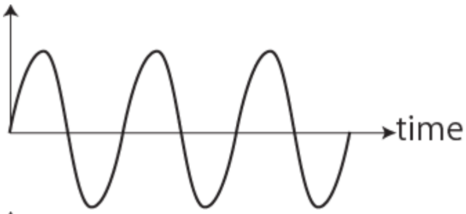
インタラクティブシステム論
第2回

梶本裕之
Twitter ID kajimoto
ハッシュタグ #ninshiki

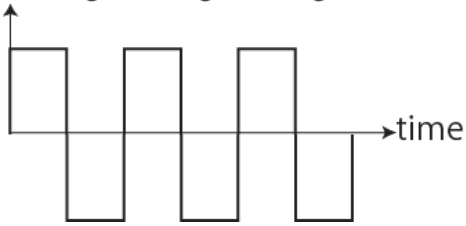
フーリエ変換

信号の「性質」を知りたい

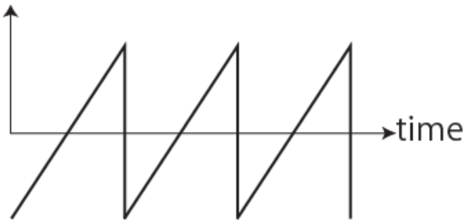
正弦波の音



矩形波の音

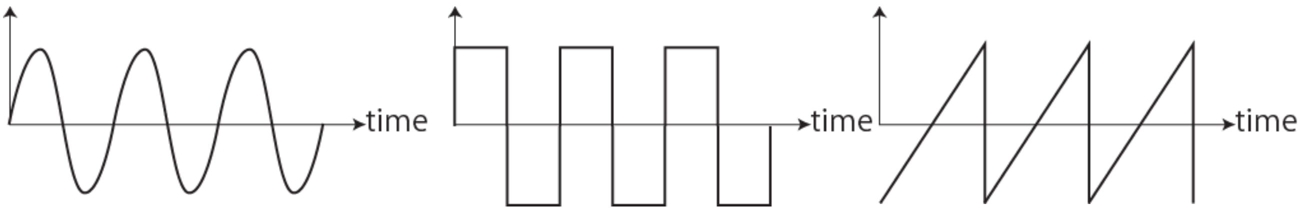


三角波の音



（Q）この3つは，何が違うのだろうか？

答えは認識の数だけある



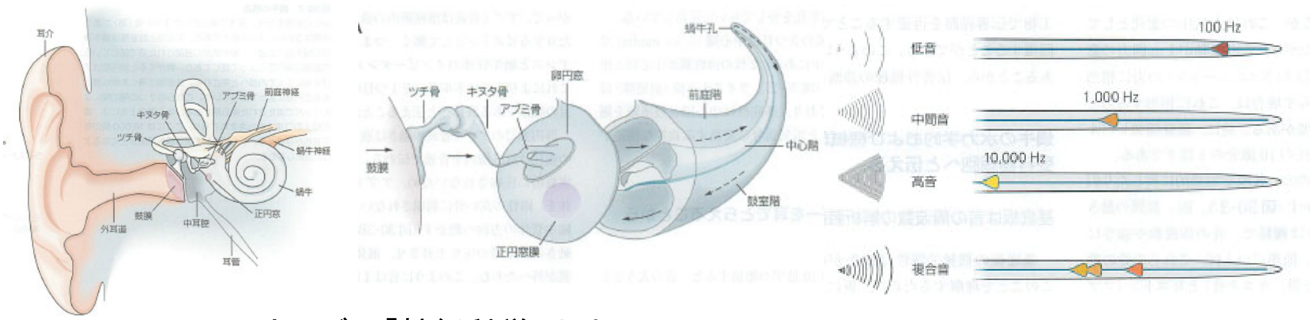
（Q）この3つは，何が違うのだろうか？

(A1)形が違う
(A2)上昇速度，下降速度が違う
(A3)ある閾値以上となる時間幅が違う
etc… すべて正しい

回答の正しさは，現象の本質にどれだけ迫っているかによる.

つまり，現象を認識するシステムによって正答は異なる.

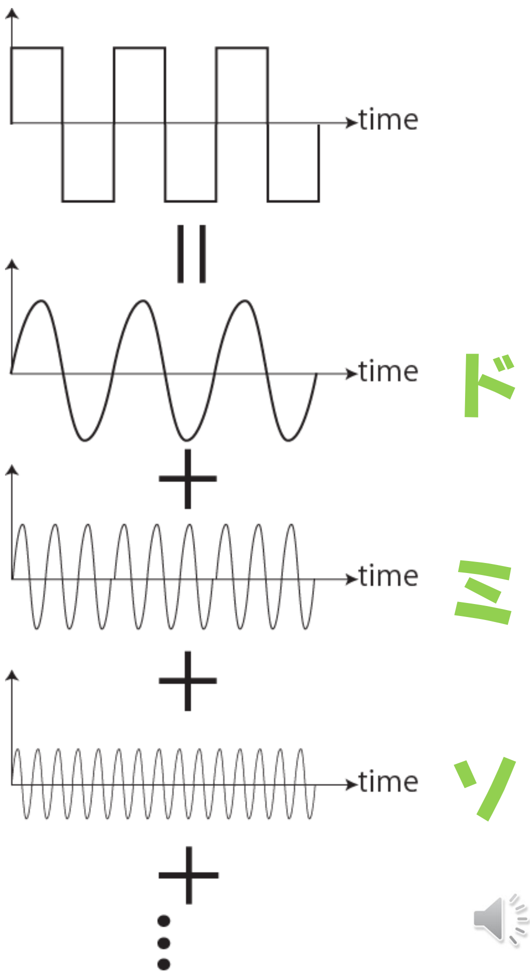
人間における音の「認識」とは



カンデル「神経科学」より https://www.medsi.co.jp/kandel

- 気体の振動→鼓膜の振動→耳小骨によるリレー→内耳のリンパ液（液体）の振動
- 基底膜の振動基底膜上に進行波を形成
  - 低周波ほど減衰せずに奥まで到達する（周波数分解）
  - 基底膜上の有毛細胞によって振動検出

音の場合



耳は音を，周波数で分解して認識.

