$

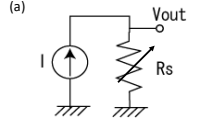
$$\|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{e}^T \mathbf{e} = \sum_{i=1}^M e_i^2$$

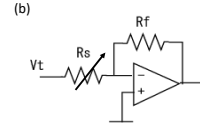
$y_i = a_1x_i + a_2 + e_i$
 $e_i = y_i - a_1x_i - a_2$

データを直線の、「y軸に沿った距離」の二乗の和を最小化した。

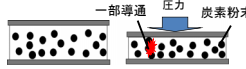


(参考) 実際の測定回路

- 「抵抗」を測定するなら
 

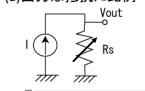
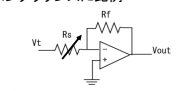
I: 定電流源
Vout: 出力
出力電圧は **抵抗に比例**
- 「コンダクタンス(抵抗の逆数)」を測定するなら
 

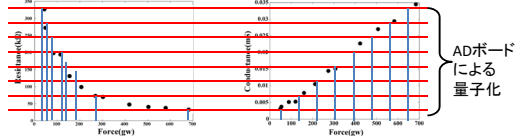
Vt: 定電圧源
Rs: フィルムセンサの抵抗
Rf: 調整用固定抵抗
これは「反転増幅回路」
Vout = Rf/Rs x Vt
Vtが一定なら出力電圧は **抵抗に反比例**



「抵抗」を測定して逆数をとればよいのでは？

別にそれでもよい。しかし玄な理由はある。

(a)出力は抵抗に比例  (b)出力はコンダクタンスに比例 

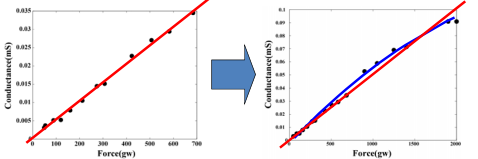


ADボードによる量子化

- アナログ部による線形化の意義 = ADボードによる量子化の影響を低減「ダイナミックレンジを広げる」とも言う。

31

フィルムセンサを限界性能まで使いきりたい。



直線近似 $y = a_1x + a_2$ ではフィッティングできない気が... (直線領域だけで使う、という方針も正しい)

多項式によるフィッティングを試みる。

$$y = a_1x + a_2 \Rightarrow y = a_1x^2 + a_2x + a_3$$

$$y = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$$

もはや直線フィッティングの公式は使えない。

32

多項式近似

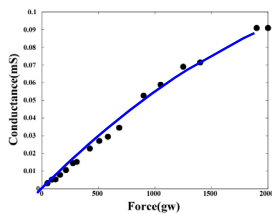
$y = a_1x^2 + a_2x + a_3$ $\left\{ \begin{array}{l} x: \text{力: 既知入力} \\ y: \text{コンダクタンス, 測定出力} \\ a_1, a_2, a_3: \text{未知パラメータ} \end{array} \right.$

何度も測定する

$$y_1 = a_1x_1^2 + a_2x_1 + a_3$$

$$y_2 = a_1x_2^2 + a_2x_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$y_M = a_1x_M^2 + a_2x_M + a_3$$


33

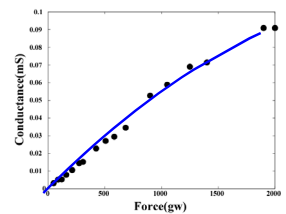
多項式近似

$$y_1 = a_1x_1^2 + a_2x_1 + a_3$$

$$y_2 = a_1x_2^2 + a_2x_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$y_M = a_1x_M^2 + a_2x_M + a_3$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_M^2 & x_M & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$


$y = Xa$ の形に出来たので、
 $a = X^\#y$ where $X^\# = (X^T X)^{-1} X^T$
 により3つの未知パラメータを求めることが出来る。(計算機の仕事)

34

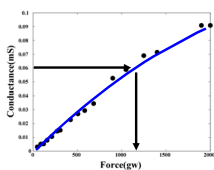
元に戻って... 何をしたかったか

(1) $y = a_1x + a_2$ $\left\{ \begin{array}{l} x: \text{力: 既知の入力} \\ y: \text{コンダクタンス, 測定した出力} \\ a_1, \dots, a_4: \text{未知パラメータ} \end{array} \right.$

(2) $y = a_1x^2 + a_2x + a_3$

(3) $y = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$

モデルの未知パラメータを求めるのがゴールではない。
測定出力yから力xを逆算することがゴール。



(1) $x = (y - a_2) / a_1$

(2) $a_1x^2 + a_2x + (a_3 - y) = 0$

$$x = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1(a_3 - y)}}{2a_1}$$

(3) $a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + (a_4 - y) = 0$
 $x = \dots$ (3次方程式の解の公式)

35

デモ: Excelでのフィッティング

X軸は等間隔でなくて良い
 X軸は単調増加でなくて良い

N次多項式だと**完璧なフィッティング**ができてしまうのはなぜか？
 (行列の形はどうなるか?)

