

インタラクティブシステム論 第2回

梶本裕之

Twitter ID kajimoto

ハッシュタグ #ninshiki

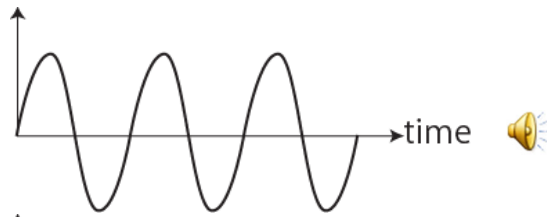


フーリエ変換

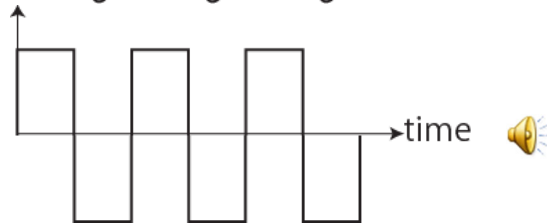


信号の「性質」を知りたい

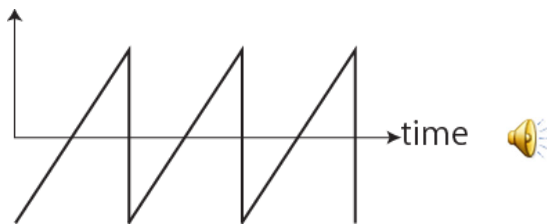
正弦波の音



矩形波の音

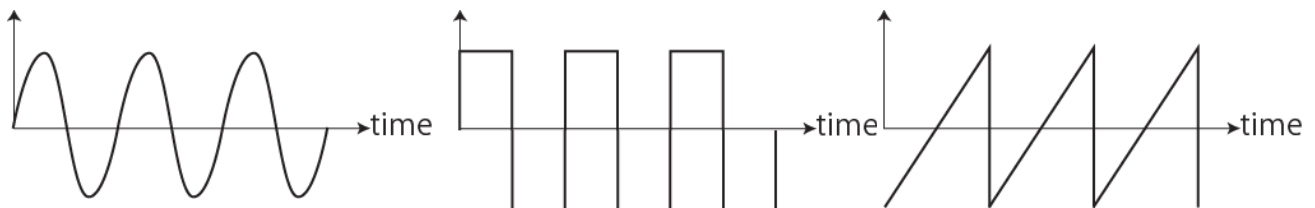


三角波の音



(Q)この3つは、何が違うのだろうか？

答えは認識の数だけある



(Q)この3つは、何が違うのだろうか？

(A1)形が違う

(A2)上昇速度, 下降速度が違う

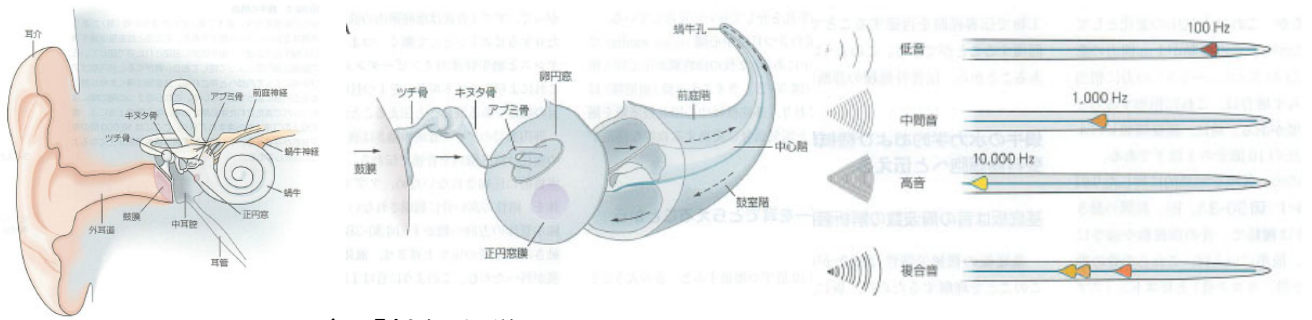
(A3)ある閾値以上となる時間幅が違う

etc...

すべて正しい

回答の正しさは、現象の本質にどれだけ迫っているかによる。
つまり、現象を認識するシステムによって正答は異なる。

人間における音の「認識」とは



カンデル「神経科学」より <https://www.medsico.jp/kandel>

- 気体の振動 → 鼓膜の振動 → 耳小骨によるリレー → 内耳のリンパ液（液体）の振動
- 基底膜の振動基底膜上に進行波を形成
 - 低周波ほど減衰せずに奥まで到達する（周波数分解）
 - 基底膜上の有毛細胞によって振動検出

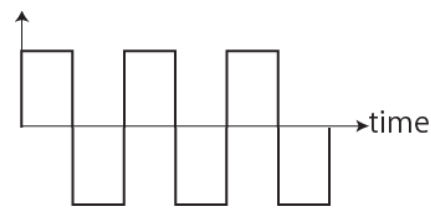


音の場合

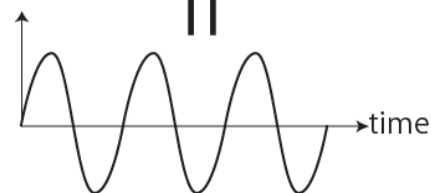
耳は音を、周波数で分解して認識。

⇒ 周波数成分がアルファベット、
その合成が単語に相当

⇒ 音の場合の答え：
「周波数成分が違う」

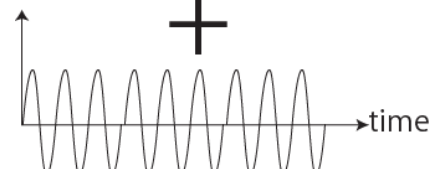


||



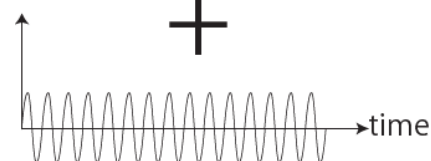
ド

+



ミ

+



ソ

+

⋮



他の多くの場合でも周波数が重要

- 耳は音を、周波数分解して認識する装置
- 耳に限らず、多くの生体センサは周波数分解によって現象を把握 (例: 皮膚)