⇒周波数成分がアルファベット，
　　その合成が単語に相当

⇒音の場合の答え：
「周波数成分が違う」

他の多くの場合でも周波数が重要

●耳は音を，周波数分解して認識する装置

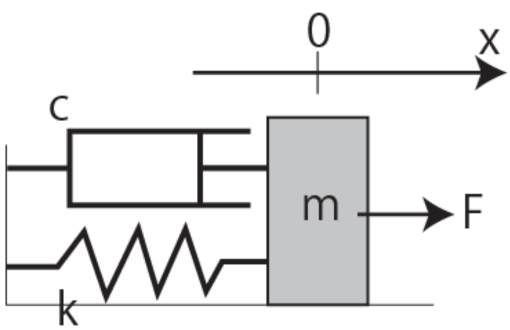
●耳に限らず，多くの生体センサは周波数分解によって現象を把握（例：皮膚）

（Q）なぜ周波数なのだろうか

言い換えると，
正弦波はなぜ多くの場合，
「要素」としてふさわしいのだろうか？

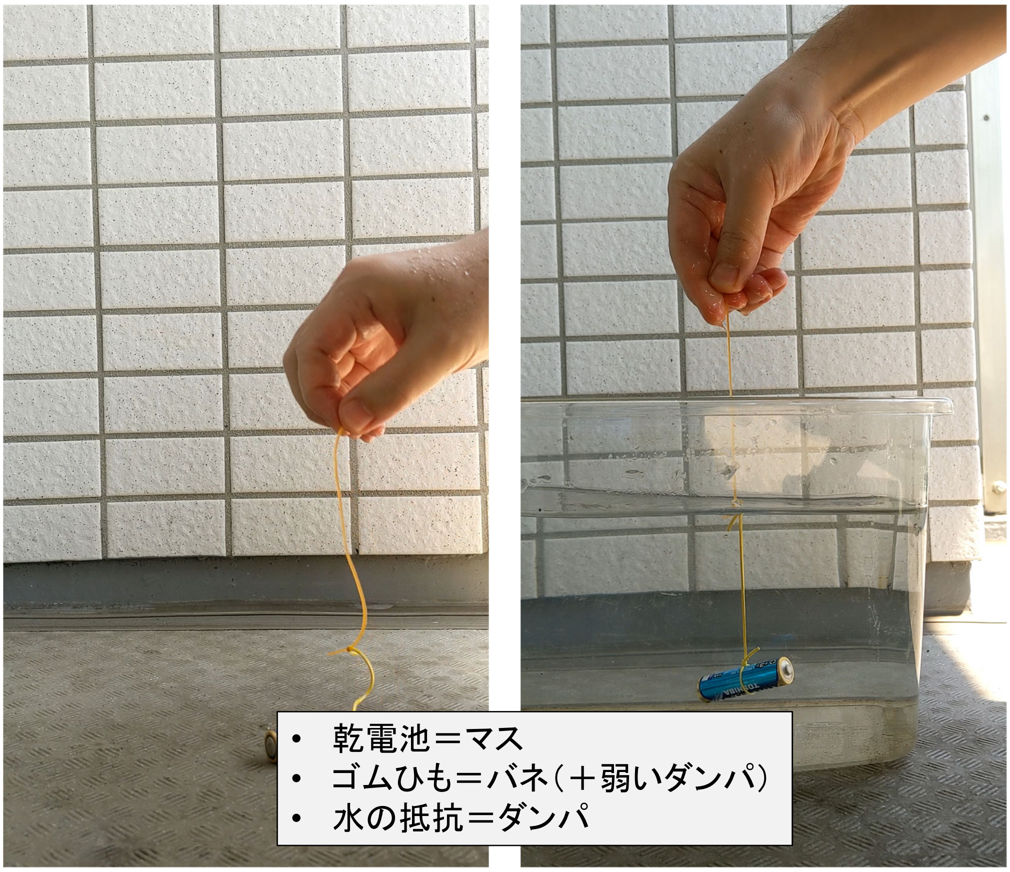
物理現象の多くは線形な微分方程式で近似できる

（例）バネ・マス・ダンパ系
おもりに加わる力は，
F:外力
cx’:粘性による力
Kx:バネによる力
ニュートンの法則ma=Fより，

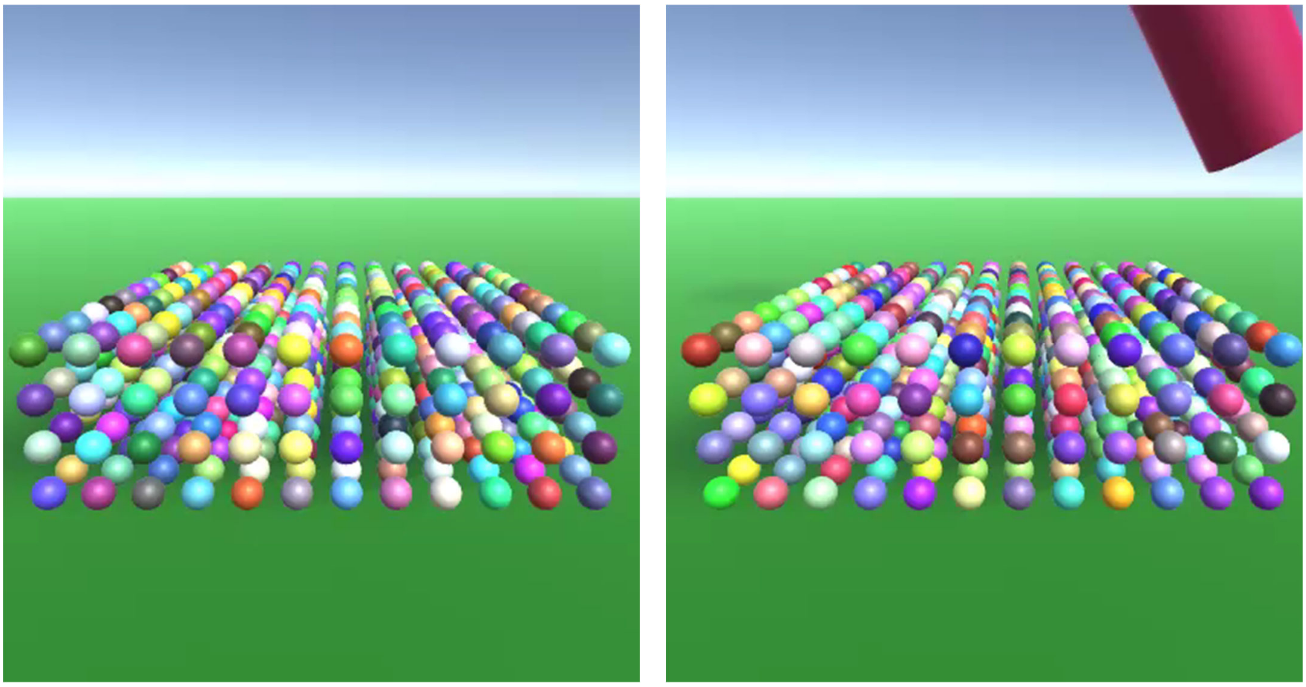


●システムの「入力」と「応答」
✓ 入力：F(t)：おもりに加える外力
✓ 応答：x(t)：おもりの動き

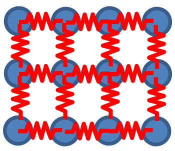
バネ・マス・ダンパ系



バネ・マス・ダンパ系による世界の記述



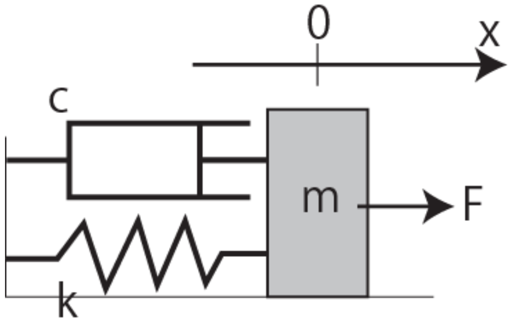
Unity環境中の弾性体のシミュレーション
https://github.com/HiroyukiKajimoto/UnityGraspingTestWithLeapMotion/blob/master/Tofu.cs