整数次数の多項式でなくて良い

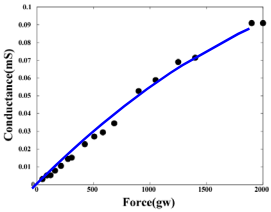
FlexiForce

$$y_1 = a_1 x_1^{1/2} + a_2$$

$$y_2 = a_1 x_2^{1/2} + a_2$$

$$\vdots$$

$$y_M = a_1 x_M^{1/2} + a_2$$

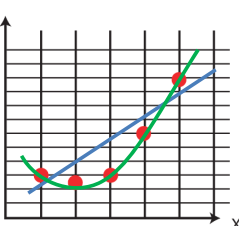
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{1/2} & 1 \\ x_2^{1/2} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_M^{1/2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$


関数であっても良い。たとえばlog(x)など。

37

レポート課題(1)

次のデータ系列に対して、Scilabを用いて、
 (1) 直線による近似、
 (2) 2次曲線による近似を適用、
 パラメータを求め、
 曲線とデータをグラフに描け



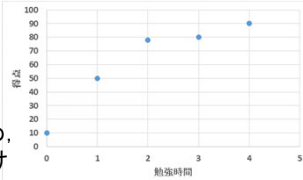
X	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
Y	3.0	2.5	3.0	6.0	10.0

なおScilabでは行列Aの擬似逆行列はpinv(A)で直接求めることができる。
 当然自分でinv(A'*A)*A'とやっても同じ。

38

レポート課題(2) (余裕のある人)

次のデータ系列に対して、
 $y = a_1 * \log(x+1) + a_2$
 を仮定してパラメータを求め、
 曲線とデータをグラフに描け



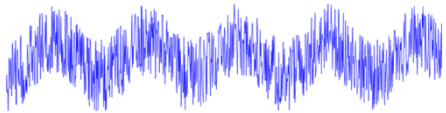
	Aさん	Bさん	Cさん	Dさん	Eさん
X(勉強時間)	3	4	2	0	1
Y(試験の点)	80	90	78	10	45

最小二乗法 事例紹介

最小二乗法事例紹介 (時間の許す限り)

- 直交(同期)検波の最小二乗法による理解
- フォトリフレクタのキャリブレーション

最小二乗法事例(1): 直交(同期)検波



問題を定式化

信号f(t)が、
 $f(t) = A \sin(\omega t + \phi) + \text{noise}(t)$

と仮定できるとする。周波数 ω はわかっている。

計測データから、振幅Aと、位相ずれ ϕ を求めるには？

応用事例(1)

ファンクションジェネレータ

オシロスコープ

応用事例(2)

オプティカルフローの速度

重心動揺

直交(同期)検波: 数式(復習)

信号に $\sin(\omega t)$ をかけ、積分する (= 内積をとる)
積分時間 T は充分長い。

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{T} \int_0^T (A \sin(\omega t + \phi) + \text{noise}(t)) \sin(\omega t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T A \sin(\omega t + \phi) \sin(\omega t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \text{noise}(t) \sin(\omega t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T A (\sin(\omega t) \cos(\phi) + \cos(\omega t) \sin(\phi)) \sin(\omega t) dt \\
 &= A \cos(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt + A \sin(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt \\
 &= A \cos(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt \\
 &= \frac{A}{2} \cos(\phi)
 \end{aligned}$$

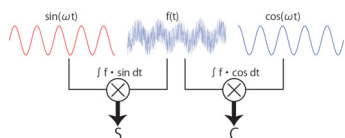
直交(同期)検波: 数式(復習)

信号に $\cos(\omega t)$ をかけ、積分する (= 内積をとる)
積分時間 T は充分長い。

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{1}{T} \int_0^T (A \sin(\omega t + \phi) + \text{noise}(t)) \cos(\omega t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T A \sin(\omega t + \phi) \cos(\omega t) dt + \int_0^T \text{noise}(t) \cos(\omega t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T A (\sin(\omega t) \cos(\phi) + \cos(\omega t) \sin(\phi)) \cos(\omega t) dt \\
 &= A \cos(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt + A \sin(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt \\
 &= A \sin(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} dt \\
 &= \frac{A}{2} \sin(\phi)
 \end{aligned}$$