(Q)なぜ**周波数**なのだろうか

言い換えると、
正弦波はなぜ多くの場合、
「要素」としてふさわしいのだろうか？



物理現象の多くは線形な微分方程式で近似できる

(例) バネ・マス・ダンパ系

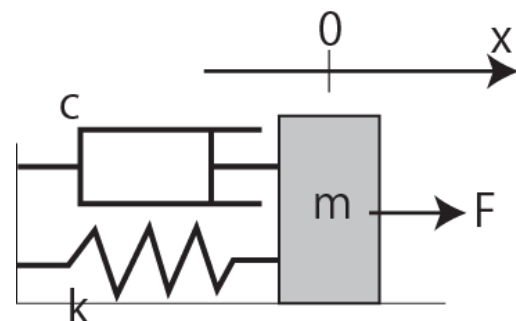
おもりに加わる力は、

F: 外力

cx' : 粘性による力

Kx : バネによる力

ニュートンの法則 $ma = F$ より、



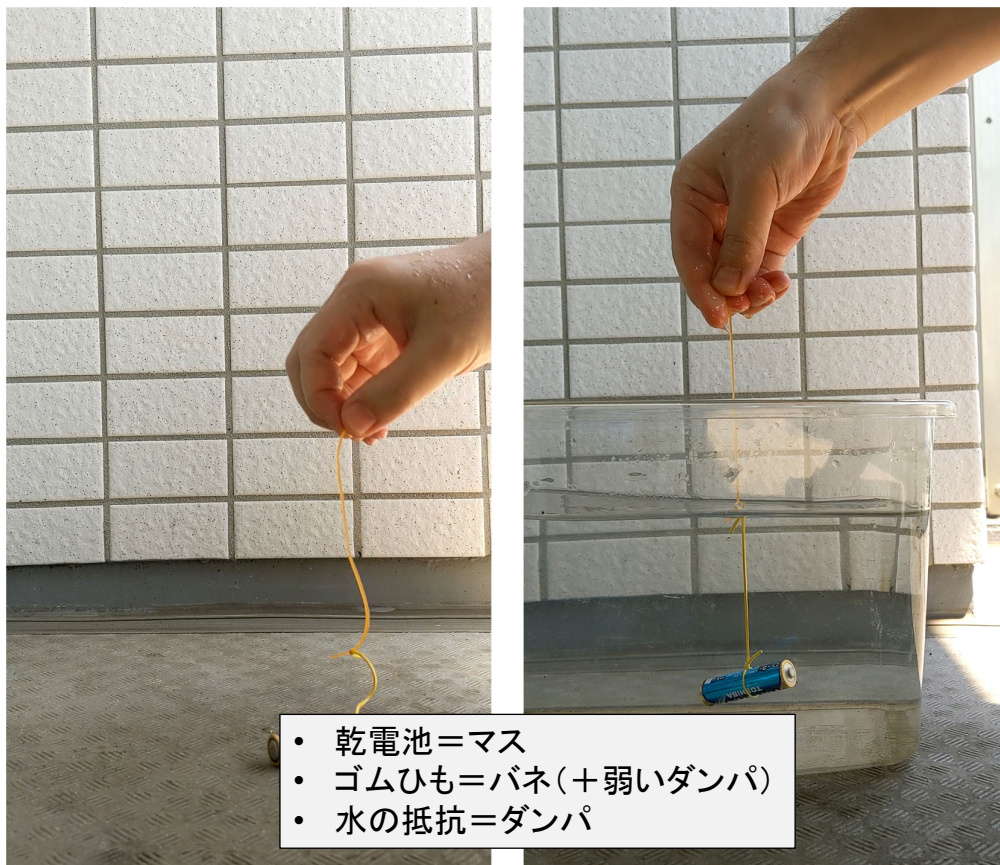
● システムの「入力」と「応答」

✓ 入力: $F(t)$: おもりに加える外力

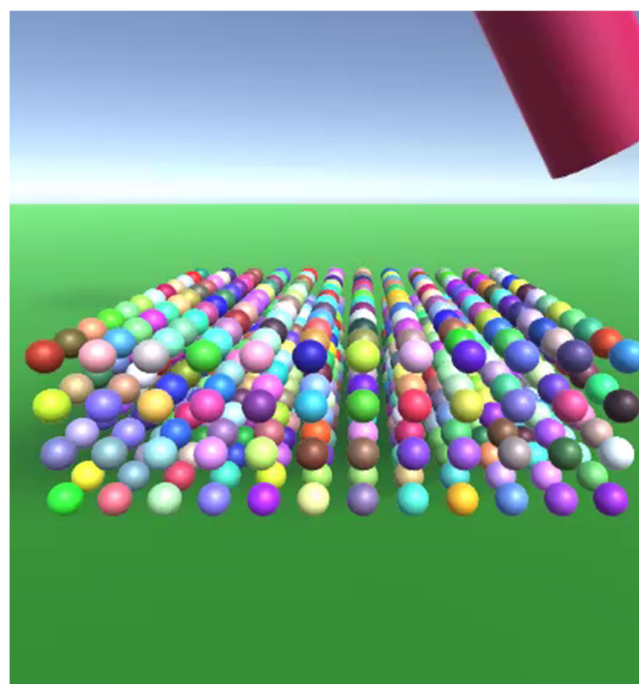
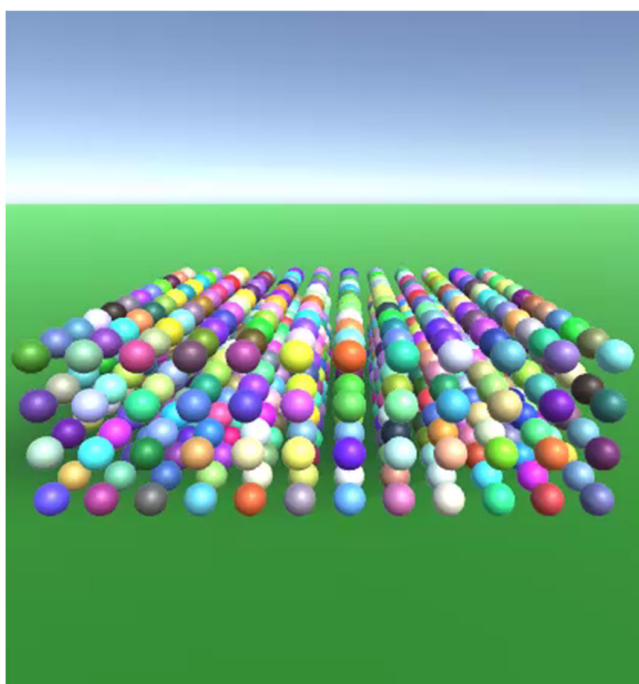
✓ 応答: $x(t)$: おもりの動き



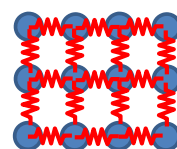
バネ・マス・ダンパ系



バネ・マス・ダンパ系による世界の記述



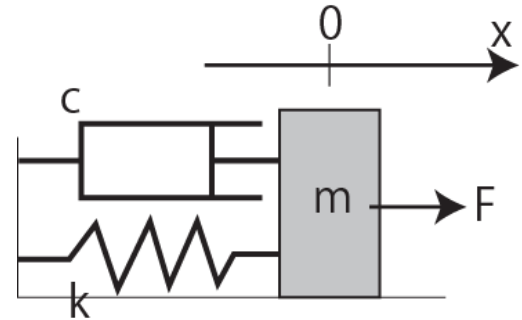
Unity環境中の弾性体のシミュレーション
<https://gist.github.com/HiroyukiKajimoto/d6a7bff9c175cc96cc5728eeebaf6d62>