「入力」と「応答」の関係を知りたい

$$m\ddot{x} = F - kx - c\dot{x}$$

- ✓ 入力:F(t):おもりに加える外力
- ✓ 応答:x(t):おもりの動き



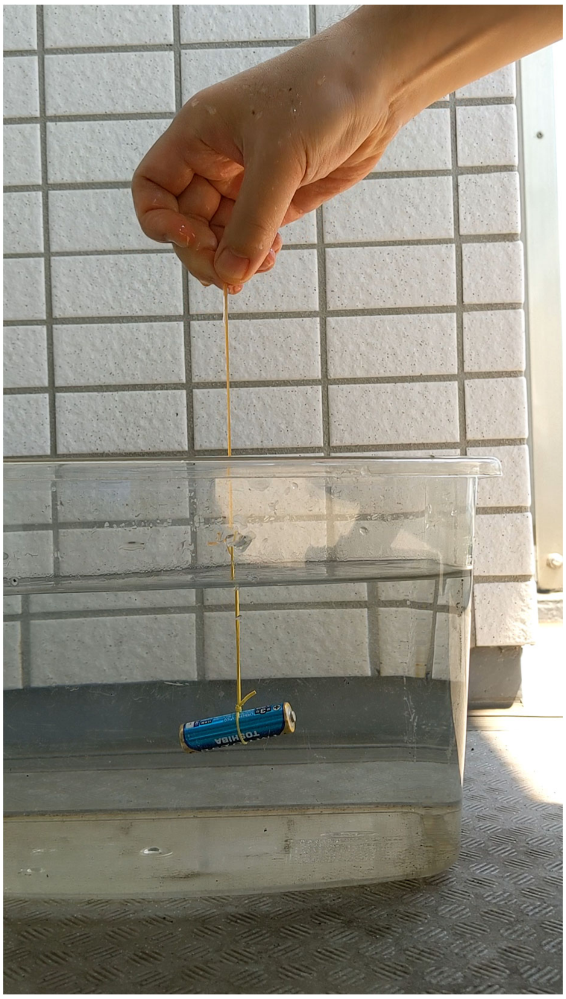
「ある入力波形, F(t)を加えた時に, 応答x(t)はどうなるか」

この問題に一般的に答えることは出来るか？

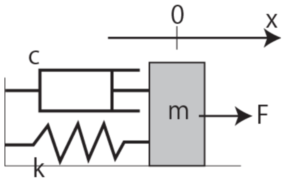
出来る. 正弦波入力を考えることによって

色々な正弦波入力に対する応答は？

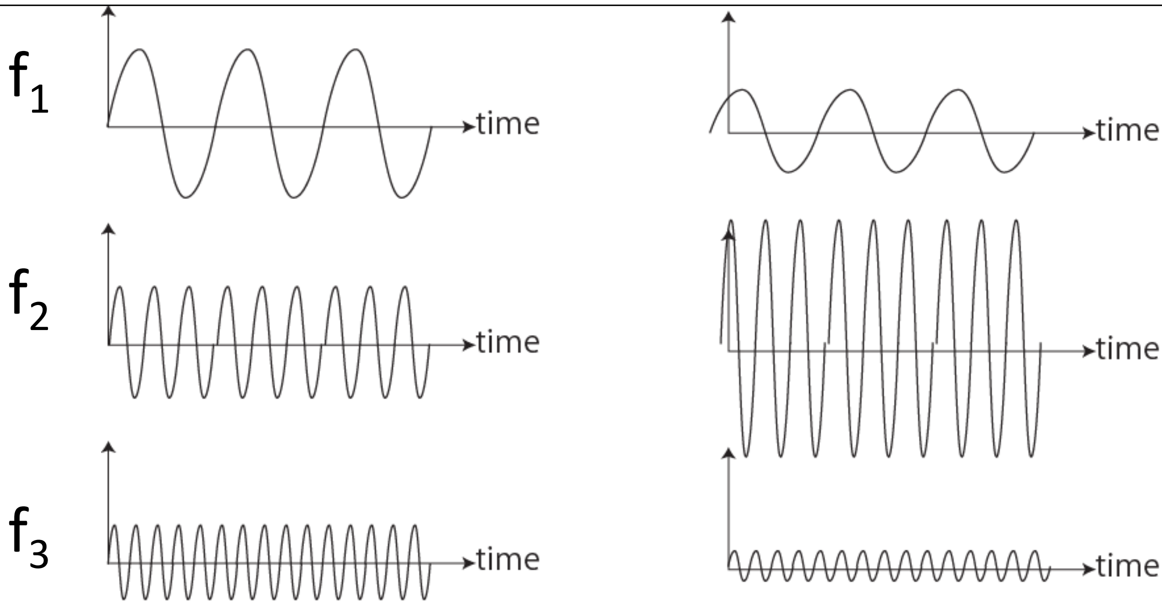
乾電池の動きは
- 低周波:追従する正弦波
- 中周波:反転して大きく振動する正弦波
- 高周波:ほとんど動かない正弦波



正弦波は歪まない

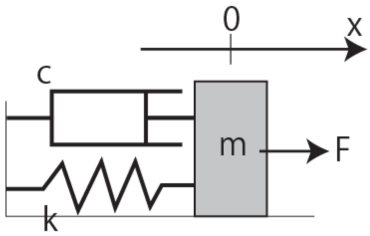


●線形な微分方程式で記述されるシステムでは，正弦波の入力は「振幅」と「位相」を変えるものの，同じ周波数の正弦波で応答される.

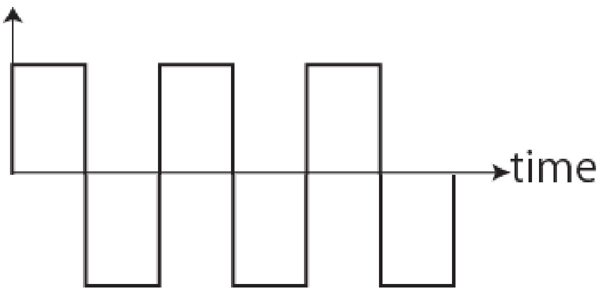


●入力：F(t)=sin(ft)　　●応答：x(t)

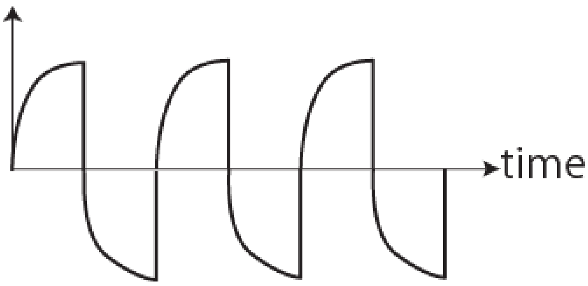
一般の波は(もちろん)歪む



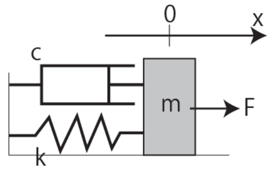
●入力：F(t) 矩形波状の力を加える

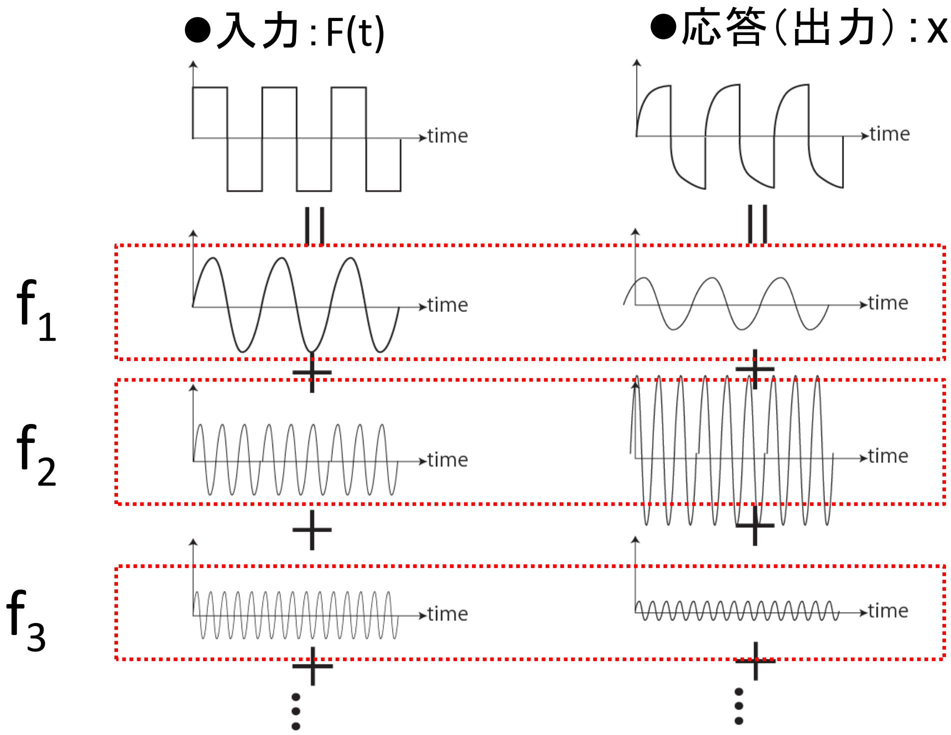


●応答(出力)：x(t)

