

インタラクティブシステム論 第2回

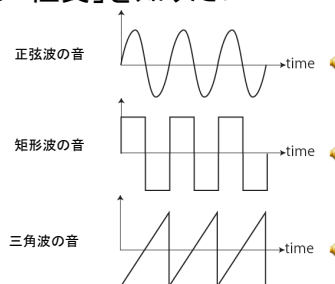
梶本裕之
Twitter ID kajimoto
ハッシュタグ #ninshiki

日程

10/4 インTRODクシヨソ
10/11 フーリエ変換
10/18 フーリエ変換と線形システム
10/25 信号処理の基礎
11/1 信号処理応用1(相関)
11/8 信号処理応用2(画像処理)
11/15 インタラクティブシステムの実際(小泉先生)
11/22 (調布祭準備日)
11/29 中間確認テスト
12/6 ラプラス変換
12/13 (出張予定)
12/20 古典制御の基礎
1/10 行列
1/17 行列と最小二乗法
1/24 ロボティクス
1/31 期末確認テスト

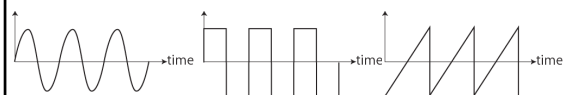
フーリエ変換

信号の「性質」を知りたい



(Q)この3つは、何が違うのだろうか？

答えは認識の数だけある

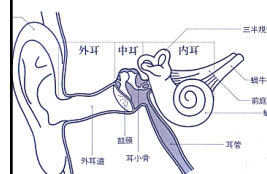


(Q)この3つは、何が違うのだろうか？

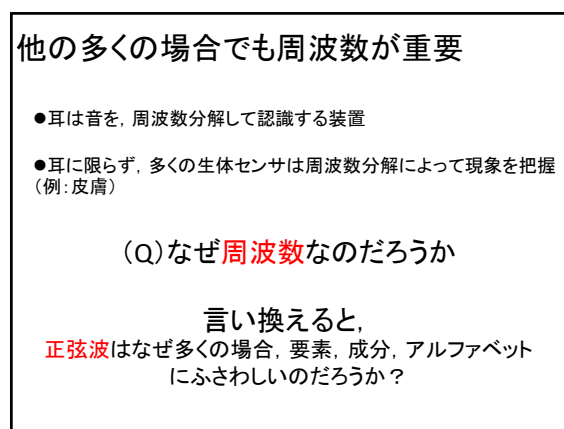
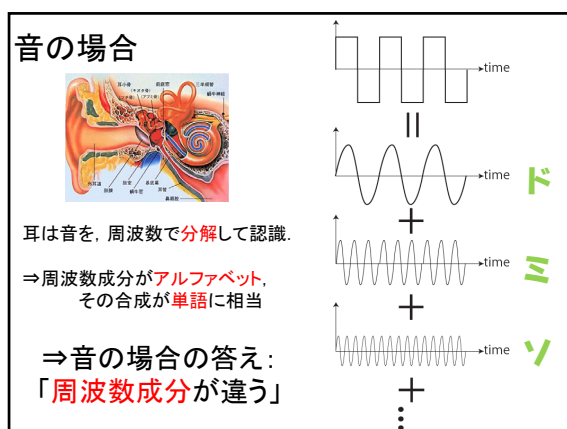
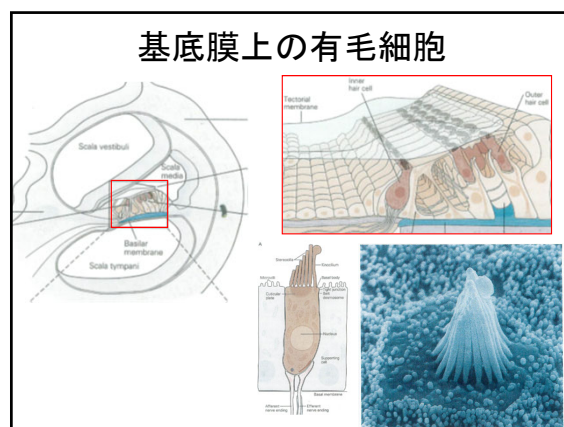
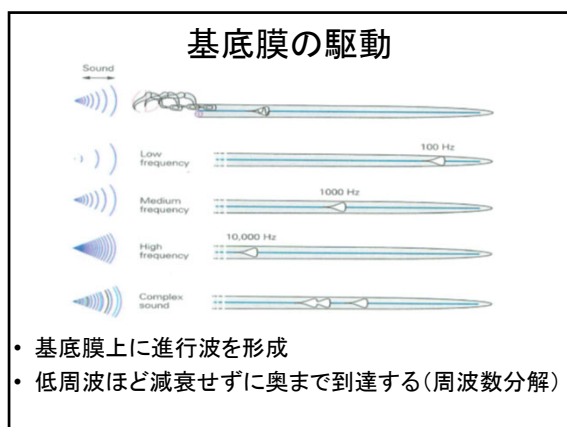
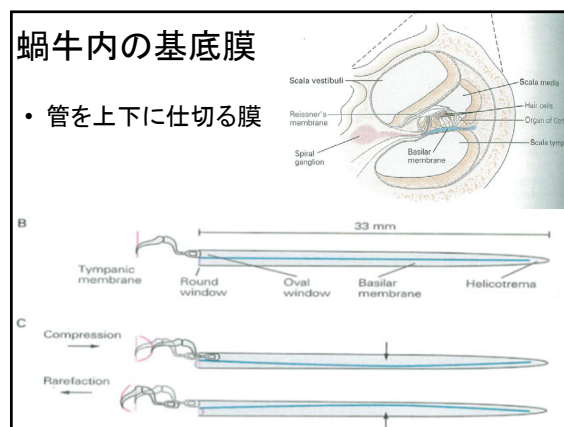
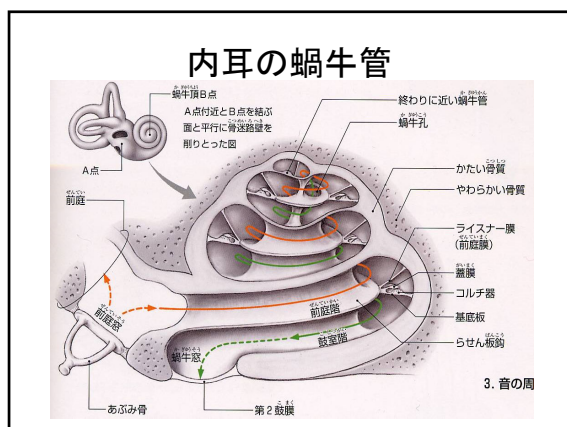
- (A1)形が違う
(A2)上昇速度, 下降速度が違う
(A3)ある閾値以上となる時間幅が違う