「入力」と「応答」の関係を知りたい

$$m\ddot{x} = F - kx - c\dot{x}$$

- ✓ 入力: $F(t)$: おもりに加える外力
- ✓ 応答: $x(t)$: おもりの動き



「ある入力波形, $F(t)$ を加えた時に, 応答 $x(t)$ はどうなるか」

この問題に一般的に答えることは出来るか？

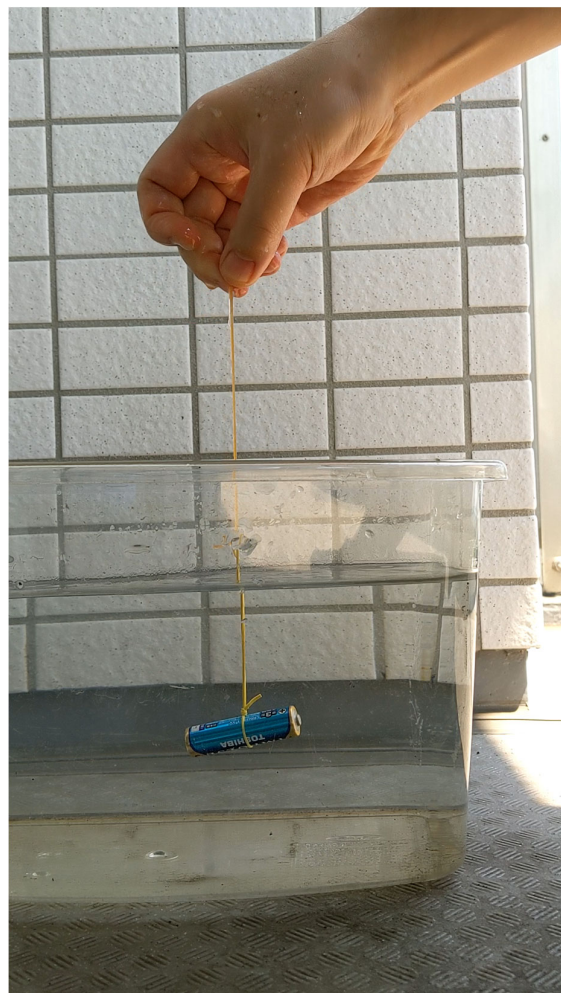
出来る. 正弦波入力を考えることによって



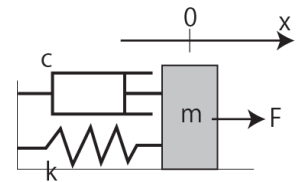
色々な正弦波入力 に対する応答は？

乾電池の動きは

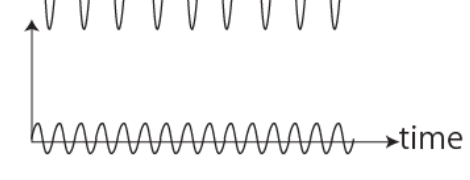
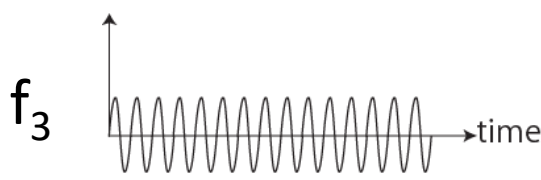
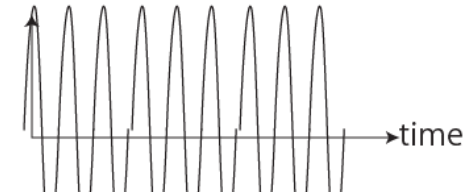
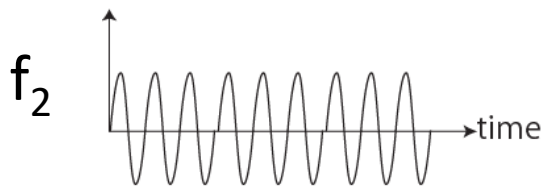
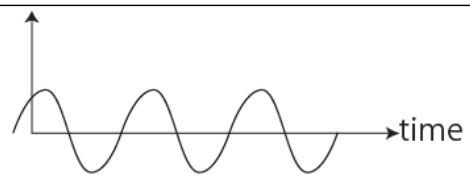
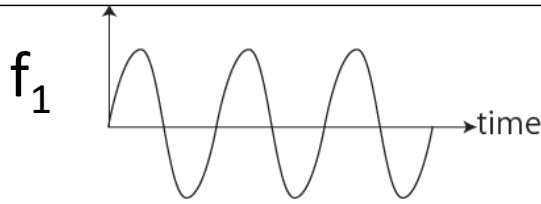
- 低周波: 追従する正弦波
- 中周波: 反転して大きく振動する正弦波
- 高周波: ほとんど動かない正弦波



正弦波は歪まない



●線形な微分方程式で記述されるシステムでは、正弦波の入力は「振幅」と「位相」を変えるものの、同じ周波数の正弦波で応答される。



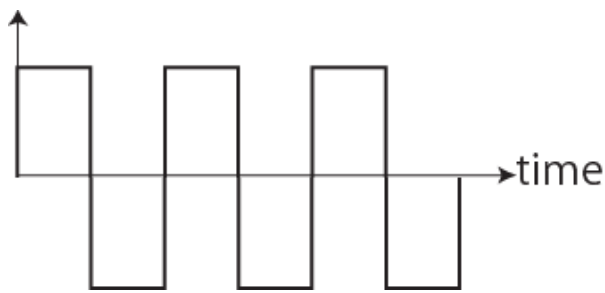
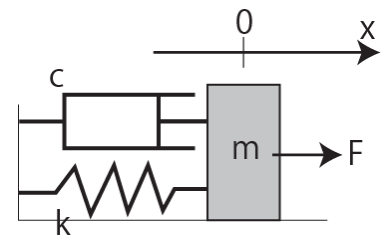
●入力: $F(t) = \sin(ft)$

●応答: $x(t)$

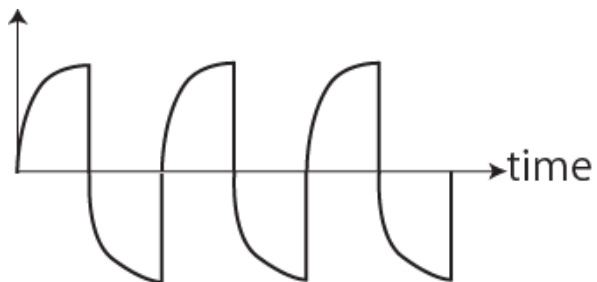


一般の波は(もちろん)歪む

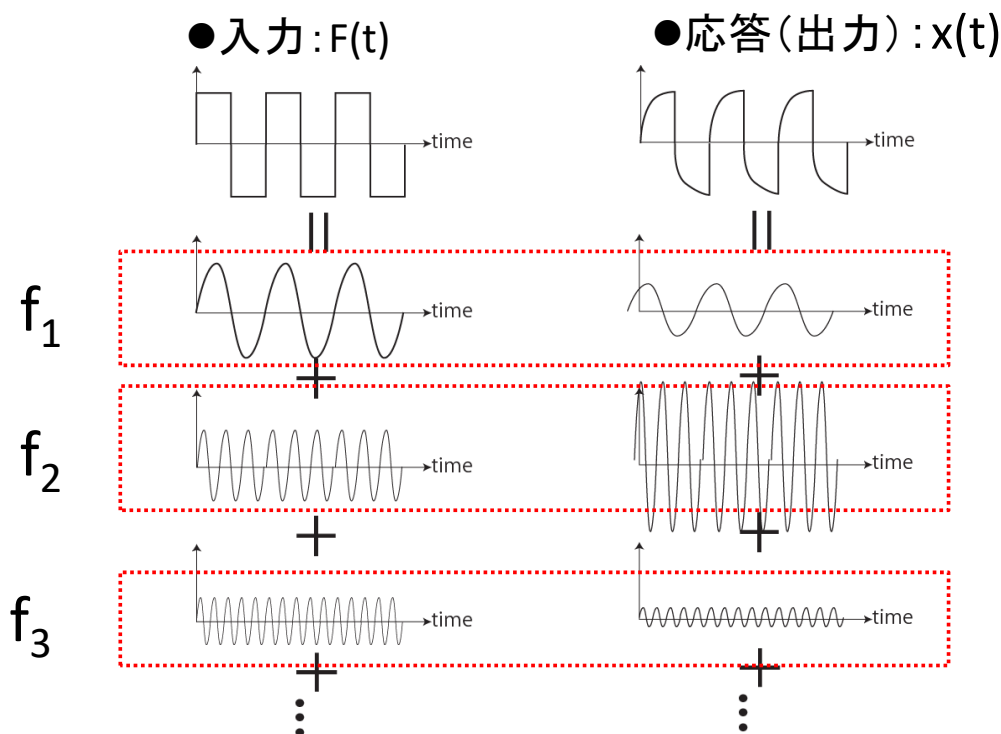
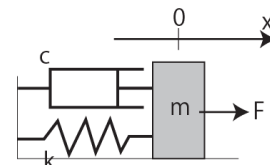
●入力: $F(t)$ 矩形波状の力を加える



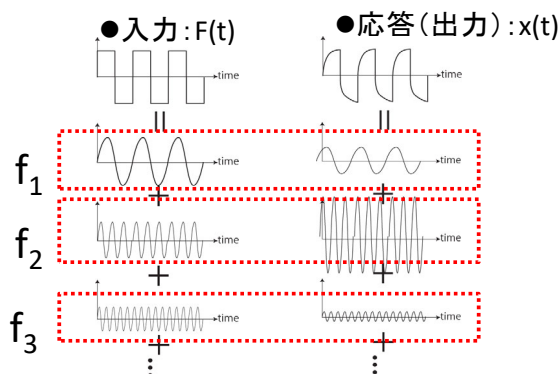
●応答(出力): $x(t)$



歪みを周波数で分解して説明



(Q) 正弦波はなぜ多くの場合、要素としてふさわしいのだろうか？



(A1) 正弦波入力に対する出力も
同じ周波数の正弦波となる(と近似できる事が多い)から

(A2) 周波数**成分ごと**の入出力関係から、
一般の入力に対する応答(出力)を**合成**できるから

(参考)「線形」微分方程式の意味

$$m\ddot{x} = F - kx - c\dot{x}$$

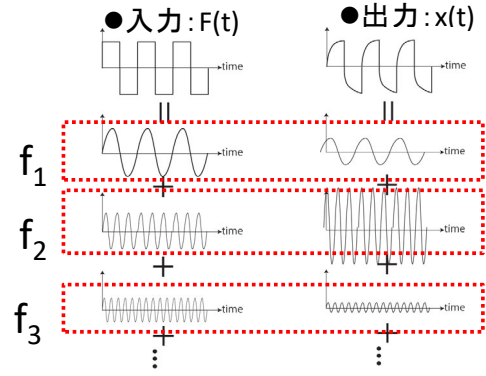
$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