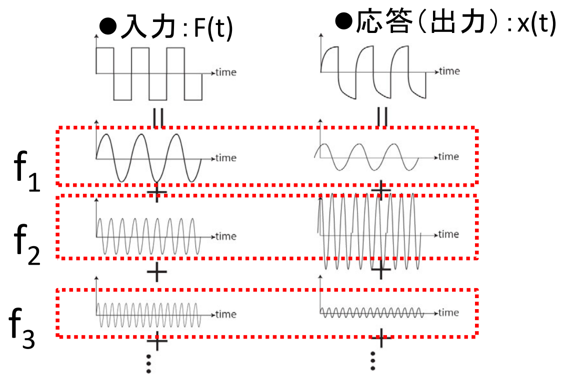


歪みを周波数で分解して説明





(Q)正弦波はなぜ多くの場合，要素としてふさわしいのだろうか？



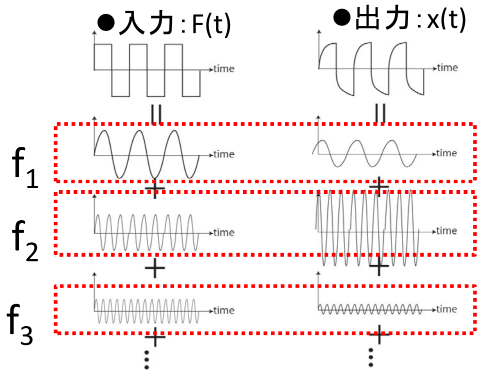
(A1)　正弦波入力に対する出力も
同じ周波数の正弦波となる（と近似できる事が多い）から

(A2)　周波数成分ごとの入出力関係から，
一般の入力に対する応答（出力）を合成できるから

（参考）「線形」微分方程式の意味

$$m\ddot{x} = F - kx - c\dot{x}$$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$



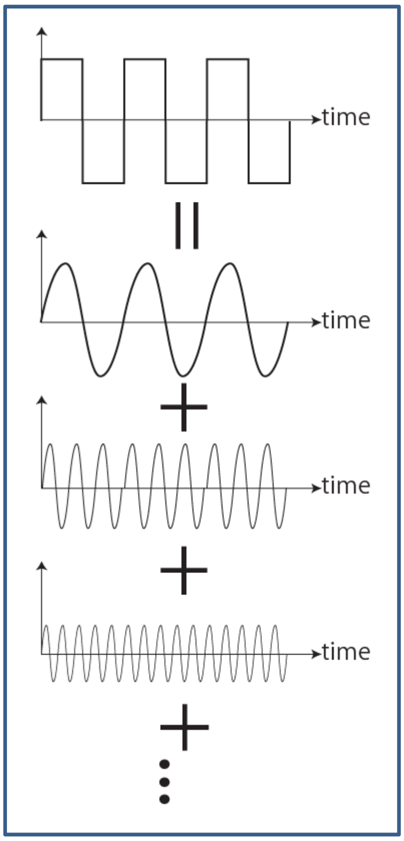
$$m\ddot{x}_1(t) + c\dot{x}_1(t) + kx_1(t) = F_1(t)$$

$$m\ddot{x}_2(t) + c\dot{x}_2(t) + kx_2(t) = F_2(t)$$

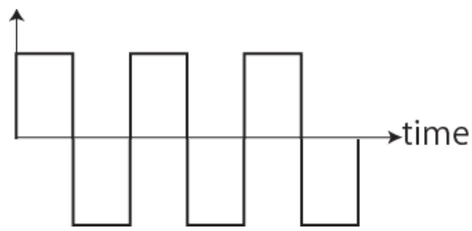
$$m\left(\ddot{x}_1(t) + \ddot{x}_2(t)\right) + c\left(\dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t)\right) + k\left(x_1(t) + x_2(t)\right) = F_1(t) + F_2(t)$$

2つの微分方程式を足しあわせても成立する
（波形の重ね合わせが成立する）
（例えばもし$x^2(t)$等の項があるとこれは成立しない）

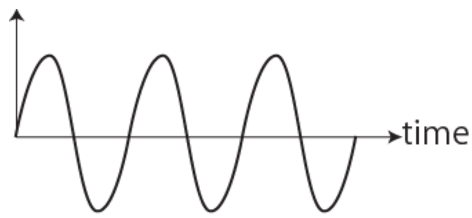
波の中に含まれる正弦波の成分を調べたい



第一段階として，



の中に，



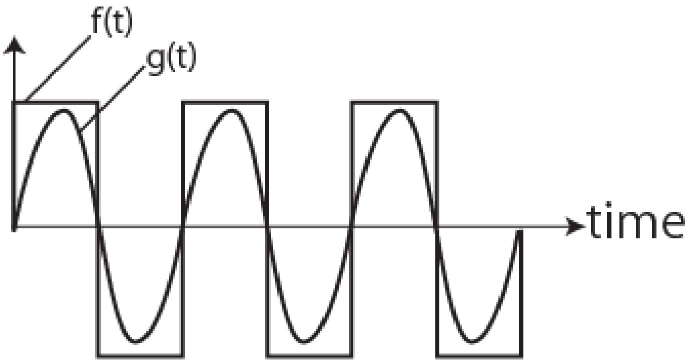
はどれだけ含まれるだろうか？

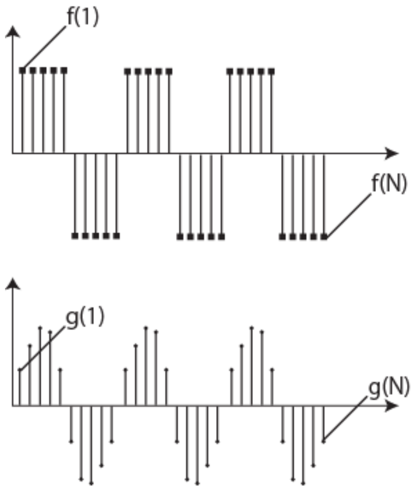
波形fに波形gはどれだけ含まれるか

波形f中の，波形gの成分

$$= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)dt \qquad \text{(連続関数)}$$

$$= \qquad\qquad \text{(離散化して考えた場合)}$$



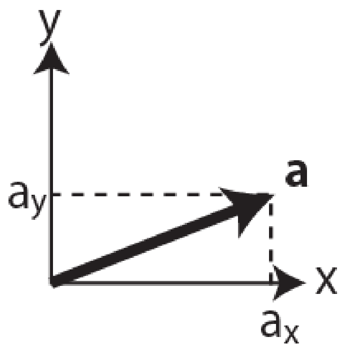


ベクトル空間と内積(復習)

ベクトル **a**=[a_x, a_y] のx成分は？．．．．．． a_x

これはベクトル**a**とベクトル **x**=[1,0]との内積である．

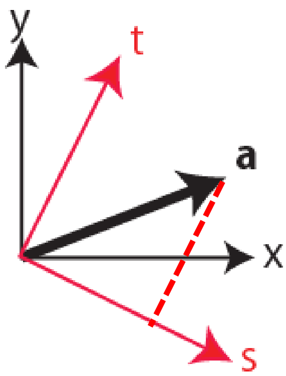
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{x} = [a_x, a_y]\cdot[1,0] = a_x$$



回転した座標軸，s, tを考える．
ベクトル **a**=[a_x, a_y] の，s 成分は？

これはベクトル**a**とベクトル **s**=[s_x, s_y]との内積である．

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{s} = [a_x, a_y]\cdot[s_x, s_y]$$

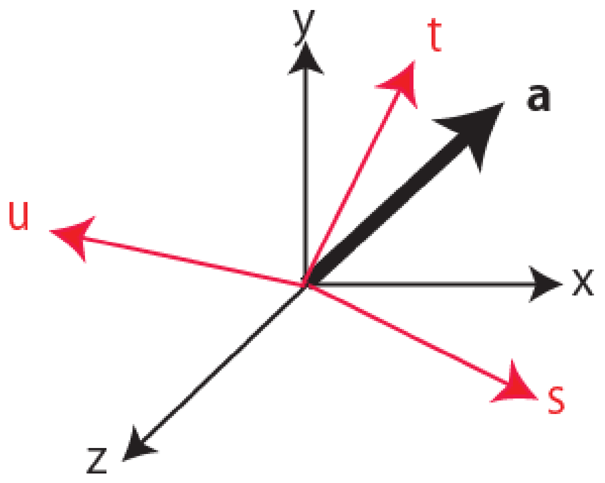


内積は，あるベクトルが別のベクトルの成分をどれだけ持つかを表す

さらに

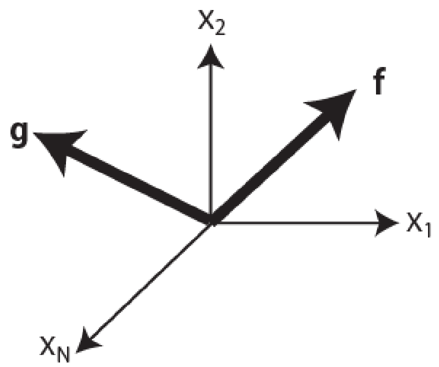
3次元空間に，座標軸 s,t,uを考える.
ベクトル **a**=[a_x, a_y , a_z] の， s 成分は？

これはベクトル**a**とベクトル **s** との内積である.
a・**s** = [a_1, a_2 , a_3]・[s_x, s_y , s_z]



では

N次元空間で，二つのベクトル
f=[f_1, f_2, ... ,f_N], g=[g_1, g_2, ... ,g_N] を考える.