etc... すべて正しい

回答の正しさは、現象の本質にどれだけ迫っているかによる。
つまり、現象を認識するシステムによって正答は異なる。

音の「認識」とは？

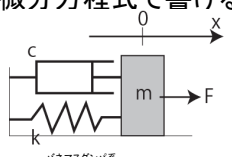


1. 気体の振動
2. 鼓膜の振動
3. つち骨・きぬた骨・あぶみ骨によるリレー
4. 前庭窓の振動
5. リンパ液(液体)の振動
6. 基底膜の振動

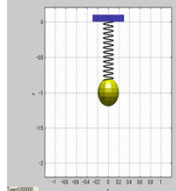


物理現象の多くは線形な微分方程式で書ける

(例)バネ・マス・ダンパ系
おもりに加わる力は,
F:外力
cx':粘性による力
Kx:バネによる力
ニュートンの法則ma=Fより,




<http://www.youtube.com/watch?v=55m4kym2DC>

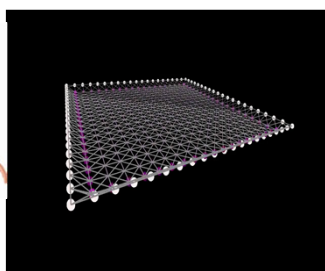


●システムの「入力」と「応答」
✓ 入力: F(t): おもりに加える外力
✓ 応答: x(t): おもりの動き

(参考)バネ・マス・ダンパ系による記述例



Syflex
http://www.youtube.com/watch?v=IS3vZxi_xIw

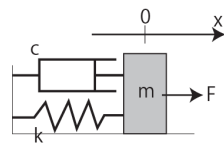


布のシミュレーション
<http://www.youtube.com/watch?v=ib1vmRDs8Vw>

「入力」と「応答」の関係を知りたい

$$m\ddot{x} = F - kx - c\dot{x}$$

✓ 入力: F(t): おもりに加える外力
✓ 応答: x(t): おもりの動き



「ある入力波形, F(t)を加えた時に, 応答x(t)はどうなるか」
この問題に一般的に答えることは出来るか?