$$m\ddot{x}_1(t) + c\dot{x}_1(t) + kx_1(t) = F_1(t)$$

$$m\ddot{x}_2(t) + c\dot{x}_2(t) + kx_2(t) = F_2(t)$$



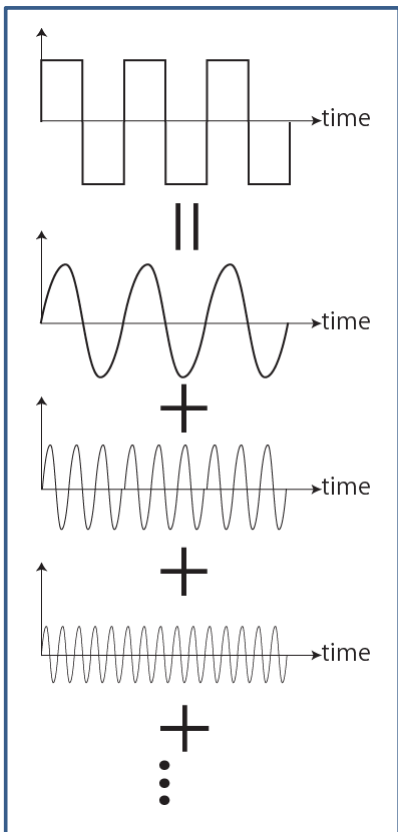
$$m(\ddot{x}_1(t) + \ddot{x}_2(t)) + c(\dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t)) + k(x_1(t) + x_2(t)) = F_1(t) + F_2(t)$$



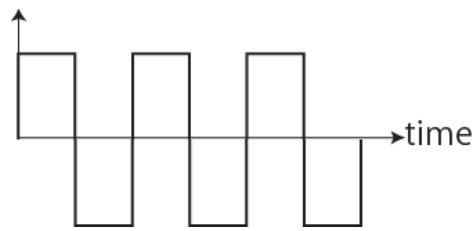
2つの微分方程式を足しあわせても成立する
 (波形の重ね合わせが成立する)
 (例えばもし $x^2(t)$ 等の項があるとこれは成立しない)



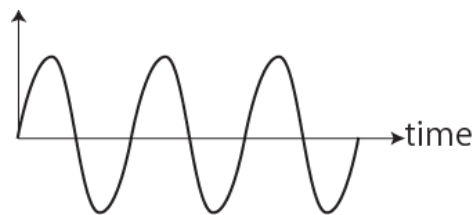
波の中に含まれる正弦波の成分を調べたい



第一段階として,



の中に,



はどれだけ含まれるだろうか?

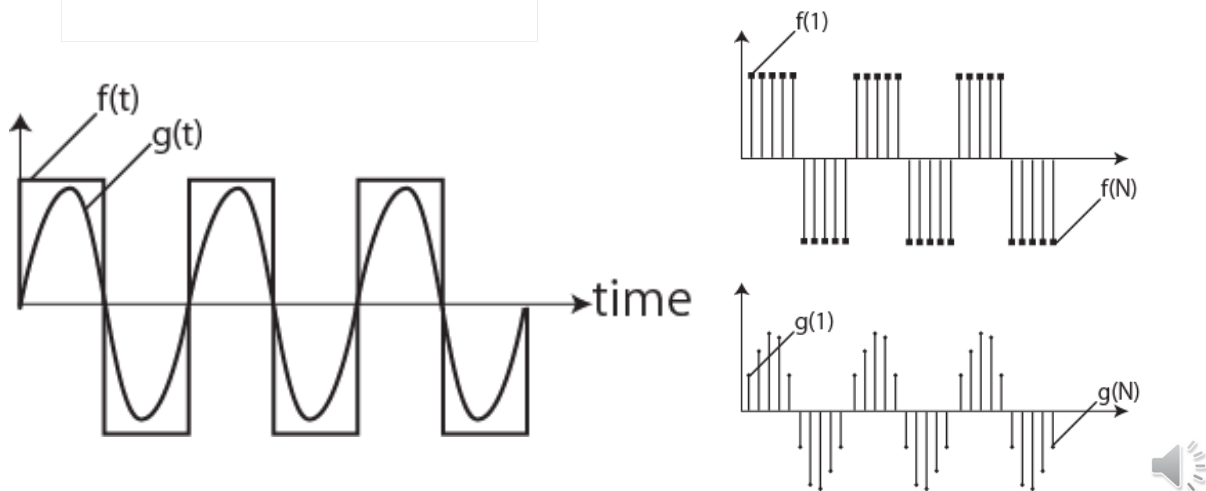


波形 f に波形 g はどれだけ含まれるか

波形 f 中の, 波形 g の成分

$$= \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t)dt \quad (\text{連続関数})$$

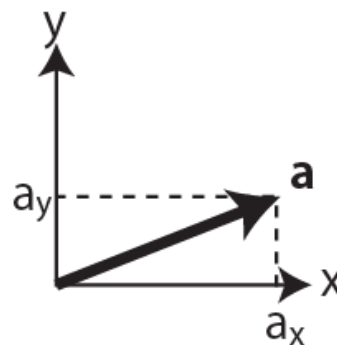
$$= \boxed{\phantom{\frac{1}{T} \sum_{n=1}^N f(n)g(n)}} \quad (\text{離散化して考えた場合})$$



ベクトル空間と内積(復習)

ベクトル $\mathbf{a}=[a_x, a_y]$ の x 成分は? a_x

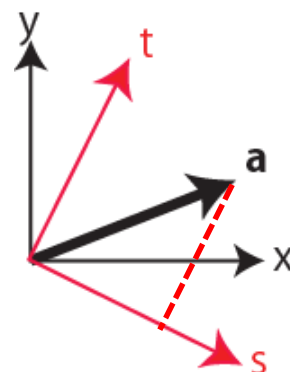
これはベクトル \mathbf{a} とベクトル $\mathbf{x}=[1,0]$ との **内積** である.



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = [a_x, a_y] \cdot [1, 0] = a_x$$

回転した座標軸, s, t を考える.
ベクトル $\mathbf{a}=[a_x, a_y]$ の, s 成分は?

これはベクトル \mathbf{a} とベクトル $\mathbf{s}=[s_x, s_y]$ との **内積** である.



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{s} = [a_x, a_y] \cdot [s_x, s_y]$$

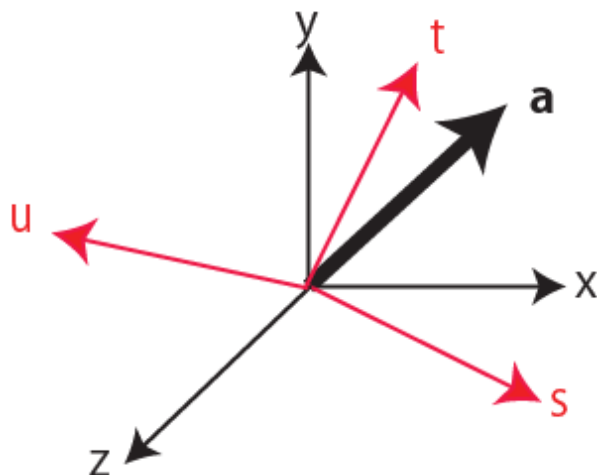
内積は, **あるベクトルが別のベクトルの成分をどれだけ持つか** を表す

さらに

3次元空間に, 座標軸 s, t, u を考える.
ベクトル $\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]$ の, s 成分は?