内積 **f・g**は，ベクトルfの，g軸成分(または逆)を表す.

=

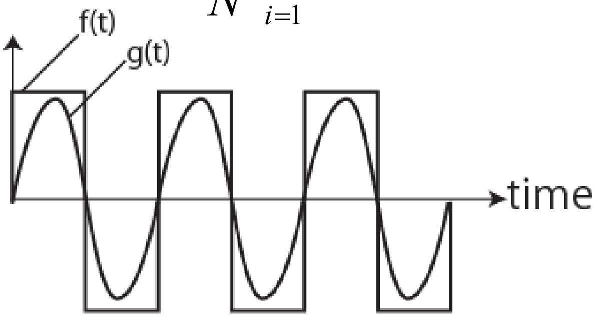
=

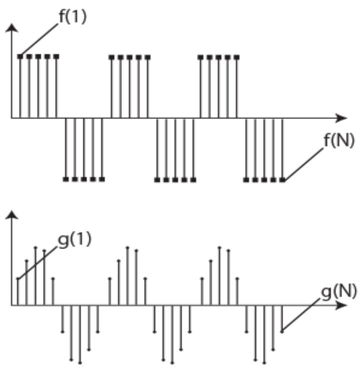
波形fに波形gはどれだけ含まれるか（再）

波形f中の，波形gの成分

$$= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)dt$$ (連続関数)

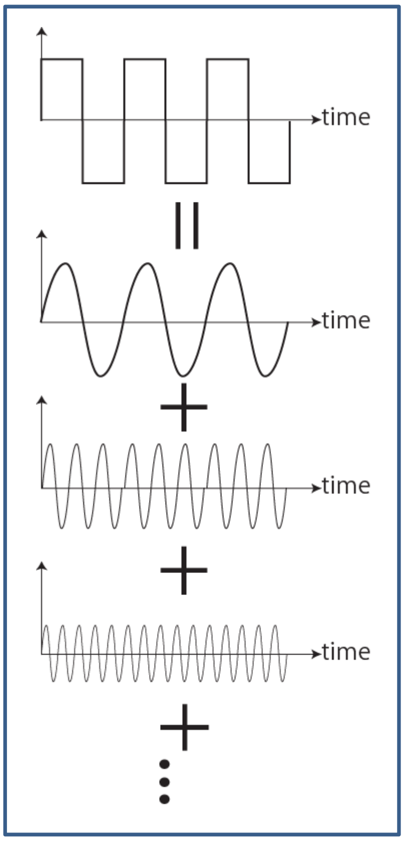
$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(i)g(i)$$ (離散化して考えた場合)





これは二つの波をベクトルと考えた時の内積に他ならない
※内積を連続関数に対して定義

元の波形に正弦波がどれだけ含まれるか



元の波形：周期Tの波形 f(t)

周期Tのcosine波はどれだけ含まれるか

$a_1 =$

周期Tのsine波はどれだけ含まれるか

$b_1 =$

周期2Tのcosine波はどれだけ含まれるか

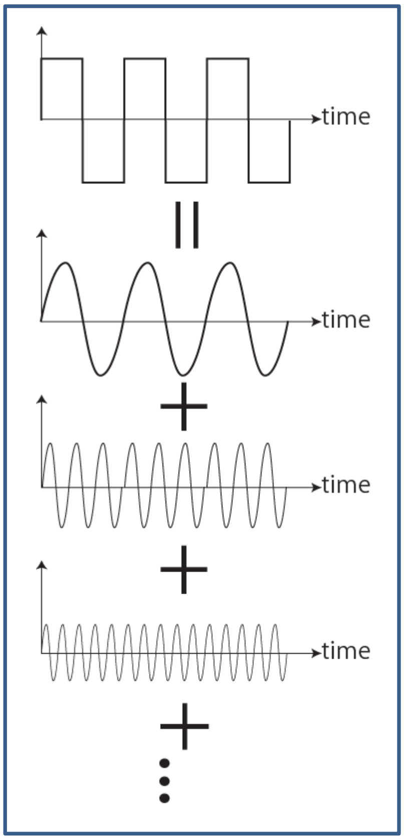
$a_2 =$

周期2Tのsine波はどれだけ含まれるか

$b_2 =$

以下a_3, b_3, a_4, b_4, …

フーリエ級数展開：定義



周期Tの波形 f(t)は次のように分解できる

$$f(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(2\pi mt/T) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(2\pi mt/T)$$

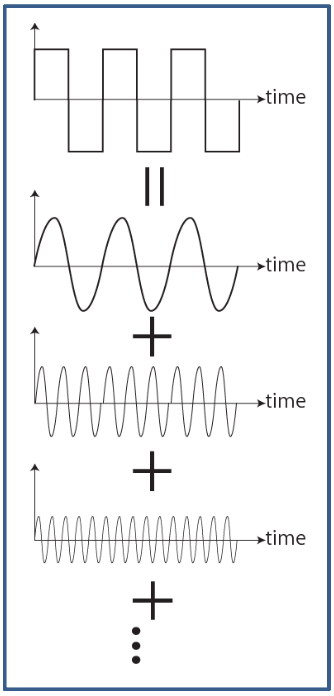
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$ 平均値（DC成分）

$$a_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi mt/T)dt$$

$$b_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2\pi mt/T)dt$$

※この授業では係数は気にしない.

フーリエ級数展開の意味するところ



元の波形：周期Tの波形 f(t)

周期Tのcosine波はどれだけ含まれるか

$$a_1 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi t/T)dt$$

周期Tのsine波はどれだけ含まれるか

$$b_1 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2\pi t/T)dt$$

周期2Tのcosine波はどれだけ含まれるか

$$a_2 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi t\times 2/T)dt$$

周期2Tのsine波はどれだけ含まれるか

$$b_2 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2\pi t\times 2/T)dt$$

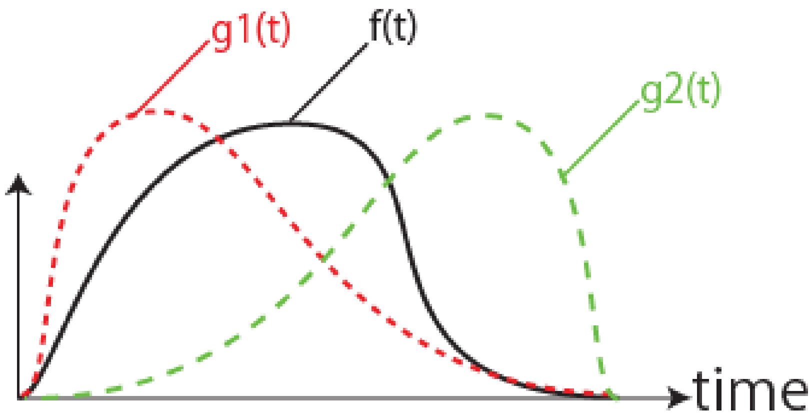
以下a_3, b_3, a_4, b_4, …

①分解の仕方は一通り

②分解した各成分を合成すると元に戻る

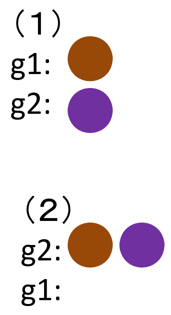
これは当たり前のことではない！！

①分解の仕方は一通り？



f=[茶色の丸,
紫の丸,
紫の三角]