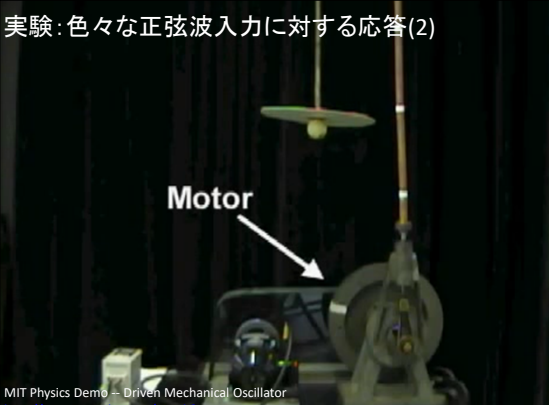
出来る. 正弦波入力を考えることによって

実験: 色々な正弦波入力に対する応答 (1)



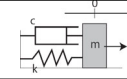
spring-mass second order system frequency response
http://www.youtube.com/watch?v=XTI_ePIvFI

実験: 色々な正弦波入力に対する応答 (2)

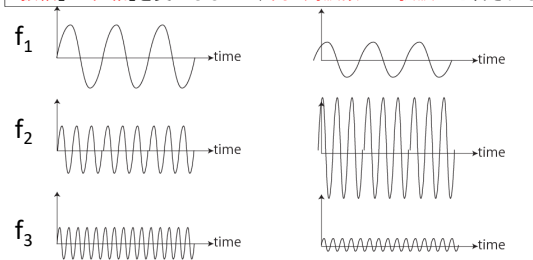


MIT Physics Demo - Driven Mechanical Oscillator
http://www.youtube.com/watch?v=6a4uuv_6a1J1U

正弦波は歪まない



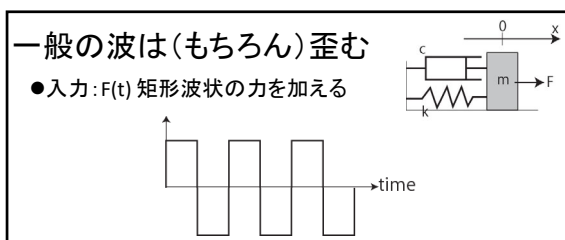
●線形な微分方程式で記述されるシステムでは, 正弦波の入力は「振幅」と「位相」を変えるものの, 同じ周波数の正弦波で応答される.



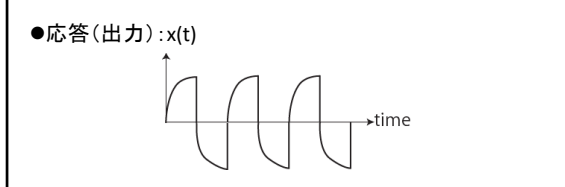
●入力: F(t)=sin(ft) ●応答: x(t)