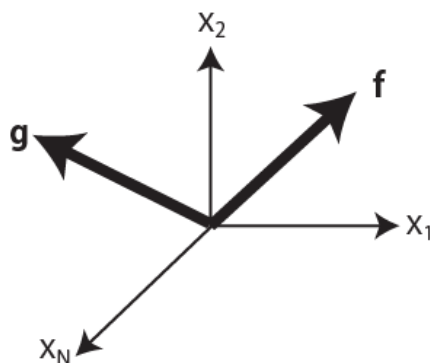
これはベクトル \mathbf{a} とベクトル \mathbf{s} との **内積** である.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{s} = [a_1, a_2, a_3] \cdot [s_x, s_y, s_z]$$



では

N 次元空間で, 二つのベクトル
 $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_N], \mathbf{g} = [g_1, g_2, \dots, g_N]$ を考える.



内積 $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ は, ベクトル \mathbf{f} の, \mathbf{g} 軸成分(または逆)を表す.

=

=

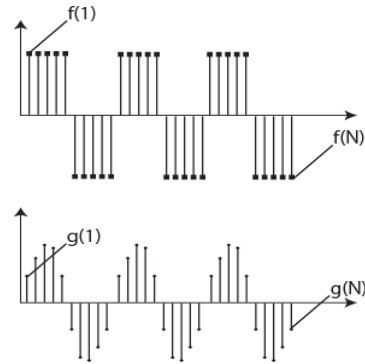
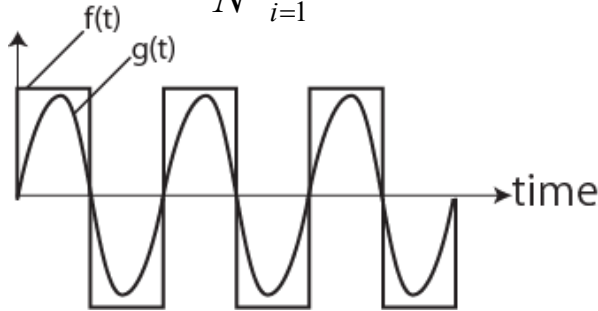


波形 f に波形 g はどれだけ含まれるか (再)

波形 f 中の, 波形 g の成分

$$= \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t)dt \quad (\text{連続関数})$$

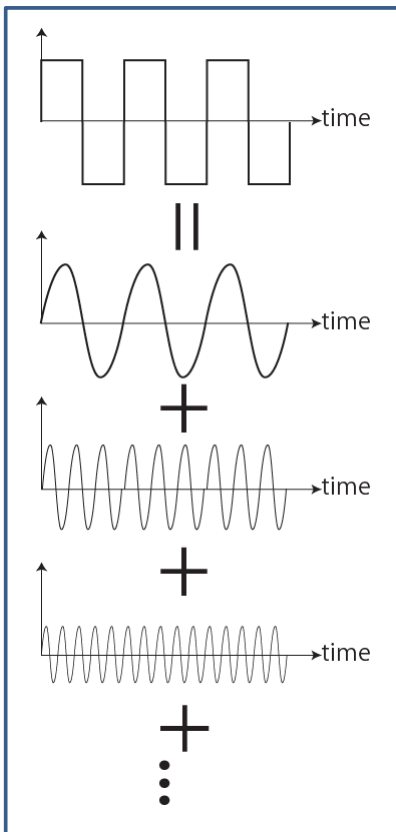
$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(i)g(i) \quad (\text{離散化して考えた場合})$$



これは **二つの波をベクトルと考えた時の内積に他ならない**
 ※内積を連続関数に対して定義



元の波形に正弦波がどれだけ含まれるか



元の波形: 周期 T の波形 $f(t)$

周期 T の cosine 波はどれだけ含まれるか

$$a_1 =$$

周期 T の sine 波はどれだけ含まれるか

$$b_1 =$$

周期 $2T$ の cosine 波はどれだけ含まれるか

$$a_2 =$$

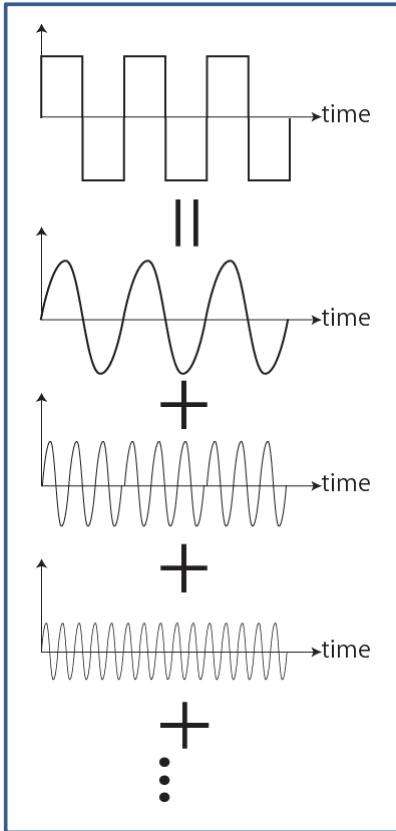
周期 $2T$ の sine 波はどれだけ含まれるか

$$b_2 =$$

以下 $a_3, b_3, a_4, b_4, \dots$



フーリエ級数展開：定義



周期 T の波形 $f(t)$ は次のように分解できる

$$f(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(2\pi mt / T) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(2\pi mt / T)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad \text{平均値 (DC成分)}$$

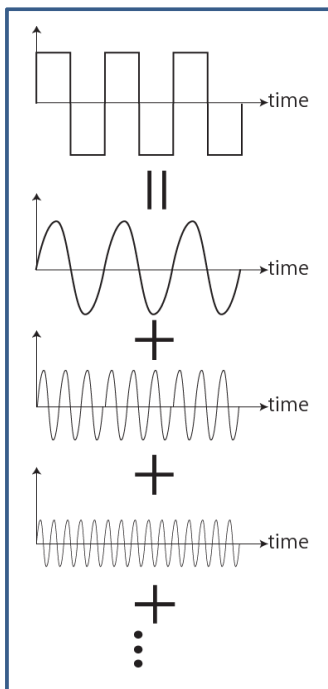
$$a_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi mt / T) dt$$

$$b_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi mt / T) dt$$

※この授業では係数は気にしない。



フーリエ級数展開の意味するところ



元の波形：周期 T の波形 $f(t)$

周期 T の cosine 波はどれだけ含まれるか

$$a_1 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi / T) dt$$

周期 T の sine 波はどれだけ含まれるか

$$b_1 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi / T) dt$$

周期 $2T$ の cosine 波はどれだけ含まれるか

$$a_2 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi \times 2 / T) dt$$

周期 $2T$ の sine 波はどれだけ含まれるか

$$b_2 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi \times 2 / T) dt$$

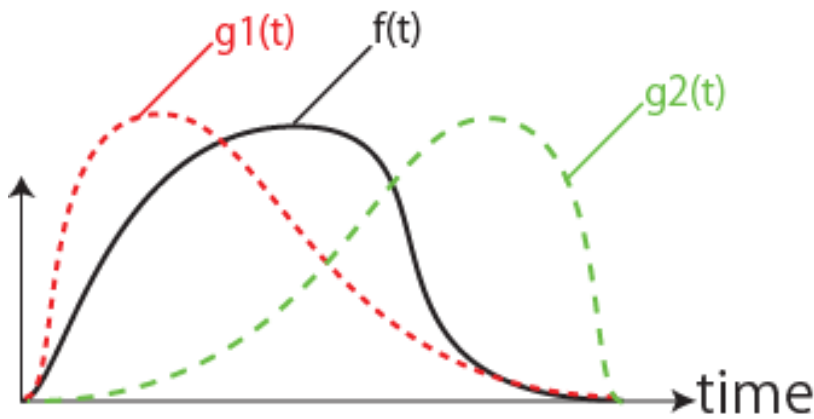
以下 $a_3, b_3, a_4, b_4, \dots$

① 分解の仕方は一通り
② 分解した各成分を合成すると元に戻る

これは当たり前のことではない！！



①分解の仕方は一通り？



f(t)を, $g1(t)$ 成分と, $g2(t)$ 成分と, 残りに分けたい.

f(t)から,

- (1)まず $g1(t)$ 成分を抽出し, 残りから $g2(t)$ 成分を抽出する
 - (2)まず $g2(t)$ 成分を抽出し, 残りから $g1(t)$ 成分を抽出する
- この二つは, 通常は異なる結果を生む.