g1:茶色
g2:丸

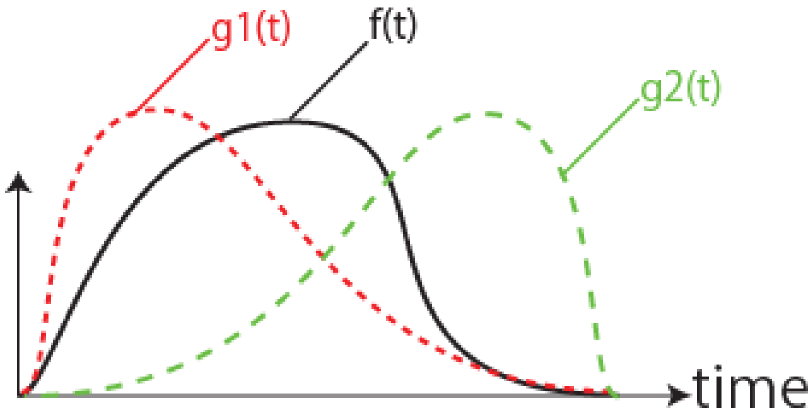


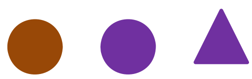
f(t)を，g1(t)成分と，g2(t)成分と，残りに分けたい．

f(t)から，
（1）まずg1(t)成分を抽出し，残りからg2(t)成分を抽出する
（2）まずg2(t)成分を抽出し，残りからg1(t)成分を抽出する
この二つは，通常は異なる結果を生む．

普通，分解の仕方は抽出の順番に依存

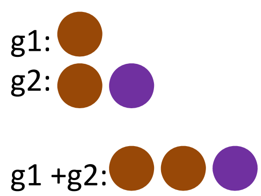
②分解した各成分を合成すると元に戻る？





f=[茶色の丸,
紫の丸,
紫の三角]

g1:茶色
g2:丸



ある成分を抽出した「残り」から次の成分を抽出したことが問題？
では
f(t)からg1(t)成分を抽出
f(t)からg2(t)成分を抽出
すれば抽出の順番は関係なくなる？？

この二成分を合成すると，元のf(t)より大きくなってしまう．

普通，合成しても元に戻らない

つまり

ある関数f(t)を，
関数群$g_1(t)$, ... , $g_\infty(t)$の成分に分解するとき，
(たとえばフーリエ変換ではsin,cos．これを基底関数と呼ぶ)

分解方法が一通りで，
分解結果を合成して元に戻るのは

稀で特殊

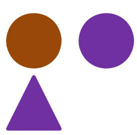
うまくいくのは

任意の基底関数同士が，
お互いの要素を持たないとき，
分解の仕方は一通りとなる．

f=[茶色の丸，
紫の丸，
紫の三角]

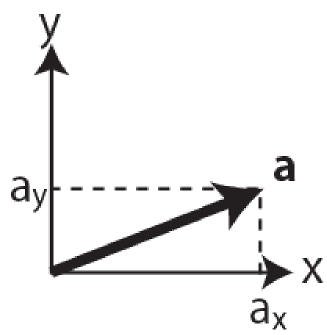
g1:丸
g2:三角

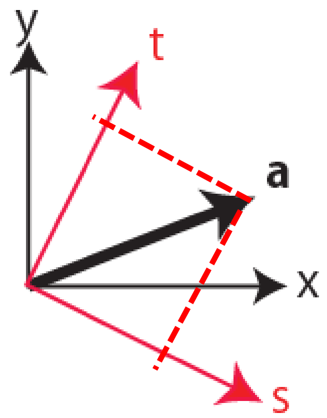
g1:
g2:



g1＋g2＝f

ベクトルの成分（復習）



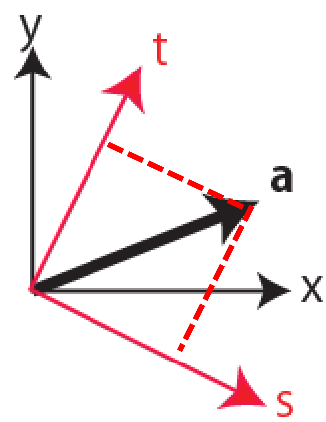


ベクトル**a**は，
●ベクトル**x**と**y**の成分に一意に分けられる．各成分は**a・x**，**a・y.**
●ベクトル**s**と**t**の成分に一意に分けられる．各成分は**a・s**，**a・t.**

これは
●ベクトル**x**と**y**が，お互いの成分を持たないから．
●ベクトル**s**と**t**が，お互いの成分を持たないから．

このとき，**x**と**y(s**と**t)**は直交しているという．

直交ベクトルと直交基底（復習）

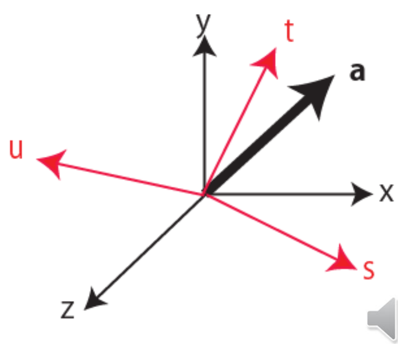


直交ベクトル同士は，内積が0である．

$x \cdot y=[1,0] \cdot [0,1]=0$
$s \cdot t=[s_x,s_y] \cdot [t_x,t_y]=0$

逆に，内積が0であることが直交基底であることの条件！

N次元空間でN個のベクトルが，
どの二つをとっても直交しているとき，
これを直交基底と呼び，
その空間の任意の点は，
直交基底の成分で表せる．
（図では**x,y,z**が直交基底．**s,t,u**も直交基底）



N次元空間の直交基底

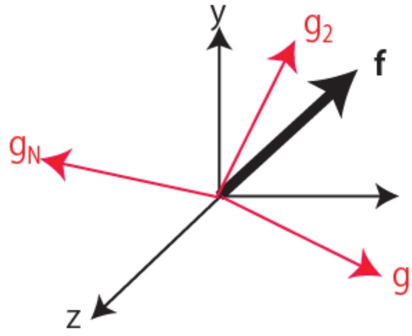
N次元空間で，N個のベクトル

$\mathbf{g_1}$ =[g_{11}, g_{12}, …. ,g_{1N}],

$\mathbf{g_2}$ =[g_{21}, g_{22}, …. ,g_{2N}],

…

$\mathbf{g_N}$ =[g_{N1}, g_{N2}, …. ,g_{NN}]を考える.



すべてのペアの内積 $\mathbf{g_i}$・$\mathbf{g_j}$が0なら，

$\mathbf{g}_\mathrm{i} \bullet \mathbf{g}_j =$

$=$

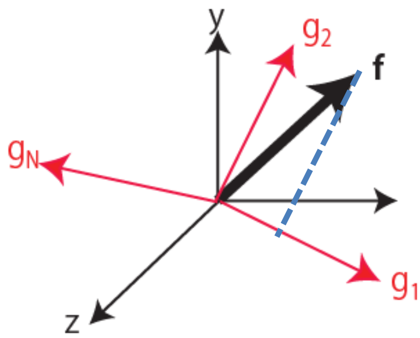
$=$

$\mathbf{g_1}$ ～$\mathbf{g_N}$は直交基底であり，

任意のN次元ベクトル**f**は，$\mathbf{g_1}$ ～$\mathbf{g_N}$の各成分の和で一意に表せる.

N次元空間の直交基底の成分

N次元ベクトル**f**の$\mathbf{g_i}$ 成分は，**f**と$\mathbf{g_i}$ の内積.



結局，ベクトルfは，次のように分解される.