一般の波は(もちろん)歪む

●入力: $F(t)$ 矩形波状の力を加える



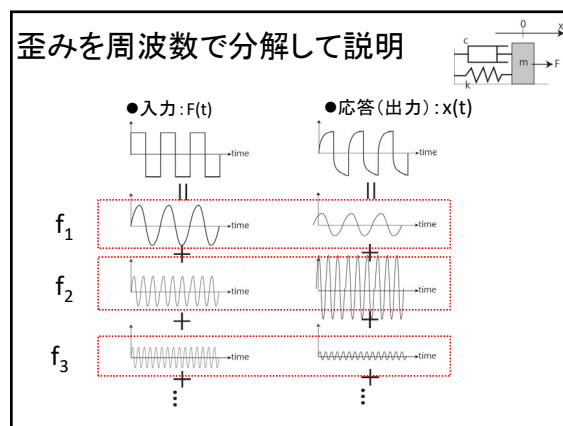
●応答(出力): $x(t)$



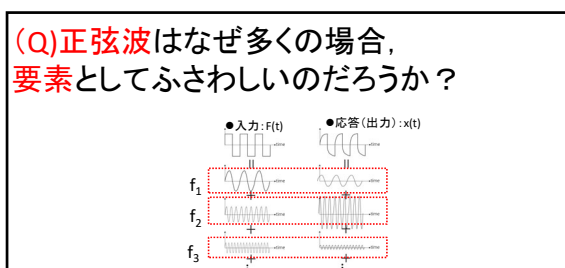
歪みを周波数で分解して説明

●入力: $F(t)$

●応答(出力): $x(t)$



(Q)正弦波はなぜ多くの場合、要素としてふさわしいのだろうか？



(A1) 正弦波入力に対する出力も同じ周波数の正弦波となる(と近似できる事が多い)から

(A2) 周波数成分ごとの入出力関係から、一般の入力に対する応答(出力)を合成できるから

(今は参考まで)「線形」微分方程式の意味

$$m\ddot{x} = F - kx - c\dot{x}$$

$$m\ddot{x}_1(t) + c\dot{x}_1(t) + kx_1(t) = F_1(t)$$

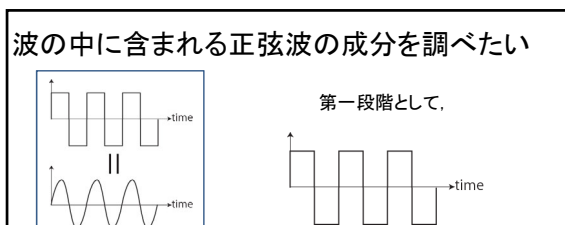
$$m\ddot{x}_2(t) + c\dot{x}_2(t) + kx_2(t) = F_2(t)$$

$$m(\ddot{x}_1(t) + \ddot{x}_2(t)) + c(\dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t)) + k(x_1(t) + x_2(t)) = F_1(t) + F_2(t)$$

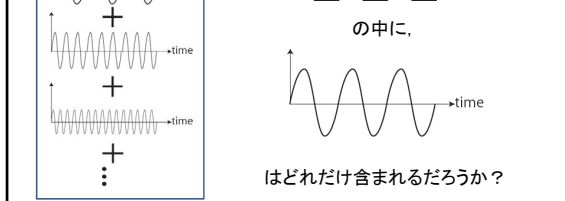
2つの微分方程式を足しあわせても成立する
(波形の重ね合わせが成立する)
(例えばもし $x^2(t)$ 等の項があるとこれは成立しない)

波の中に含まれる正弦波の成分を調べたい

第一段階として,



の中に,

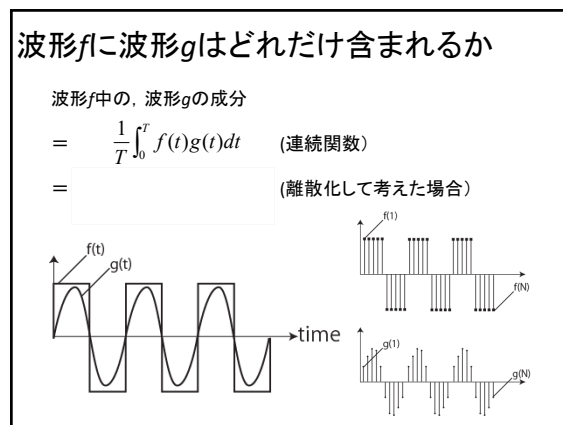


はどれだけ含まれるだろうか？

波形 f に波形 g はどれだけ含まれるか

波形 f 中の、波形 g の成分

$$= \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t)dt \quad (\text{連続関数})$$

$$= \dots \quad (\text{離散化して考えた場合})$$


ベクトル空間と内積(復習)

ベクトル $a=[a_x, a_y]$ のx成分は? a_x

これはベクトルaとベクトル $x=[1,0]$ との内積である.

$$a \cdot x = [a_x, a_y] \cdot [1, 0] = a_x$$

回転した座標軸, s, tを考える.
ベクトル $a=[a_x, a_y]$ の, s成分は?