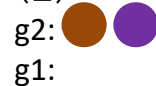
f=[茶色の丸,
紫の丸,
紫の三角]

g1:茶色
g2:丸

(1)



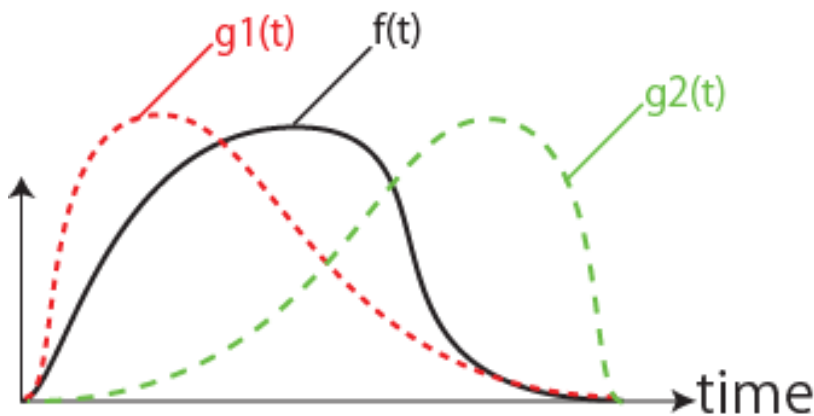
(2)



普通, 分解の仕方は抽出の順番に依存



②分解した各成分を合成すると元に戻る？



ある成分を抽出した「残り」から次の成分を抽出したことが問題？
では

f(t)から $g1(t)$ 成分を抽出

f(t)から $g2(t)$ 成分を抽出

すれば抽出の順番は関係なくなる？



f=[茶色の丸,
紫の丸,
紫の三角]

g1:茶色
g2:丸



この二成分を合成すると, 元のf(t)より大きくなってしまう.

普通, 合成しても元に戻らない



つまり

ある関数 $f(t)$ を,
関数群 $g_1(t), \dots, g_\infty(t)$ の成分に分解するとき,
(たとえばフーリエ変換では \sin, \cos . これを基底関数と呼ぶ)

分解方法が一通りで,
分解結果を合成して元に戻るの

稀で特殊



うまくいくのは

任意の基底関数同士が,
お互いの要素を持たないとき,
分解の仕方は一通りとなる.



f =[茶色の丸,
紫の丸,
紫の三角]

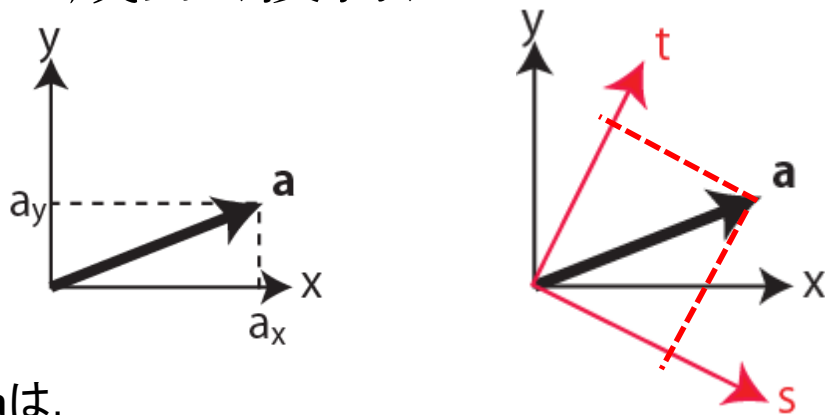
g_1 :丸
 g_2 :三角



$$g_1 + g_2 = f$$



ベクトルの成分(復習)



ベクトルaは,

- ベクトルxとyの成分に一意に分けられる. 各成分は $a \cdot x$, $a \cdot y$.
- ベクトルsとtの成分に一意に分けられる. 各成分は $a \cdot s$, $a \cdot t$.

これは

- ベクトルxとyが, お互いの成分を持たないから.
- ベクトルsとtが, お互いの成分を持たないから.

このとき, xとy(sとt)は直交しているという.

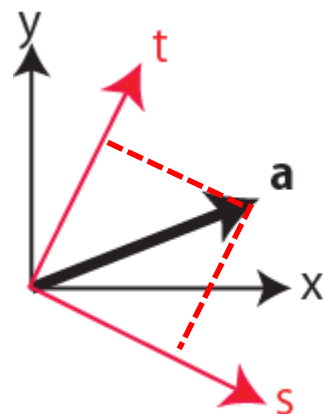


直交ベクトルと直交基底(復習)

直交ベクトル同士は, 内積が0である.

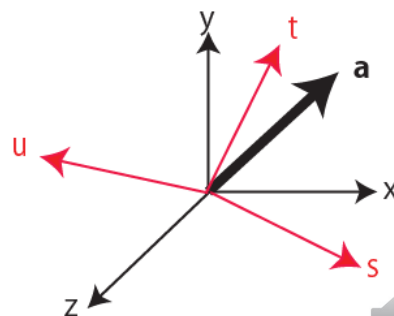
$$x \cdot y = [1, 0] \cdot [0, 1] = 0$$

$$s \cdot t = [s_x, s_y] \cdot [t_x, t_y] = 0$$



逆に, **内積が0であることが直交基底であることの条件!**

N次元空間でN個のベクトルが,
どの二つをとっても直交しているとき,
これを**直交基底**と呼び,
その空間の任意の点は,
直交基底の成分で表せる.
(図ではx,y,zが直交基底. s,t,uも直交基底)



N次元空間の直交基底

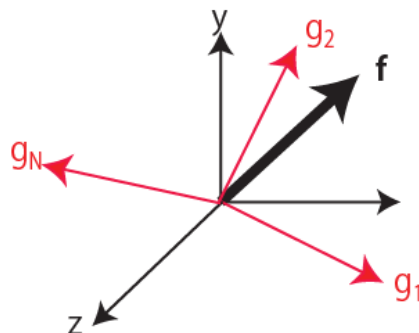
N次元空間で、N個のベクトル

$$\mathbf{g}_1 = [g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1N}],$$

$$\mathbf{g}_2 = [g_{21}, g_{22}, \dots, g_{2N}],$$

...

$\mathbf{g}_N = [g_{N1}, g_{N2}, \dots, g_{NN}]$ を考える。



すべてのペアの内積 $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$ が0なら、

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j =$$

...

=

=

$\mathbf{g}_1 \sim \mathbf{g}_N$ は直交基底であり、

任意のN次元ベクトル \mathbf{f} は、 $\mathbf{g}_1 \sim \mathbf{g}_N$ の各成分の和で一意に表せる。



N次元空間の直交基底の成分

N次元ベクトル \mathbf{f} の \mathbf{g}_i 成分は、 \mathbf{f} と \mathbf{g}_i の内積。

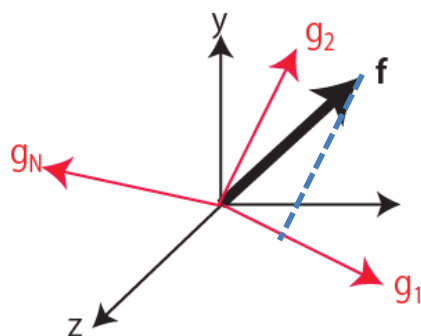
結局、ベクトル \mathbf{f} は、次のように分解される。

$$\mathbf{f} = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}_1) \mathbf{g}_1 + (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}_2) \mathbf{g}_2 + \dots + (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}_N) \mathbf{g}_N$$



$$[f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_N] \cdot [g_{11} \quad g_{12} \quad \dots \quad g_{1N}]$$

$$= \sum_{n=1}^N f_n \mathbf{g}_{1n}$$

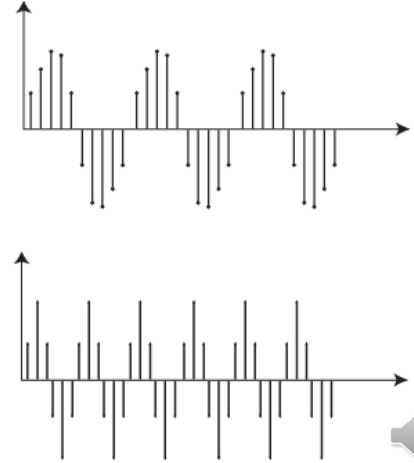
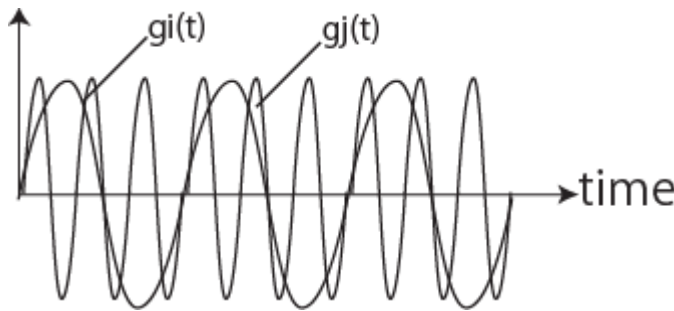