$\mathbf{f} = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g_1})\, \mathbf{g_1} + (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g_2})\, \mathbf{g_2} + \ldots + (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g_N})\, \mathbf{g_N}$

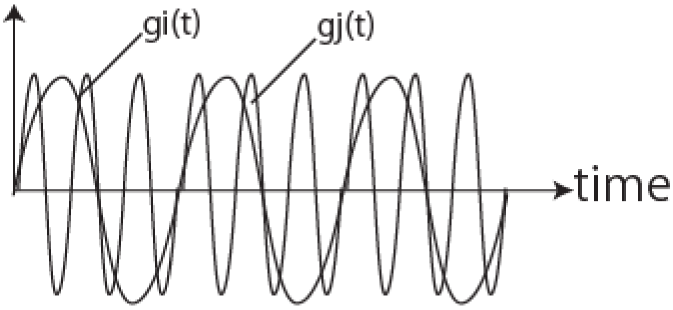
$$[f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_N] \bullet [g_{11} \quad g_{12} \quad \cdots \quad g_{1N}]$$
$$= \sum_{n=1}^{N} f_n g_{1n}$$

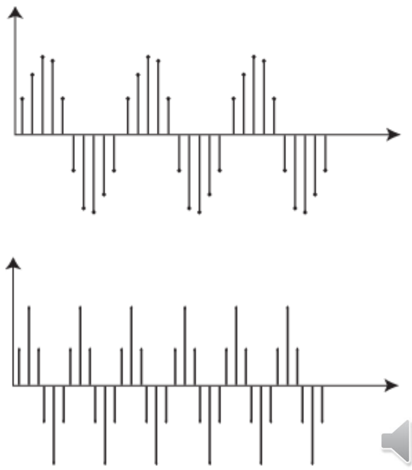
関数でも「直交」を内積から定義できる

波形*g1*と*g2*の内積を取る.

$$= \quad \frac{1}{T}\int_0^T g_1(t)g_2(t)dt$$ （連続関数）

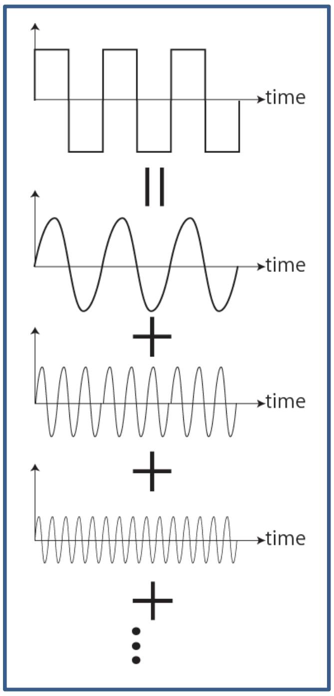
$$= \quad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g_1(n)g_2(n)$$ （離散化して考えた場合）





これで準備は整った

フーリエ級数展開の意味するところ（再）



元の波形：周期Tの波形 f(t)

周期Tのcosine波はどれだけ含まれるか

$$a_1 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi t/T)dt$$

周期Tのsine波はどれだけ含まれるか

$$b_1 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2\pi t/T)dt$$

周期2Tのcosine波はどれだけ含まれるか

$$a_2 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi t\times 2/T)dt$$

周期2Tのsine波はどれだけ含まれるか

$$b_2 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2\pi t\times 2/T)dt$$

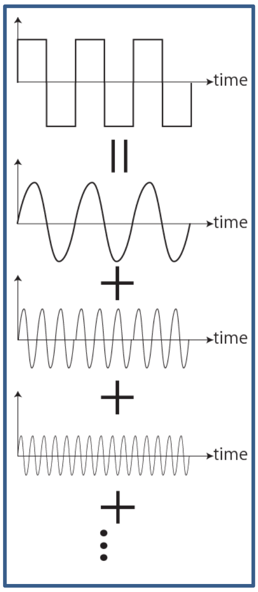
以下a_3, b_3, a_4, b_4, ...

①分解の仕方は一通り

②分解した各成分を合成すると元に戻る

これは当たり前のことではない！！

フーリエ級数の各基底関数の内積を取る



二つの基底関数，cos(2πmt/T)，cos(2πnt/T)の内積は？

$$\int_0^T \cos(2\pi mt/T)\cos(2\pi nt/T)dt$$

$=$

これはm=nでなければ必ず0

二つの基底関数，cos(2πmt/T)，sin(2πnt/T)の内積は？

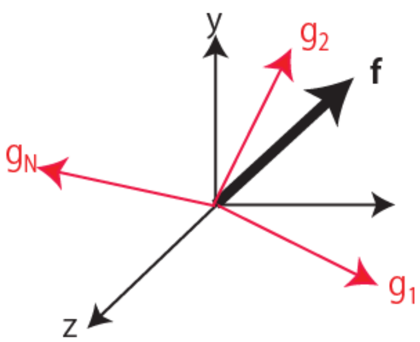
$$\int_0^T \cos(2\pi mt/T)\sin(2\pi nt/T)dt$$

$=$

これも必ず0

任意の基底関数の内積が0.
⇒直交基底となる！！

フーリエ級数の基底関数は直交基底



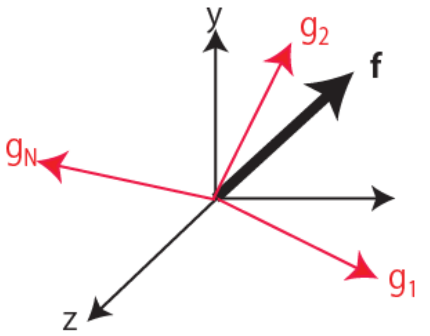
g1=cos(2π×1t/T)
g2=sin(2πt×1t/T)
g3=cos (2π×2t/T)
g4=sin(2πt×2t/T)
g5=cos (2π×3t/T)
g6=sin(2πt×3t/T)
…

これらは，たがいの要素を持っておらず、
直交基底を構成する

よって，任意の関数 f はg1～g…によって一意に表現できる.

離散フーリエ変換 (DFT)

有限長さの関数(0<t<T)を，N分割して離散的に表す．f(t) ⇒ [f1,f2,...,fN]



基底関数⇒N次元基底ベクトルに
g1=cos(2π×1t/T) = [g11,g12,...,g1N]
g2=sin(2πt×1t/T) = [g21,g22,...,g2N]
g3=cos (2π×2t/T) = [g31,g32,...,g3N]
g4=sin(2πt×2t/T) = [g41,g42,...,g4N]
g5=cos (2π×3t/T) = [g51,g52,...,g5N]
g6=sin(2πt×3t/T) = [g61,g62,...,g6N]
...

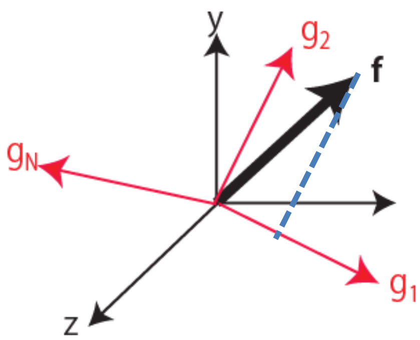
- これらは，たがいに直交するN次元ベクトルであり，直交基底を構成する
- よって，任意の波形 f，すなわちベクトル[f1,f2,...fN]はg1〜gNによって一意に表現できる
- 後述するように<u>通常はcos,sinではなくexp関数を用いる</u>