これはベクトルaとベクトル $s=[s_x, s_y]$ との内積である.

$$a \cdot s = [a_x, a_y] \cdot [s_x, s_y]$$

内積は, あるベクトルが別のベクトルの成分をどれだけ持つかを表す

さらに

3次元空間に, 座標軸 s,t,uを考える.
ベクトル $a=[a_x, a_y, a_z]$ の, s成分は?

これはベクトルaとベクトル sとの内積である.

$$a \cdot s = [a_x, a_y, a_z] \cdot [s_x, s_y, s_z]$$

では

N次元空間で, 二つのベクトル $f=[f_1, f_2, \dots, f_N], g=[g_1, g_2, \dots, g_N]$ を考える.

内積 $f \cdot g$ は, ベクトルfの, g成分(または逆)を表す.

=

=

波形fに波形gはどれだけ含まれるか(再)

波形中の, 波形gの成分

$$= \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t)dt \quad (\text{連続関数})$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(i)g(i) \quad (\text{離散化して考えた場合})$$

これは二つの波をベクトルと考えた時の内積に他ならない
※内積を連続関数に対して定義

元の波形に正弦波がどれだけ含まれるか

元の波形: 周期Tの波形 $f(t)$

周期Tのcosine波はどれだけ含まれるか

$$a_1 =$$

周期Tのsine波はどれだけ含まれるか

$$b_1 =$$

周期2Tのcosine波はどれだけ含まれるか

$$a_2 =$$

周期2Tのsine波はどれだけ含まれるか

$$b_2 =$$

以下 $a_3, b_3, a_4, b_4, \dots$

フーリエ級数展開: 定義

周期Tの波形 $f(t)$ は次のように分解できる

$$f(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(2\pi m t / T) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(2\pi m t / T)$$

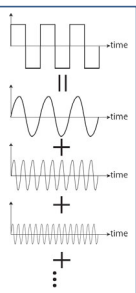
$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt \quad \text{平均値 (DC成分)}$$

$$a_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi m t / T) dt$$

$$b_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi m t / T) dt$$

※この授業では係数は気にしない.

フーリエ級数展開の意味するところ



元の波形：周期Tの波形 f(t)

周期Tの cosine波はどれだけ含まれるか
 $a_1 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi/T)t dt$

周期Tの sine波はどれだけ含まれるか
 $b_1 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi/T)t dt$

周期2Tの cosine波はどれだけ含まれるか
 $a_2 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi \times 2/T)t dt$

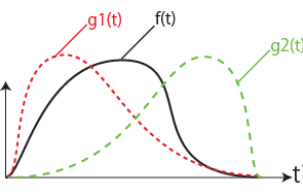
周期2Tの sine波はどれだけ含まれるか
 $b_2 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi \times 2/T)t dt$

以下 $a_3, b_3, a_4, b_4, \dots$

① 分解の仕方は一通り
 ② 分解した各成分を合成すると元に戻る

これは当たり前のことではない！！

①分解の仕方は一通り？



f(t)を、g1(t)成分と、g2(t)成分と、残りに分けたい。

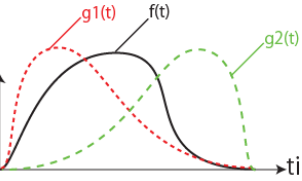
f(t)から、
 (1) まずg1(t)成分を抽出し、残りからg2(t)成分を抽出する
 (2) まずg2(t)成分を抽出し、残りからg1(t)成分を抽出する
 この二つは、通常は異なる結果を生む。

● f=[茶色の丸、紫の丸、紫の三角]
 ● g1: 茶色
 ● g2: 丸

(1) ● g1: 茶色 ● g2: 丸
 (2) ● g1: 茶色 ● g2: 丸

普通、分解の仕方は抽出の順番に依存

②分解した各成分を合成すると元に戻る？



ある成分を抽出した「残り」から次の成分を抽出したことが問題？
 では
 f(t)からg1(t)成分を抽出
 f(t)からg2(t)成分を抽出
 すれば抽出の順番は関係なくなる？