関数でも「直交」を内積から定義できる

波形 g_1 と g_2 の内積を取る.

$$= \frac{1}{T} \int_0^T g_1(t)g_2(t)dt \quad (\text{連続関数})$$

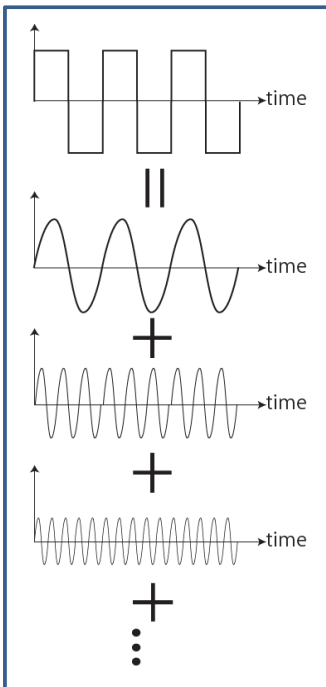
$$= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g_1(n)g_2(n) \quad (\text{離散化して考えた場合})$$



これで準備は整った



フーリエ級数展開の意味するところ(再)



元の波形: 周期 T の波形 $f(t)$

周期 T のcosine波はどれだけ含まれるか

$$a_1 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi / T) dt$$

周期 T のsine波はどれだけ含まれるか

$$b_1 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi / T) dt$$

周期 $2T$ のcosine波はどれだけ含まれるか

$$a_2 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi \times 2 / T) dt$$

周期 $2T$ のsine波はどれだけ含まれるか

$$b_2 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi \times 2 / T) dt$$

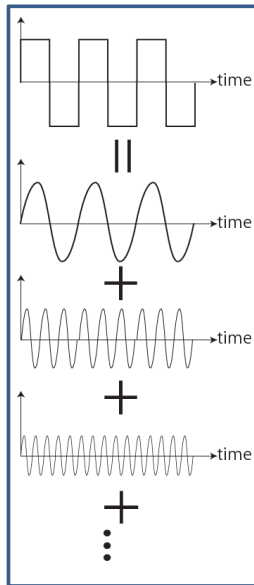
以下 $a_3, b_3, a_4, b_4, \dots$

① 分解の仕方は一通り
② 分解した各成分を合成すると元に戻る

これは当たり前のことではない！！



フーリエ級数の各基底関数の内積を取る



二つの基底関数, $\cos(2\pi mt/T)$, $\cos(2\pi nt/T)$ の内積は？

$$\int_0^T \cos(2\pi mt/T) \cos(2\pi nt/T) dt$$

=

これは $m=n$ でなければ必ず0

二つの基底関数, $\cos(2\pi mt/T)$, $\sin(2\pi nt/T)$ の内積は？

$$\int_0^T \cos(2\pi mt/T) \sin(2\pi nt/T) dt$$

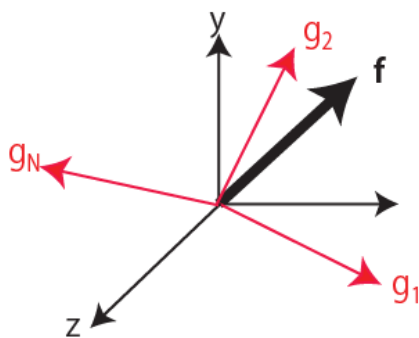
=

これも必ず0

任意の基底関数の内積が0.
⇒直交基底となる！！



フーリエ級数の基底関数は直交基底



$$g_1 = \cos(2\pi \times 1t/T)$$

$$g_2 = \sin(2\pi \times 1t/T)$$

$$g_3 = \cos(2\pi \times 2t/T)$$

$$g_4 = \sin(2\pi \times 2t/T)$$

$$g_5 = \cos(2\pi \times 3t/T)$$

$$g_6 = \sin(2\pi \times 3t/T)$$

...

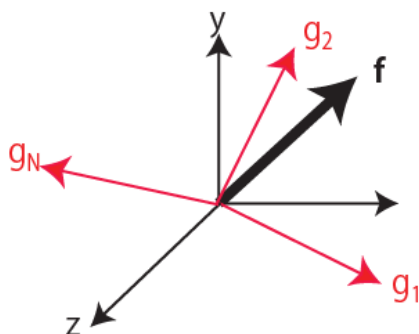
これらは、たがいの要素を持っておらず、
直交基底を構成する

よって、任意の関数 f は $g_1 \sim g_{\dots}$ によって一意に表現できる。



離散フーリエ変換 (DFT)

有限長さの関数($0 < t < T$)を, N 分割して離散的に表す. $f(t) \Rightarrow [f_1, f_2, \dots, f_N]$



基底関数 $\Rightarrow N$ 次元基底ベクトルに
 $g_1 = \cos(2\pi \times 1t/T) = [g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1N}]$
 $g_2 = \sin(2\pi \times 1t/T) = [g_{21}, g_{22}, \dots, g_{2N}]$
 $g_3 = \cos(2\pi \times 2t/T) = [g_{31}, g_{32}, \dots, g_{3N}]$
 $g_4 = \sin(2\pi \times 2t/T) = [g_{41}, g_{42}, \dots, g_{4N}]$
 $g_5 = \cos(2\pi \times 3t/T) = [g_{51}, g_{52}, \dots, g_{5N}]$
 $g_6 = \sin(2\pi \times 3t/T) = [g_{61}, g_{62}, \dots, g_{6N}]$
 ...

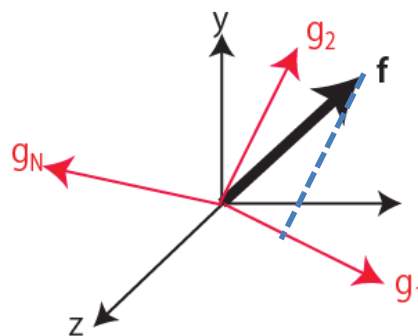
- これらは, たがいに直交する N 次元ベクトルであり, 直交基底を構成する
- よって, 任意の波形 f , すなわちベクトル $[f_1, f_2, \dots, f_N]$ は $g_1 \sim g_N$ によって一意に表現できる
- 後述するように通常は \cos, \sin ではなく \exp 関数を用いる

行列による表現

N 次元ベクトル f の g_i 成分は, f と g_i の内積.
 結局, ベクトル f は, 次のように分解される.