行列による表現

N次元ベクトルfのg_i 成分は，**f**とg_i の内積．
結局，ベクトルfは，次のように分解される．

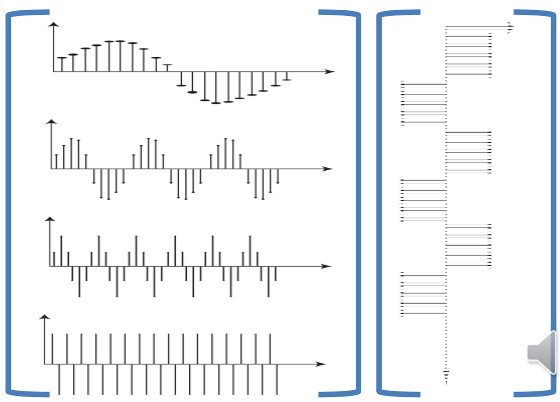
$$\mathbf{f} = (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}_1)\,\mathbf{g}_1 + (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}_2)\,\mathbf{g}_2 + \ldots + (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}_N)\,\mathbf{g}_N$$

g1の成分．フーリエ級数

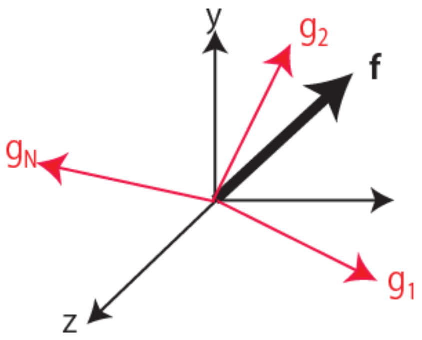


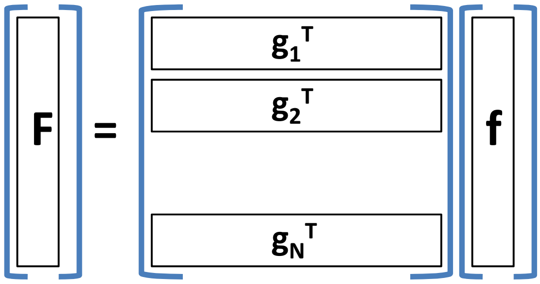
離散フーリエ変換をするには，$\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}_1$, $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}_2$，... $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}_N$なる，
N個の内積を計算すればよい．

$$\left[\mathbf{F}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^T \\ \mathbf{g}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{g}_N^T \end{bmatrix} \left[\mathbf{f}\right]$$



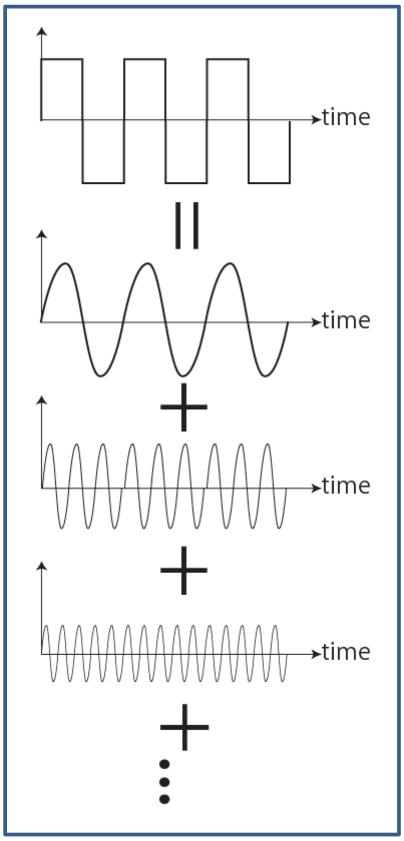
離散フーリエ変換とは





つまり
行列特に回転行列による座標変換の一種であり，
実空間の値で表されているベクトル f を
フーリエ空間の値で表されるベクトル F で表現するもの．

複素フーリエ級数展開：定義



周期Tの波形 f(t)は次のように分解できる

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \exp(j2\pi mt/T)$$

$$c_m = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp(-j2\pi mt/T)dt$$

sin(2πmt/T)，cos(2πmt/T)の代わりに，
exp(i2πmt/T)を用いて整理したもの．
係数c_mはもはや複素数である．

exp(j2πmt/T)は直交関数系である．すなわち

が，m=n以外で成り立つ．

フーリエ変換

“周期T” ではない波形 f(t)に対する変換. Tを無限大とすることで導出.

フーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

$$c_m = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp(-j2\pi mt/T)dt$$

逆フーリエ変換

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \exp(j2\pi mt/T)$$

離散フーリエ変換(DFT)

有限長の信号を離散化し、それにたいしてフーリエ変換するもの。
フーリエ変換の結果も有限かつ離散なデータ列となる。

離散フーリエ変換

$$F(k) = \sum_{t=0}^{N-1} f(t)\exp(-j2\pi\frac{k}{N}t)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

離散逆フーリエ変換

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N-1} C(k)\exp(j2\pi\frac{k}{N}t)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

振幅，パワースペクトラム，位相

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$ 一般的に複素数の関数

$$\omega = 2\pi f$$ 角周波数

角周波数ωでの振幅

角周波数ωでのパワースペクトラム

角周波数ωでの位相

パワースペクトラムで、元の信号がもつ周波数成分を観察できる

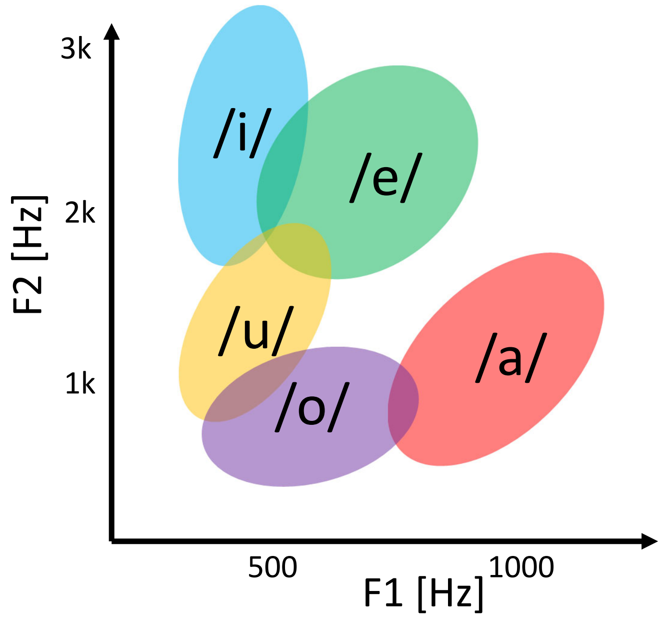
パワースペクトラムの観察

スペクトラム・アナライザ

低　周波数　高

アイウエオ

音声認識の手がかり：フォルマント



母音は主な周波数（第一フォルマント）と，次に多い周波数（第二フォルマント）で認識

（参考）しゃべるピアノ

リンクを参照

Speaking Piano
http://www.youtube.com/watch?v=muCPjK4nGY4
Talking Piano
https://www.youtube.com/watch?v=-6e2c0v4sBM

レポート

次のサンプルコードを参考に，同じ周期の正弦波，矩形波，三角波をフーリエ変換し，パワースペクトルを観察，比較せよ．
レポートでは
●3つのパワースペクトルを一つのグラフに表示する一つのソースコード
●そこからわかったこと，すなわち音色の違いの原因の考察をコメント中に

```
//一周期100の矩形波(ただし直流成分を無くすため平均値0としている)
wave=[ones(1,50), zeros(1,50)] - 0.5;

//5回繰り返す（回数は適当）
wave = [wave,wave,wave,wave,wave];

//フーリエ変換
fourier = fft(wave);

//パワースペクトルを計算
power_spec = fourier .* conj(fourier);

//計算結果を表示
plot(power_spec);
```

（参考）Python版

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

wave = np.concatenate([np.ones(50),np.zeros(50)])
wave = np.concatenate([wave, wave, wave, wave, wave])
fourier = np.fft.fft(wave)
power_spec = fourier * np.conj(fourier)
plt.plot(power_spec)
plt.show()
```

レポート課題（再掲）

- 授業ではScilab（or Python）を使えることを前提に課題を出します.
- 何かこだわりがあれば，他の物でもかまいません.
  （Matlab, Mathematica, Octave, MATX, Excel,…)
- 課題はほぼ毎回出します.

- Scilab(or Python)を使ったレポートは下記フォームにソースコードをコピペし，考察を書く形で提出してください．ソースコード以外(wavファイルなど）レポートには添付しなくて結構です.

https://goo.gl/forms/qf6wCOQC6VQMglee2

レポートの締め切りは次の週の授業開始前