直交(同期)検波: 数式(復習)

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{A}{2} \cos(\phi) \\
 C &= \frac{A}{2} \sin(\phi)
 \end{aligned}$$



位相差

$$\begin{aligned}
 \frac{C}{S} &= \tan(\phi) \\
 \phi &= \arctan\left(\frac{C}{S}\right)
 \end{aligned}$$

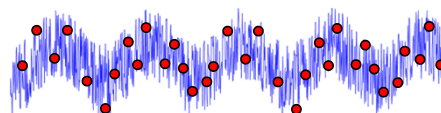
振幅

$$\begin{aligned}
 S^2 + C^2 &= \frac{A^2}{4} (\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) \\
 &= \frac{A^2}{4} \\
 A &= 2\sqrt{S^2 + C^2}
 \end{aligned}$$



ノイズに埋もれた信号から位相差と振幅が求まった

最小二乗法で理解する



離散的に取り込まれるデータは次の形をしていると仮定



ただし周波数 ω は既知。
得られたデータ $[y_1, y_2, \dots, y_N]$ から、振幅 A と位相 ϕ を求める。

最小二乗法で理解する

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

これにより、行列の形、 $y = Xa$ に変形することが出来た。

最小二乗法で理解する

$$A \cos(\phi) = a = X^T y = (X^T X)^{-1} X^T y$$

$$A \sin(\phi) = \begin{bmatrix} \sin(\omega t_1) & \dots & \sin(\omega t_N) \\ \cos(\omega t_1) & \dots & \cos(\omega t_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\omega t_1) & \cos(\omega t_1) \\ \vdots & \vdots \\ \sin(\omega t_N) & \cos(\omega t_N) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sin(\omega t_1) & \dots & \sin(\omega t_N) \\ \cos(\omega t_1) & \dots & \cos(\omega t_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

残る
ほぼ消える (適切なNで完全に0)

最小二乗法で理解する

$$\begin{bmatrix} A \cos(\phi) \\ A \sin(\phi) \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N \sin(\omega t_j) y_j \\ \sum_{j=1}^N \cos(\omega t_j) y_j \end{bmatrix}$$

つまり、元信号 $y(t)$ に

- $\cos(\omega t)$ をかけて積分したものと、
- $\sin(\omega t)$ をかけて積分したものと

によって、振幅と位相を求めることができる。

これはこれまでの数式的理解と全く同一。

最小二乗法事例(3) フォトフレクタを用いた近接距離計の較正

<https://www.youtube.com/watch?v=hpY0IEcqnH4>

フォトフレクタを用いた近接距離計の較正

出力電圧は反射光量に比例。
出力電圧から反射板との距離を得たい。

測定

出力電圧[V]

距離[mm]

いかにして較正曲線を求め、センサとして使えるようにするか?

モデル化(1)

反射板を鏡面とみなし、LEDの“像”からPTへの光路を考える。

LEDを点光源とすると、PTの受光量はLED像からみたPTの立体角 Ω に比例。

LED像とPTの距離：
 $l = \sqrt{c^2 + (2d)^2}$

PTの立体角：
 $\Omega = \frac{\cos \theta}{l^2} \Delta S$ ΔS : PTの表面積

... = $\frac{k_1 d}{(d^2 + k_2)^{3/2}}$ k_1, k_2 : 定数

55

モデル化(2)

PTの受光量が立体角 Ω に比例するから、出力電圧も同様。

$$V = \frac{k_1 d}{(d^2 + k_2)^{3/2}} \quad \text{: 理論曲線}$$

- d が小さければ V は d に比例
- d が大きければ $1/d^2$ に比例

未知パラメータ k_1, k_2 を求めれば入出力関係が記述できる

56

フィッティングの準備

$$V = \frac{k_1 d}{(d^2 + k_2)^{3/2}} \quad \begin{cases} d: \text{入力(距離)} \\ V: \text{出力(電圧)} \\ k_1, k_2: \text{未知パラメータ} \end{cases}$$

変形(線形化)

$$V^{2/3}(d^2 + k_2) = k_1^{2/3} d^{2/3}$$

$$V^{2/3} d^2 = k_1^{2/3} d^{2/3} - V^{2/3} k_2$$

と置けば

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

$\begin{cases} x_1, x_2, y: \text{既知} \\ a_1, a_2: \text{未知} \end{cases}$

最小二乗法によってパラメータを同定できる。57

evaluation of reflective photocoupler

つまり、一般のフィッティングでは、

- (1) 数式によるモデル化
- (2) 最小二乗の形に使えるための変形が必要。この時の最小二乗誤差は多くの場合当初の意味を失う。