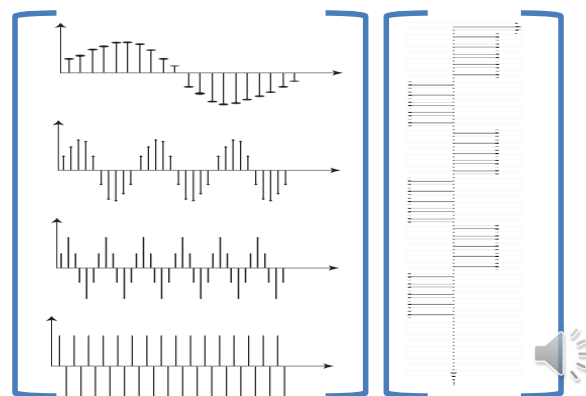
$$f = (f \cdot g_1) g_1 + (f \cdot g_2) g_2 + \dots + (f \cdot g_N) g_N$$

\hookrightarrow g_1 の成分. フーリエ級数

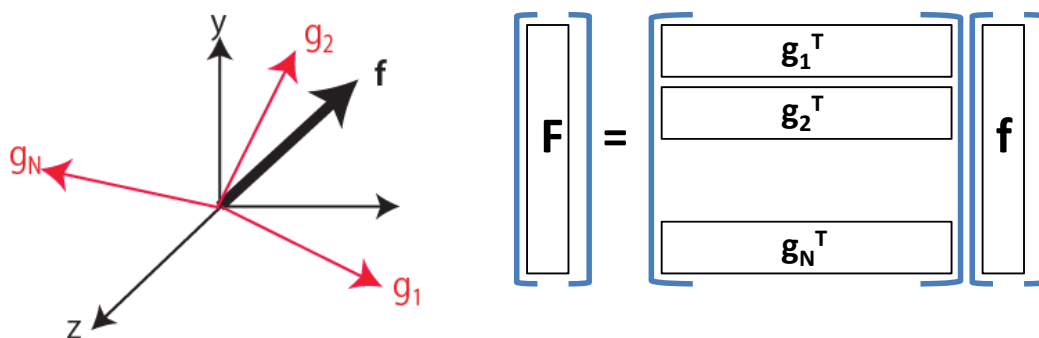


離散フーリエ変換をするには, $f \cdot g_1, f \cdot g_2, \dots, f \cdot g_N$ なる, N 個の内積を計算すればよい.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} g_1^T \\ g_2^T \\ \vdots \\ g_N^T \end{bmatrix} \mathbf{f}$$



離散フーリエ変換とは

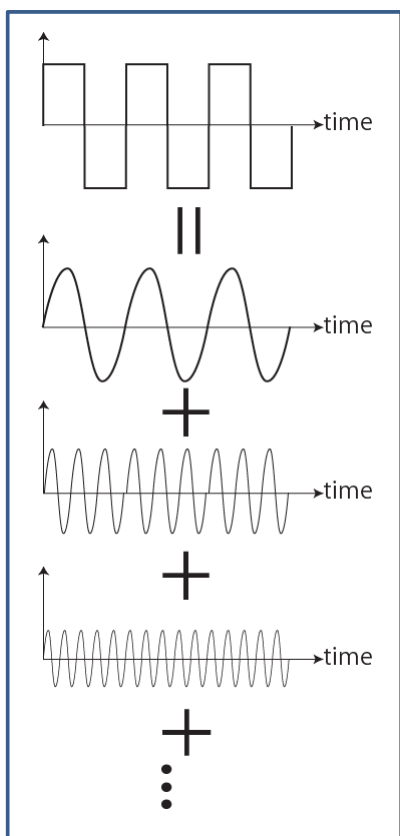


つまり

行列特に回転行列による座標変換の一種であり、
実空間の値で表されているベクトル f を
フーリエ空間の値で表されるベクトル F で表現するもの。



複素フーリエ級数展開：定義



周期 T の波形 $f(t)$ は次のように分解できる

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \exp(j2\pi mt / T)$$

$$c_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(-j2\pi mt / T) dt$$

$\sin(2\pi mt/T)$, $\cos(2\pi mt/T)$ の代わりに、
 $\exp(i2\pi mt/T)$ を用いて整理したもの。
係数 c_m はもはや複素数である。

$\exp(j2\pi mt/T)$ は直交関数系である。すなわち

が、 $m \neq n$ 以外で成り立つ。




フーリエ変換

“周期T”ではない波形 $f(t)$ に対する変換. Tを無限大とすることで導出.


フーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$$


$$c_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(-j2\pi m t / T) dt$$

逆フーリエ変換

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$


$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \exp(j2\pi m t / T)$$




離散フーリエ変換(DFT)

有限長の信号を離散化し、それにたいしてフーリエ変換するもの。
フーリエ変換の結果も有限かつ離散なデータ列となる。


離散フーリエ変換

$$F(k) = \sum_{t=0}^{N-1} f(t) \exp(-j2\pi \frac{k}{N} t)$$


$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$$

離散逆フーリエ変換

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N-1} C(k) \exp(j2\pi \frac{k}{N} t)$$


$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$



振幅, パワースペクトラム, 位相


$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt \quad \text{一般的に複素数の関数}$$

$$\omega = 2\pi f \quad \text{角周波数}$$

角周波数 ω での振幅

角周波数 ω でのパワースペクトラム

角周波数 ω での位相

パワースペクトラムで、元の信号がもつ周波数成分を観察できる 

パワースペクトラムの観察

スペクトラム・アナライザ



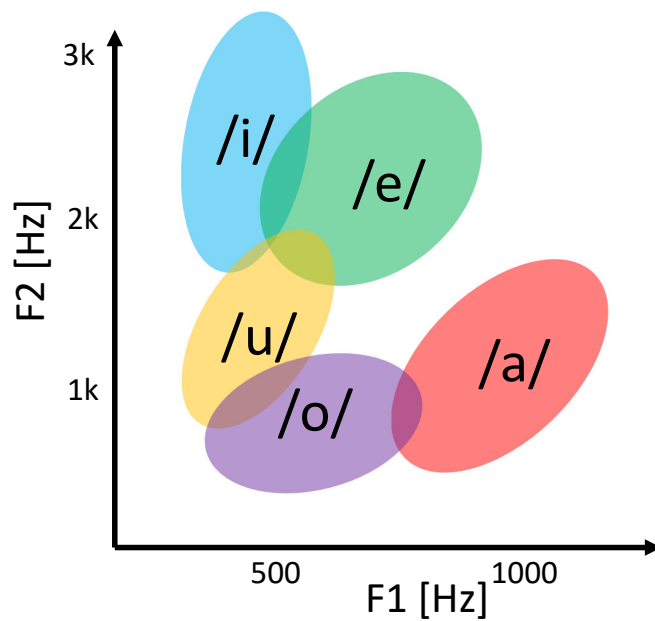
低 周波数 高



アイウエオ



音声認識の手がかり: フォルマント



母音は主な周波数(第一フォルマント)と, 次に多い周波数(第二フォルマント)で認識



(参考)しゃべるピアノ



Speaking Piano

<http://www.youtube.com/watch?v=muCPjK4nGY4>

Talking Piano

<https://www.youtube.com/watch?v=-6e2c0v4sBM>



レポート

次のサンプルコードを参考に、**同じ周期の正弦波、矩形波、三角波**をフーリエ変換し、パワースペクトルを観察、比較せよ。

レポートでは

- 3つのパワースペクトルを一つのグラフに表示する一つのソースコード
- そこからわかったこと、すなわち音色の違いの原因の考察をコメント中に

```
//一周期100の矩形波(ただし直流成分を無くすため平均値0としている)
wave=[ones(1,50), zeros(1,50)] - 0.5;
```

```
//5回繰り返す(回数は適当)
wave = [wave,wave,wave,wave,wave];
```

```
//フーリエ変換
fourier = fft(wave);
```

```
//パワースペクトルを計算
power_spec = fourier .* conj(fourier);
```

```
//計算結果を表示
plot(power_spec);
```



(参考)Python版

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

wave = np.concatenate([np.ones(50),np.zeros(50)])
wave = np.concatenate([wave, wave, wave, wave, wave])
fourier = np.fft.fft(wave)
power_spec = fourier * np.conj(fourier)
plt.plot(power_spec)
plt.show()
```



レポート課題(再掲)

- 授業ではScilab(or Python)を使えることを前提に課題を出します.
- 何かこだわりがあれば, 他の物でもかまいません.
(Matlab, Mathematica, Octave, MATX, Excel,...)
- 課題はほぼ毎回出します.

•Scilab(or Python)を使ったレポートは下記フォームにソースコードをコピーし, 考察を書く形で提出してください. ソースコード以外(wavファイルなど)レポートには添付しなくて結構です.

<https://forms.gle/jH5UjHTboFT7motw8>

レポートの締め切りは次の週の授業開始前