この二成分を合成すると、元のf(t)より大きくなってしまう。

普通、合成しても元に戻らない

つまり

ある関数f(t)を、
 関数群 $g_1(t), \dots, g_\infty(t)$ の成分に分解するとき、
 (たとえばフーリエ変換ではsin, cos. これを基底関数と呼ぶ)

**分解方法が一通りで、
 分解結果を合成して元に戻るの
 稀で特殊**

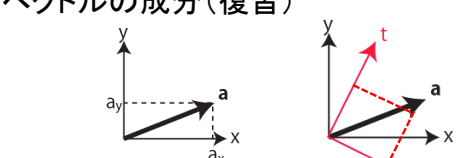
うまくいくのは

任意の基底関数同士が、
お互いの要素を持たないとき、
 分解の仕方は一通りとなる。

● f=[茶色の丸、紫の丸、紫の三角]
 ● g1: 丸 ● g2: 三角

● g1: ● g2: ●
 ● g1+g2=f

ベクトルの成分(復習)



ベクトルaは、
 ●ベクトルxとyの成分に一意に分けられる。各成分は $a \cdot x$, $a \cdot y$ 。
 ●ベクトルsとtの成分に一意に分けられる。各成分は $a \cdot s$, $a \cdot t$ 。

これは
 ●ベクトルxとyが、お互いの成分を持たないから。
 ●ベクトルsとtが、お互いの成分を持たないから。

このとき、xとy(sとt)は直交しているという。

直交ベクトルと直交基底(復習)

直交ベクトル同士は、内積が0である。

$$x \cdot y = [1, 0] \cdot [0, 1] = 0$$

$$s \cdot t = [s_x, s_y] \cdot [t_x, t_y] = 0$$

逆に、内積が0であることが直交基底であること条件！

N次元空間でN個のベクトルが、どの二つをとっても直交しているとき、これを直交基底と呼び、その空間の任意の点は、直交基底の成分で表せる。(図ではx,y,zが直交基底、s,t,uも直交基底)

N次元空間の直交基底

N次元空間で、N個のベクトル $g_1 = [g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1N}]$, $g_2 = [g_{21}, g_{22}, \dots, g_{2N}]$, ..., $g_N = [g_{N1}, g_{N2}, \dots, g_{NN}]$ を考える。

すべてのペアの内積 $g_i \cdot g_j$ が0なら、 $g_i \cdot g_j = 0$

$g_1 \sim g_N$ は直交基底であり、任意のN次元ベクトルfは、 $g_1 \sim g_N$ の各成分の和で一意に表せる。

N次元空間の直交基底の成分

N次元ベクトルfの g_i 成分は、fと g_i の内積。

結局、ベクトルfは、次のように分解される。

$$f = (f \cdot g_1) g_1 + (f \cdot g_2) g_2 + \dots + (f \cdot g_N) g_N$$

$$= [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_N] \cdot [g_{11} \ g_{12} \ \dots \ g_{1N}]$$

$$= \sum_{n=1}^N f_n g_{1n}$$

関数でも「直交」を内積から定義できる

波形 g_1 と g_2 の内積を取る。

$$= \frac{1}{T} \int_0^T g_1(t) g_2(t) dt \quad (\text{連続関数})$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g_1(n) g_2(n) \quad (\text{離散化して考えた場合})$$

これで準備は整った

フーリエ級数展開の意味するところ(再)

元の波形: 周期Tの波形 f(t)

周期Tの cosine 波はどれだけ含まれるか $a_1 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi/T) dt$

周期Tの sine 波はどれだけ含まれるか $b_1 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi/T) dt$

周期2Tの cosine 波はどれだけ含まれるか $a_2 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi \times 2/T) dt$

周期2Tの sine 波はどれだけ含まれるか $b_2 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi \times 2/T) dt$

以下 $a_3, b_3, a_4, b_4, \dots$

① 分解の仕方は一通り
② 分解した各成分を合成すると元に戻る

これは当たり前のことではない！！

フーリエ級数の各基底関数の内積を取る

二つの基底関数、 $\cos(2\pi mt/T)$, $\cos(2\pi nt/T)$ の内積は？

$$\int_0^T \cos(2\pi mt/T) \cos(2\pi nt/T) dt$$

これは $m=n$ でなければ必ず0

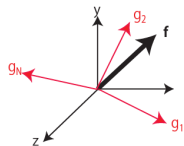
二つの基底関数、 $\cos(2\pi mt/T)$, $\sin(2\pi nt/T)$ の内積は？

$$\int_0^T \cos(2\pi mt/T) \sin(2\pi nt/T) dt$$

これも必ず0

任意の基底関数の内積が0。
⇒直交基底となる！！

フーリエ級数の基底関数は直交基底



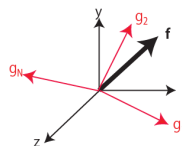
$$\begin{aligned}
 g_1 &= \cos(2\pi \times 1t/T) \\
 g_2 &= \sin(2\pi \times 1t/T) \\
 g_3 &= \cos(2\pi \times 2t/T) \\
 g_4 &= \sin(2\pi \times 2t/T) \\
 g_5 &= \cos(2\pi \times 3t/T) \\
 g_6 &= \sin(2\pi \times 3t/T) \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

これらは、たがいに直交するベクトルであり、直交基底を構成する

よって、任意の関数 f は $g_1 \sim g_N$ によって一意に表現できる。

離散フーリエ級数展開

有限長さの関数 ($0 < t < T$) を、 N 分割して離散的に表す。 $f(t) \Rightarrow [f_1, f_2, \dots, f_N]$



$$\begin{aligned}
 \text{基底関数} \Rightarrow N \text{次元基底ベクトルに} \\
 g_1 &= \cos(2\pi \times 1t/T) = [g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1N}] \\
 g_2 &= \sin(2\pi \times 1t/T) = [g_{21}, g_{22}, \dots, g_{2N}] \\
 g_3 &= \cos(2\pi \times 2t/T) = [g_{31}, g_{32}, \dots, g_{3N}] \\
 g_4 &= \sin(2\pi \times 2t/T) = [g_{41}, g_{42}, \dots, g_{4N}] \\
 g_5 &= \cos(2\pi \times 3t/T) = [g_{51}, g_{52}, \dots, g_{5N}] \\
 g_6 &= \sin(2\pi \times 3t/T) = [g_{61}, g_{62}, \dots, g_{6N}] \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

これらは、たがいに直交する N 次元ベクトルであり、直交基底を構成する

よって、任意の波形 f 、すなわちベクトル $[f_1, f_2, \dots, f_N]$ は $g_1 \sim g_N$ によって一意に表現できる (しかも余らない)。

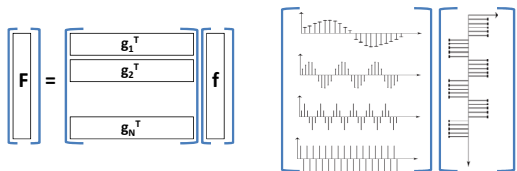
行列による表現

N 次元ベクトル f の g_i 成分は、 f と g_i の内積。結局、ベクトル f は、次のように分解される。

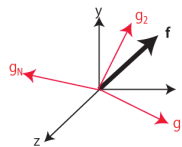
$$f = (f \cdot g_1) g_1 + (f \cdot g_2) g_2 + \dots + (f \cdot g_N) g_N$$

g_1 の成分、フーリエ級数

フーリエ級数を求めるには、 $f \cdot g_1, f \cdot g_2, \dots, f \cdot g_N$ なる、 N 個の内積を計算すればよい。



フーリエ級数展開とは



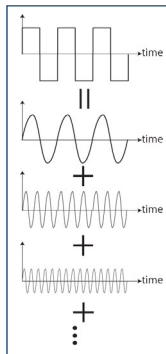
$$F = \begin{bmatrix} g_1^T \\ g_2^T \\ \vdots \\ g_N^T \end{bmatrix} f$$

つまり、**行列特に回転行列による座標変換の一種であり、実空間の値で表されているベクトル f をフーリエ空間の値で表されるベクトル F で表現するもの。**

フーリエ〇〇

- フーリエ級数展開
 - ⇒ 離散フーリエ級数展開 (済)
 - ⇒ 複素フーリエ級数展開
- ⇒ フーリエ変換
 - ⇒ 離散フーリエ変換

複素フーリエ級数展開: 定義



周期 T の波形 $f(t)$ は次のように分解できる

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \exp(j2\pi m t / T)$$

$$c_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(-j2\pi m t / T) dt$$

$\sin(2\pi m t / T)$ 、 $\cos(2\pi m t / T)$ の代わりに、 $\exp(j2\pi m t / T)$ を用いて整理したもの。係数 c_m はもはや複素数である。

$\exp(j2\pi m t / T)$ は直交関数系である。すなわち

が、 $m=n$ 以外で成り立つ。

フーリエ変換: 定義

“周期T”ではない波形 f(t)に対する変換. Tを無限大とする.

フーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$$

$$c_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(-j2\pi m t / T) dt$$

逆フーリエ変換

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \exp(j2\pi m t / T)$$

離散フーリエ変換(DFT): 定義

f(t), F(ω)を離散化したもの. Discrete Fourier Transform
時間を有限とすると離散複素フーリエ級数展開と同じ.

離散フーリエ変換

$$F(k) = \sum_{t=0}^{N-1} f(t) \exp(-j2\pi \frac{k}{N} t)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$$

離散逆フーリエ変換

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N-1} C(k) \exp(j2\pi \frac{k}{N} t)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

高速フーリエ変換(FFT): 紹介のみ

離散フーリエ変換 $F(k) = \sum_{t=0}^{N-1} f(t) \exp(-j2\pi \frac{k}{N} t)$

⇒結局行列の計算になる

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(-j2\pi t/N) \\ \vdots \\ \exp(-j(N-1)/N \cdot 2\pi t) \end{bmatrix} \mathbf{f}$$

一般に行列×ベクトルは行列サイズの数だけ乗算が必要(N×Nのオーダー)しかし、
 •exp(-j2πk/N・t)は繰り返し構造をとる
 •特にNが2の階乗の時、行列全体にフラクタル的な繰り返し構造が生じる
 という特徴をうまく使うと、乗算回数を抑えられる(N×logNのオーダー)
 リアルタイムにフーリエ変換を行う必要がある応用に必須.

振幅, パワースペクトラム, 位相

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt \quad \text{一般的に複素数の関数}$$

$$\omega = 2\pi f \quad \text{角周波数}$$

	角周波数ωでの振幅
	角周波数ωでのパワースペクトラム
	角周波数ωでの位相

パワースペクトラムで、元の信号がもつ周波数成分を観察できる

パワースペクトラムの観察

スペクトラム・アナライザ

アイウエオ

低 周波数 高

音声認識の手がかり: フォルマント

- 母音は主な周波数(第一フォルマント)と、次に多い周波数(第二フォルマント)で認識
- 関連話題
 - フォルマント合成による合成音声
 - 音声のピッチ変換時のフォルマント補正

第1フォルマント周波数 F1 [Hz]

(参考)しゃべるピアノ

Youtube: Speaking Piano

http://www.youtube.com/watch?v=muCPjK4nGY4&feature=player_embedded

レポート

次のサンプルコードを参考に、**同じ周期の正弦波、矩形波、三角波**をフーリエ変換し、パワースペクトルを観察、比較せよ。

レポートでは

- 3つのパワースペクトルを一つのグラフに表示する一つのソースコード
- そこからわかったこと、すなわち音色の違いの原因の考察をメール本文に

```
//一周期100の矩形波(ただし直流成分を無くするため平均値0としている)
wave=[ones(1,50), zeros(1,50)] - 0.5;
```

```
//5回繰り返す(回数は適当)
wave = [wave, wave, wave, wave, wave];
```

```
//フーリエ変換
fourier = fft(wave);
```

```
//パワースペクトルを計算
power_spec = fourier .* conj(fourier);
```

```
//計算結果を表示
plot(power_spec);
```

レポート課題

- 授業ではScilabを使うことを前提に課題を出します。
- 何かこだわりがあれば、他の物でもかまいません。
(Python, Matlab, Mathematica, Octave, MATX, Excel,...)
- 課題はほぼ毎回出します。

•Scilabを使ったレポートは下記フォームにソースコードをコピーし、考察を書く形で提出してください。ソースコード以外(wavファイルなど)も本来は必要ですが、レポートには添付しなくて結構です。

<https://goo.gl/forms/qf6wCOQC6VQMglee2>

レポートの締め切りは次の週の授業開始前